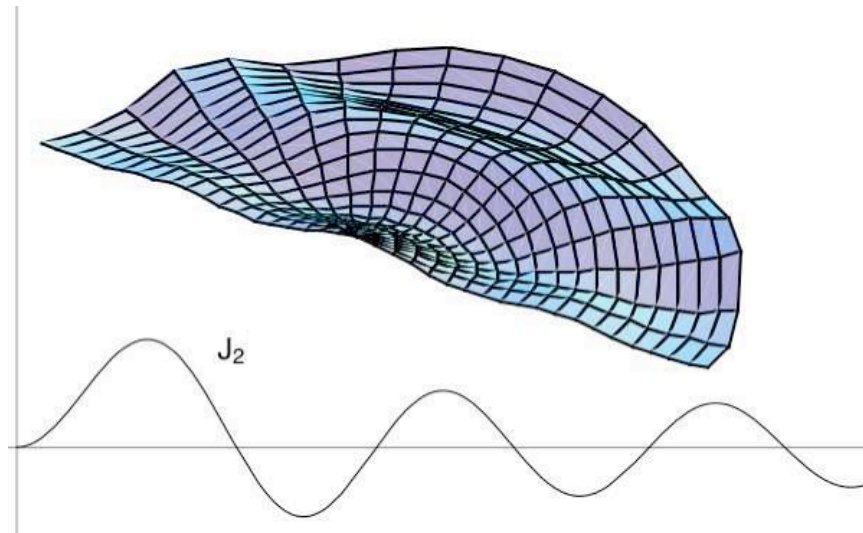


Integraltransformationen
und
partielle Differentialgleichungen
für Ingenieure



Information. Für die erfolgreiche Teilnahme an diesem Modul erhalten Sie

6 Leistungspunkte nach ECTS.

Entsprechend erwarten wir von durchschnittlich begabten und vorgebildeten Studierenden folgenden Arbeitsaufwand:

Vorlesung	2h/Woche
Übung	2h/Woche
Häusliche Nacharbeit und Hausaufgaben	6h/Woche
Klausurvorbereitung	30h

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung: Differentialgleichungen	8
1.1 Differentialgleichungen in den Anwendungen	8
1.2 Erster Blick auf die Mathematik von Differentialgleichungen	9
1.2.1 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung	9
1.2.2 Separable Differentialgleichungen	10
1.3 Lösungen von Differentialgleichungen	12
1.4 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen	13
1.5 Gewöhnliche lineare Differentialgleichungssysteme	16
1.5.1 Struktur des Lösungsraumes	17
1.5.2 Konstante Koeffizienten: Der Exponentialansatz	21
1.6 Lineare Differentialgleichungen n -ter Ordnung	27
1.6.1 Struktur des Lösungsraumes	28
1.6.2 Konstante Koeffizienten: Der Exponentialansatz	31
2 Integraltransformationen	33
2.1 Die Laplacetransformation	34
2.1.1 Definition und grundlegende Eigenschaften	34
2.1.2 Anwendungen der Laplacetransformation I	40
2.1.3 Anwendungen der Laplacetransformation II	48
2.2 Die Fouriertransformation	57
2.2.1 Definition und grundlegende Eigenschaften	57
2.2.2 Anwendungen der Fouriertransformation	63
3 Partielle Differentialgleichungen	68
3.1 Separation und Superposition	68
3.2 Ebene-Wellen-Lösung nach d'Alembert	75
3.3 Separation in Zylinder- und Kugelkoordinaten	77
3.3.1 Zylinderkoordinaten	77
3.3.2 Kugelkoordinaten	79
4 Spezielle Funktionen	82
4.1 Die Besselsche Differentialgleichung	82
4.1.1 Konstruktion einer Lösung	83
4.1.2 Die allgemeine Lösung	85
4.1.3 Der asymptotische Verlauf der Zylinderfunktionen	87
4.1.4 Entwicklung nach Besselfunktionen: Fourier-Bessel-Reihen	90
4.2 Die Legendresche Differentialgleichung	96

4.2.1	Konstruktion von Lösungen für $k > 0$ durch Rekursion.	97
4.2.2	Die Legendrepolynome oder Legendrefunktionen 1. Art	98
4.2.3	Funktionsverlauf der Legendrefunktionen	99
4.2.4	Entwicklung nach Legendrepolynome	101
4.2.5	Die allgemeine Lösung, Legendrefunktionen 2. Art	101
4.2.6	Die erzeugende Funktion der Legendrepolynome	102

5 Anhang **105**

5.1	Die Matrix-Exponential-Lösung	105
5.2	Ein Grenzwertproblem	107
5.3	Partialbruchzerlegung	108
5.4	Laplacetransformation versus Variation der Konstanten	110
5.5	Die Laplacetransformierte der Besselfunktionen	113
5.6	Die Parsevalsche Gleichung für die Fouriertransformation	115
5.7	Die Γ -Funktion	116
5.8	Orthogonalität der Besselfunktionen	117
5.9	Komplexe Zylinder- und verwandte Funktionen	119
5.10	Die Nullstellen der Legendrepolynome	120
5.11	Orthogonalität der Legendrefunktionen	121
5.12	Zugeordnete Legendrefunktionen	122
5.13	Eine Schranke für die Legendrepolynome	123

Literatur

Als Lehrbücher zu dieser Veranstaltung werden empfohlen:

- G. Bärwolff, G. Seifert: Höhere Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure, Spektrum Akademischer Verlag
- Meyberg, Vachenaue: Höhere Mathematik 1, Springer Verlag

Eine sehr ausführliche Einführung in die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen mit vielen Anwendungsbeispielen ist

- W. E. Boyce, R. C. DiPrima: Gewöhnliche Differentialgleichungen, Spektrum Akademischer Verlag 1995

Die partiellen Differentialgleichungen werden detaillierter behandelt in

- Burg/Haf/Wille: Höhere Mathematik für Ingenieure, Band V, B. G. Teubner, Stuttgart 1991

Für die Bessel- und Legendrefunktionen ist ein Standardwerk

- M. Abramowitz, I. Stegun: Handbook of Mathematical Functions, Dover, New York 1989

Zum selben Thema ist sehr hilfreich

- J. Spanier, K. Oldham: An Atlas of Functions, Springer 1996

Skripten

Farbig unterlegt finden Sie Beispiel aus den Ingenieur Anwendungen, oft mit expliziten Hinweisen auf Ingenieurskripten des Grundstudiums:

Einführung in die Netzwerktheorie

Naunin: Einführung in die Netzwerktheorie,
Skript TUB 1998

Signale und Systeme

Noll: Signale und Systeme,
Skript 1999

Theoretische Elektrotechnik

Henke: Theoretische Elektrotechnik,
Skript TUB 1990/91

Werkstoffe I

Werkstoffe und Bauelemente der Elektrotechnik I,
Skript TUB, Institut für Werkstoffe der Elektrotechnik

Werkstoffe II

Werkstoffe und Bauelemente der Elektrotechnik II,
Skript TUB, Institut für Werkstoffe der Elektrotechnik

Regelungstechnik I

King: Regelungstechnik I,
Skript TUB

Regelungstechnik II

King: Regelungstechnik II,
Skriptum TUB

Regelung in der Luft- und Raumfahrt

K. Wilhelm: Regelung in der Luft und Raumfahrt,
Skriptum TUB, SS 2002

Energie-, Impuls- und Stofftransport

Lehrbuch *Baehr/Stephan: Wärme- und Stoffübertragung*
zur VL Auracher: Energie-, Impuls- und Stofftransport

Popov: Mechanik III

V. Popov: Mechanik III,
Skript TUB WS 2002/3

Zu einzelnen Veranstaltungen existieren mehrere, vielleicht auch neuere Skripten und Lehrbücher.
Wir begnügen uns meistens mit *einem* Zitat, auch wenn sich der betreffende Sachverhalt an mehreren Stellen findet.

1 Einführung: Differentialgleichungen

Integraltransformationen sind ein wesentliches Hilfsmittel zur Lösung von Differentialgleichungen und die Behandlung *partieller* Differentialgleichungen setzt vielfach die Vertrautheit mit den *gewöhnlichen* Differentialgleichungen voraus. Wir beginnen deshalb mit einer Einführung in die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen, die Ihnen in Einzelaspekten ja bereits aus der Analysis und Linearen Algebra bekannt ist.

1.1 Differentialgleichungen in den Anwendungen

- Wo in den Anwendungen kommen welche Differentialgleichungen vor?

Ein kräftefreier Massenpunkt bewegt sich nach NEWTON mit konstanter Geschwindigkeit \vec{v} . Wirkt auf ihn eine Kraft \vec{F} , so bewirkt diese eine zeitliche Änderung der Geschwindigkeit (=Beschleunigung) proportional zur Kraft. Die Geschwindigkeit \vec{v} wird jetzt eine Funktion $\vec{v} = \vec{v}(t)$, und es gilt

$$m\dot{\vec{v}} = \vec{F}. \quad (1)$$

Dieser so einfach erscheinende Sachverhalt ist fundamental für unsere Methode, Naturvorgänge und damit technische Vorgänge zu modellieren: Die momentanen (infinitesimalen) Änderungen eines Systems werden „ergründet“ und beschrieben, um aus ihnen die „makroskopische“ Entwicklung des Systems zu bestimmen. Durch (triviale) Integration von (1) findet man die Entwicklung der Geschwindigkeit

$$m\vec{v}(t) = t\vec{F} + m\vec{v}_0.$$

Wenn allerdings \vec{F} nicht konstant ist, sondern selbst von t oder, wie bei Reibungsphänomenen, auch von \vec{v} abhängt, bekommt man eine kompliziertere Beziehung

$$m\dot{\vec{v}}(t) = \vec{F}(t, \vec{v}).$$

Dann wird die Integration schwieriger, oder $\vec{v}(t)$ läßt sich gar nicht mehr durch Integration finden. Darauf gehen wir im nächsten Abschnitt ein.

Aufgrund der gerade erklärten fundamentalen erkenntnistheoretischen Methode ist es offenbar, dass Differentialgleichungen in den Ingenieurwissenschaften eine prominente Rolle spielen.

Die NEWTONSche Gleichung ist in allen Bereichen der **Dynamik** von fundamentaler Bedeutung, wie Sie in den Mechanik-Vorlesungen sehen [*MueII, Abschnitt 13*]. Vor allem gewöhnliche lineare Differentialgleichungssysteme sind das Kernstück der **Regelungstechnik**, vergleichen Sie [*Regelungstechnik I*] oder [*Regelung in der Luft- und Raumfahrt*].

Andere Gebiete werden von *partiellen* Differentialgleichungen bestimmt, also Differentialgleichungen für Funktionen von mehreren Variablen, deren partielle Ableitungen gewisse Gleichungen erfüllen. Die **Theorie elektromagnetischer Felder** beruht auf den MAXWELLSchen Gleichungen, vgl. [*Theoretische Elektrotechnik*]. Die **Ausbreitung von Radiowellen** wird durch die Wellen- oder Schwingungsgleichung beschrieben. **Wärmeleitungsprozesse** und gleichermaßen **Diffusionsprozesse** zum Beispiel zur Erzeugung von Fremdstoffkonzentrationen in Halbleiterkristallen werden durch die Wärmeleitungsgleichung beschrieben, vgl. [*Werkstoffe II*].

Etwas zugespitzt formuliert:

Sie haben in den ersten Semestern die Differentialrechnung nur deshalb lernen müssen, weil Differentialgleichungen für Ingenieure so ungeheuer wichtig sind.

1.2 Erster Blick auf die Mathematik von Differentialgleichungen

- Wir klären die einfachste Terminologie ...
- ... und wir lösen die einfachsten Differentialgleichungen.
- Wir präzisieren, was wir unter Lösungen verstehen wollen ...
- ... und formulieren einen Existenz- und Eindeutigkeitssatz.

Zur Terminologie:

- *Differentialgleichungen* sind Gleichungen für eine gesuchte Funktion, welche Ableitungen dieser Funktion involvieren.
- Wenn die Funktion vektorwertig ist, wenn also mehrere Komponentenfunktionen gesucht werden, spricht man von einem *System* von Differentialgleichungen, sonst auch von *skalaren* Differentialgleichungen.
- Wenn die Funktion von mehreren Variablen abhängt und partielle Ableitungen auftreten, spricht man von *partiellen*, andernfalls von *gewöhnlichen* Differentialgleichungen.
- Die höchste auftretende Ableitungsordnung der gesuchten Funktion heißt die *Ordnung* der Differentialgleichung.

1.2.1 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

Wir beginnen mit einigen Bemerkungen zu Differentialgleichungen 1. Ordnung.

Beispiel 1. Das einfachste Beispiel ist

$$y' = f(x)$$

mit einer Funktion $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$. Die Lösungen sind die Stammfunktionen von f , die man (bei stetigem f) durch Integrieren finden kann:

$$y(x) = y_0 + \int_{\alpha}^x f(u) du.$$

Dabei ist y_0 eine beliebige Konstante. Sie wird eindeutig bestimmt, wenn man außer der Differentialgleichung noch eine *Anfangsbedingung*

$$y(\alpha) = y_0$$

vorgibt. □

Beispiel 2. Das nächste Beispiel ist anders geartet, hier kommt die gesuchte Funktion auch auf der rechten Seite vor:

$$y' = ay, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Das ist leicht zu lösen, $y(x) := e^{ax}$ ist offenbar eine Lösung. Aber es ist nicht die einzige: $y(x) = y_0 e^{a(x-x_0)}$ ist auch eine, die überdies die Anfangsbedingung

$$y(x_0) = y_0$$

erfüllt. Sind das nun alle Lösungen? Ja: Vgl. Modul *Analysis für Ingenieure*, Abschnitt 6.3. □

Beispiel 3. Wie lösen Sie

$$y' = a(x)y \quad (2)$$

mit einer auf $[\alpha, \beta]$ stetigen Funktion a ? Können Sie eine Lösung finden, für die $y(\alpha) = y_0$ mit vorgegebenem y_0 ist? \square

Beispiel 4. Wenn Sie das letzte Beispiel geschafft und eine Lösung gefunden haben, die wir mal $y_H(x)$ nennen wollen, was machen Sie dann mit

$$y' = a(x)y + b(x),$$

wobei $a, b : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig sind?

Dies ist die allgemeine *lineare Differentialgleichung 1. Ordnung*. „Linear“ deshalb, weil die gesuchte Funktion y nur linear darin vorkommt.

Wenn Sie an die Produktregel der Differentiation denken, ist es nicht so abwegig, als Lösung

$$y(x) = A(x)y_H(x)$$

zu versuchen, d.h. den *Ansatz* $y(x) = A(x)y_H(x)$ zu machen. Dann ist nämlich

$$\begin{aligned} y'(x) &= A(x)y_H'(x) + A'(x)y_H(x) \\ &= A(x)a(x)y_H(x) + A'(x)y_H(x) \\ &= a(x)y(x) + A'(x)y_H(x). \end{aligned}$$

Wir müssen nur ein $A(x)$ finden, für das

$$A'(x)y_H(x) = b(x)$$

ist. Das tut

$$A(x) = A_0 + \int_{\alpha}^x \frac{b(\xi)}{y_H(\xi)} d\xi.$$

Allerdings darf y_H keine Nullstellen haben. Wie steht es damit? (*Sie* hatten doch (2) gelöst!) \square

1.2.2 Separable Differentialgleichungen

Wir sehen uns noch ein wenig bei (nichtlinearen) Differentialgleichungen erster Ordnung um und behandeln eine Verallgemeinerung des Beispiels 3, nämlich Differentialgleichungen der Form

$$y' = f(x)g(y).$$

Wir wollen annehmen, dass die Funktionen rechts stetige Ableitungen haben („technische“ Voraussetzung). Dann hat nach einem allgemeinen Existenz- und Eindeutigkeitsatz (vgl. Abschnitt 1.4) das Anfangswertproblem

$$y' = f(x)g(y), \quad y(x_0) = y_0,$$

eine eindeutig bestimmte Lösung. Um sie zu finden, betrachten wir

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x).$$

Dazu nehmen wir an, dass $g(y_0) \neq 0$, also $g(y) \neq 0$ für kleines $|y - y_0|$.¹ Wir integrieren beide Seiten. Dabei berücksichtigen wir, dass nach der Kettenregel

$$\frac{d}{dx} \int_{y_0}^{y(x)} \frac{1}{g(\eta)} d\eta = \frac{1}{g(y(x))} y'(x).$$

¹Finden Sie die eindeutig bestimmte Lösung im Fall $g(y_0) = 0$.

Damit finden wir

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{1}{g(\eta)} d\eta = \int_{x_0}^x f(\xi) d\xi.$$

Stellen Sie sich die Integrale gelöst vor. Dann ist das eine Gleichung für $y(x)$ ohne Ableitungen. Zu abstrakt? Betrachten Sie folgendes konkrete

Beispiel 5. Wir betrachten

$$y' = x(1 + y^2), \quad y(0) = 0.$$

Dann liefert die vorstehende Überlegung

$$\arctan y(x) = \int_0^{y(x)} \frac{1}{1 + \eta^2} d\eta = \int_0^x \xi d\xi = \frac{x^2}{2}.$$

Daraus folgt

$$y(x) = \tan\left(\frac{x^2}{2}\right).$$

Beachten Sie, dass die Lösung dieses Anfangswertproblems nicht auf ganz \mathbb{R} definiert ist, sondern bei $x = \pm\sqrt{\pi}$ ins Unendliche verschwindet. \square

Verhältnismäßig häufig trifft man separable Differentialgleichungen, bei denen f konstant ist.

Beispiel 6 (Kettenlinie).

Müller: Mechanik I, Abschnitt 4.6.2 oder Ziegler: Mechanik, Abschnitt 21

Die Form eines an zwei Punkten befestigten (homogenen) Seils unter dem Einfluss seines Eigengewichtes sei gegeben durch den Graphen einer Funktion $y(x)$, wobei $y(0)$ der Tiefpunkt des Seils sei. In der Mechanik untersucht man die Kräfteverhältnisse in dieser Situation und findet für die Ableitung $v(x) = y'(x)$ die Bedingung

$$v' = \frac{1}{a} \sqrt{1 + v^2},$$

mit einer Konstanten a , die durch Seillänge und Position der Befestigungspunkte bestimmt ist. Das ist eine separable Differentialgleichung, und mit

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} = \operatorname{Arsinh}(x) = \sinh^{-1}(x)$$

finden wir

$$\sinh^{-1} v = \frac{x}{a} + c_1.$$

oder $v(x) = \sinh\left(\frac{x}{a} + c_1\right)$.

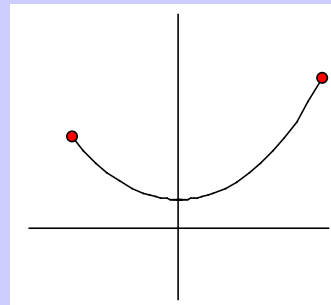
Im Tiefpunkt ist $v(0) = y'(0) = 0$ und daher $c_1 = 0$, also

$$v(x) = \sinh \frac{x}{a}.$$

Durch nochmalige Integration erhält man

$$y(x) = a \cosh \frac{x}{a} + c.$$

Das ist die sogenannte *Kettenlinie*.



1.3 Lösungen von Differentialgleichungen

Die meisten Beispiele im letzten Abschnitt, besonders die skalaren linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten waren relativ leicht zu lösen. Anders das folgende Beispiel:

Beispiel 7 (Pendelgleichung).

Müller: *Mechanik II*, Abschnitt 15.2

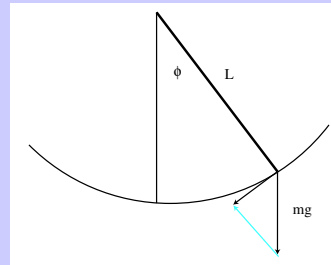
Der Ausschlagwinkel ϕ eines (ebenen starren) Pendels erfüllt die Differentialgleichung

$$mL\ddot{\phi} = -mg \sin \phi. \quad (3)$$

Wenn man nur kleine Ausschlagwinkel betrachtet, ist $\sin \phi \approx \phi$ und man kann die Gleichung *linearisieren*:

$$mL\ddot{\phi} = -mg\phi.$$

Das ist mit dem Exponentialansatz und trigonometrischen Funktionen leicht zu lösen, ganz im Gegensatz zur Originalgleichung (3):



Für die können Sie aus den Funktionen, die Sie kennen, keine Lösungsfunktion $\phi(t)$ zusammenbasteln, die Gleichung ist nicht mit elementaren Funktionen lösbar.

Das kommt nicht überraschend. Sie kennen diese Situation schon von einem simplen Spezialfall der Differentialgleichungstheorie, nämlich aus der Integralrechnung. So einfache Funktionen wie $\sin(x^2)$ haben keine elementare Stammfunktion. Und dieser Fall kommt in der Praxis durchaus häufig vor, vor allem, wenn man die partiellen Differentialgleichungen mit einbezieht.

Unter diesen Umständen ist es von besonderer Bedeutung sich über folgende Fragen Klarheit zu verschaffen:

- Existenz: Gibt es überhaupt Lösungen? (Sonst ist auch ein etwaiges „Ergebnis“ eines numerischen Verfahrens bestimmt keine Lösung!)
- Eindeutigkeit: Wenn es Lösungen gibt, durch welche zusätzlichen Forderungen ist dann eine Lösung eindeutig bestimmt. Wann können wir sicher sein, die „richtige“ Lösung gefunden zu haben?
- Eigenschaften: Welche Eigenschaften haben die Lösungen? Ist es möglich darüber Informationen direkt aus der Differentialgleichung zu gewinnen, auch wenn wir sie nicht explizit lösen können?
(Beispiel: Die Lösungen von $y' = 1 + y^4$ sind sicher alle monoton wachsend.)
- Stabilität: Gleichgewichtslösungen einer Differentialgleichung sind zeitlich konstante Lösungen. Was passiert bei Störungen des Gleichgewichts? Kehrt das System dann wieder in die Gleichgewichtslage zurück? Solche Fragen sind etwa in der Regelungstechnik von großem Interesse.
- Sensitivität: Diese Fragestellungen sind verwandt mit denen nach der Stabilität. Zum Beispiel für die Anwendung numerischer Verfahren ist es wichtig zu wissen, wie empfindlich die Lösungen auf kleine Störungen der Differentialgleichung (also der Koeffizienten) und der zusätzlichen Anfangs- oder Randbedingungen reagieren.

1.4 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

Wir betrachten zwei der eben angeschnittenen Fragen, nämlich die nach der Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen einer Differentialgleichung. Wir beschränken uns dabei auf Differentialgleichungen 1. Ordnung. Das ist keine wesentliche Einschränkung, wie das folgende Beispiel zeigt:

Beispiel 8 (NEWTONSche Bewegungsgleichung, Phasenraum).

Müller: *Mechanik II*, Abschnitt 12.2

Die Gleichung für die Bewegung eines Massenpunktes an der Stelle $\vec{y}(t)$ unter dem Einfluss einer von Zeit und Ort abhängigen Kraft $\vec{F}(t, \vec{y})$ ist

$$m\ddot{\vec{y}} = \vec{F}(t, \vec{y}).$$

Das ist also ein 3-dimensionales System 2. Ordnung.

Definieren wir den *Impuls* durch $\vec{p} := m\dot{\vec{y}}$, so erhalten wir ein 6-dimensionales System 1. Ordnung:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{y}} &= \frac{1}{m}\vec{p} \\ \dot{\vec{p}} &= \vec{F}(t, \vec{y}).\end{aligned}$$

Mit den Abkürzungen

$$\vec{x}(t) := \begin{pmatrix} \vec{y}(t) \\ \vec{p}(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{G}(t, \vec{x}) := \begin{pmatrix} \frac{1}{m}\vec{p} \\ \vec{F}(t, \vec{y}) \end{pmatrix}$$

schreibt sich das als $\dot{\vec{x}} = \vec{G}(t, \vec{x})$.

Offensichtlich kann man diesen Trick auf jede Differentialgleichung höherer Ordnung anwenden. Wir halten fest:

Jede Differentialgleichung höherer Ordnung lässt sich durch Einführen neuer abhängiger Variablen umschreiben in ein (höher-dimensionales) System 1. Ordnung der Form

$$\dot{\vec{x}} = \vec{G}(t, \vec{x}). \quad (4)$$

KONSTRUKTION EINER LÖSUNG. Nun zur Frage nach der Existenz von Lösungen. Wir betrachten

$$\dot{\vec{x}} = \vec{G}(t, \vec{x}), \quad \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0. \quad (5)$$

Wenn \vec{G} konstant ist, bekommen wir durch

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_0 + (t - t_0)\vec{G}$$

eine Lösung. Diese ist ein Streckenzug.

Wenn \vec{G} nicht konstant aber stetig ist, können wir uns vorstellen, dass G wenigstens immer „ein Stück weit“ konstant ist, und können dann die Lösung (von der wir noch gar nicht wissen, ob sie existiert!) ein Stück weit geradlinig „approximieren“. Genauer betrachten wir eine Zeitsequenz

$$t_0 < t_1 = t_0 + h < t_2 = t_0 + 2h < \dots < t_N = t_0 + Nh$$

mit positiver Schrittweite $h > 0$. Damit definieren wir rekursiv

$$\begin{aligned}\vec{x}_h(t_0) &:= \vec{x}_0, \\ \vec{x}_h(t) &:= \vec{x}_h(t_i) + (t - t_i)\vec{G}(t_i, \vec{x}_h(t_i)), \quad t_i < t \leq t_{i+1}.\end{aligned}$$

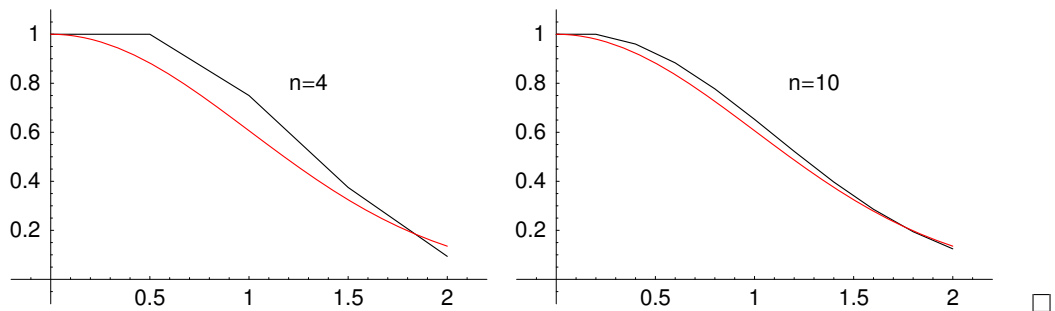
$\vec{x}_h(t)$ ist dann also ein Polygonzug, und dieses Verfahren heißt das *EULERSche Polygonzugverfahren* oder kurz *EULERverfahren*.

Beispiel 9. Für das Anfangswertproblem

$$y' = -xy, \quad y(0) = 1$$

zeigen die beiden folgenden Abbildungen die Ergebnisse des EULERverfahrens mit verschiedener Schrittweite im Vergleich mit der exakten Lösung

$$y(x) = e^{-x^2/2}.$$



Man kann nun für „halbwegs anständiges“ \vec{G} beweisen:

- Wenigstens für t -Werte nah bei t_0 , also auf einem Intervall $[t_0, t_0 + \epsilon]$ existiert der Grenzwert

$$\vec{x}(t) := \lim_{h \searrow 0} \vec{x}_h(t) \tag{6}$$

und definiert eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{\vec{x}} = \vec{G}(t, \vec{x}), \quad \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0.$$

- Je zwei Lösungen dieses Anfangswertproblems sind gleich, jedenfalls auf dem Durchschnitt ihrer Definitionsintervalle.

Die Konvergenz für gegen 0 konvergierende Schrittweite wird im vorangehenden Beispiel glaubhaft vermittelt. Dennoch hat das EULERSche Polygonzugverfahren als numerisches Verfahren gewisse Schwächen, zum Beispiel bezüglich der Konvergenzgeschwindigkeit oder der Stabilität gegenüber Rundungsfehlern. Softwarepakete zur numerischen Lösung von Differentialgleichungen benutzen deshalb Weiterentwicklungen des EULERSchen Verfahrens, insbesondere das sogenannte RUNGE-KUTTA-Verfahren, vgl. den Modul *Numerik I für Ingenieure*.

Wir schließen mit einer Präzisierung der obigen Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen im folgenden

Satz 10 (Existenz- und Eindeigkeitssatz). Sei $\vec{G}(t, \vec{x})$ auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar² und $(t_0, \vec{x}_0) \in U$ ein Punkt dieser Menge. Dann ist das Anfangswertproblem

$$\dot{\vec{x}} = \vec{G}(t, \vec{x}), \quad \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0. \quad (7)$$

eindeutig lösbar. Genauer gilt:

(i) Es gibt ein Intervall J mit $t_0 \in J$, so dass das Anfangswertproblem (7) auf J eine Lösung $\vec{x}(t)$ hat, wobei

$$(t, \vec{x}(t)) \in U \text{ für alle } t \in J.$$

(ii) Jede weitere Lösung von (7) auf einem Intervall um t_0 mit dieser Eigenschaft ist die Beschränkung der Lösung aus (i) auf ein Teilintervall von J .

Die Lösung in (i) ist also eine eindeutig bestimmte maximale Lösung.

In den letzten Abschnitten dieser Einführung behandeln wir die häufig auftretende Klasse linearer Differentialgleichungen, für die man die Struktur der Lösungen noch besser kennt, und für die man bei konstanten Koeffizienten sogar explizite Lösungsverfahren hat.

²Die Voraussetzung der stetigen Differenzierbarkeit kann wesentlich abgeschwächt werden. Zum Beispiel genügt es, wenn G stetig und nach den x -Komponenten stetig differenzierbar ist.

1.5 Gewöhnliche lineare Differentialgleichungssysteme

- Lineare Differentialgleichungen besitzen eine starke Analogie zur linearen Gleichungssystemen und wie diese einen sehr einfach strukturierten Lösungsraum.
- Die Linearen Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten bilden die einzige größere Klasse von Differentialgleichungen, die man mit einer elementaren Methode lösen kann.
- Wichtiges Hilfsmittel dabei ist die Theorie von Eigenwerten und -vektoren einer quadratischen Matrix.

Wir untersuchen gekoppelte Systeme aus mehreren linearen Differentialgleichungen der Form

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \dots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t) \\ x_2' &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \dots + a_{2n}(t)x_n + b_2(t) \\ &\quad \dots \\ x_n' &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \dots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t) \end{aligned} \quad (8)$$

mit stetigen Funktionen a_{ij} und b_i auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Die t -Ableitung bezeichnen wir in Zukunft wegen bequemerer Notation mit einem Strich statt mit einem Punkt.

Mit Matrizen schreibt sich das kurz als

$$\vec{x}' = A(t)\vec{x} + \vec{b}(t). \quad (9)$$

Solche Systeme kommen in der Praxis sehr häufig vor, nicht zuletzt deshalb, weil man über ihre Lösungen eine Menge weiß, und deshalb bei der Modellierung physikalische Probleme gern so lange vereinfacht, bis sie sich durch lineare Systeme beschreiben lassen. Natürlich ist das in der Regel nur eine erste Annäherung an die realen Verhältnisse.

Wir fragen also, wie die Lösungsmenge von (8)/(9) aussieht, und ob und wie man Lösungen explizit finden kann.

Ist $\vec{b}(t) = 0$, so nennt man das System *homogen*, andernfalls *inhomogen*. Zu jedem inhomogenen System gehört ein homogenes, bei dem einfach $\vec{b}(t)$ durch 0 ersetzt ist.

Warnung. Genauso wie bei gewöhnlichen linearen Gleichungssystemen hat man auch bei *Differentialgleichungssystemen* ein kleines Problem mit der Bezeichnung: *Eine* Lösung von (8)/(9) ist eine vektorwertige Funktion

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

mit den Komponentenfunktionen $x_1(t), \dots, x_n(t)$. Wenn man dagegen verschiedene Lösungen von (8) oder (9) betrachtet, bezeichnet man die gern als $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots$. Jetzt numeriert der Index also verschiedene Lösungen und nicht verschiedene Komponenten ein und derselben Lösung. Die Komponenten von \vec{x}_1 bezeichnen wir, wenn es nötig ist, mit $x_{11}(t), \dots, x_{n1}(t)$. Der *zweite* Index soll dann die Lösungen, der *erste* die Komponenten numerieren:

$$\vec{x}_j(t) = \begin{pmatrix} x_{1j}(t) \\ \vdots \\ x_{nj}(t) \end{pmatrix}.$$

Schreibt man mehrere Lösungen in eine Matrix, so stehen sie dort also als *Spalten*.

1.5.1 Struktur des Lösungsraumes

Der Existenz- und Eindeigkeitssatz, der Satz 10, garantiert die eindeutige Lösbarkeit des Anfangswertproblems, ohne etwas darüber zu sagen, wie lange die Lösung lebt: Auf einem Intervall um t_0 herum eben, aber es ist unklar, wie groß das ist.

Erinnern Sie sich an Beispiel 5: Die rechte Seite der Differentialgleichung $x' = t(1 + x^2)$ ist für alle $(t, x) \in \mathbb{R}^2$ definiert und wunderbar. Trotzdem lebt die Lösung des Anfangswertproblems mit $x(0) = 0$, nämlich $x(t) = \tan(t^2/2)$, nur auf dem Intervall $]-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}}[$.

Ganz anders bei *linearen* Differentialgleichungen. Dort leben die Lösung „so weit wie die Differentialgleichung“:

Satz 11 (Existenz und Eindeigkeitssatz). *Haben $A(t)$ und $\vec{b}(t)$ auf dem Intervall I stetige Koeffizienten $a_{ij}(t)$ und $b_i(t)$ und ist $t_0 \in I$, so hat das Anfangswertproblem*

$$\vec{x}' = A(t)\vec{x} + \vec{b}(t) \quad (10)$$

$$\vec{x}(t_0) = \vec{\eta}_0 \quad (11)$$

für jedes $\vec{\eta}_0 = \begin{pmatrix} \eta_{10} \\ \vdots \\ \eta_{n0} \end{pmatrix}$ genau eine auf ganz I definierte Lösung.

Weil alle Lösungen auf demselben Intervall definiert sind, kann man auch über Linearkombinationen von Lösungen reden, und es gilt:

Satz 12 (Lösungsraum der homogenen Gleichung). *Der Lösungsraum der homogenen Gleichung*

$$\vec{x}' = A(t)\vec{x}. \quad (12)$$

ist ein Vektorraum der Dimension n . Das heißt:

- *Linearkombinationen von Lösungen sind wieder Lösungen: Es gilt das Superpositionsprinzip.*
- *Es gibt n linear unabhängige Lösungen.*
- *Sind die Lösungen $\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_n(t)$ linear unabhängig, so ist jede andere Lösung eine Linearkombination von diesen:*

$$\vec{x}(t) = c_1\vec{x}_1(t) + \dots + c_n\vec{x}_n(t) \quad (13)$$

Man nennt $\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_n(t)$ eine Lösungsbasis oder ein Fundamentalsystem von Lösungen und (13) „die allgemeine Lösung von (12)“.

Die Vorgabe eines Anfangswertes $\vec{x}(t_0) = \vec{\eta}_0$ bestimmt die Koeffizienten c_i in der allgemeinen Lösung eindeutig.

LINEARE UNABHÄNGIGKEIT: WRONSKITEST. Wir betrachten Lösungen

$$\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_n(t)$$

von (12) und wollen wissen, ob sie linear unabhängig sind. Sind zunächst die Vektoren

$$\vec{x}_1(t_0), \dots, \vec{x}_n(t_0)$$

an einer Stelle t_0 linear unabhängig, so sind $\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_n(t)$ als Funktionen linear unabhängig:

Aus

$$\lambda_1 \vec{x}_1(t) + \dots + \lambda_n \vec{x}_n(t) = \vec{0}$$

für *alle* t folgt nämlich insbesondere

$$\lambda_1 \vec{x}_1(t_0) + \dots + \lambda_n \vec{x}_n(t_0) = \vec{0}.$$

Weil diese Vektoren linear unabhängig sind, ist $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.

Aus dem Eindeutigkeitsatz für das Anfangswertproblem folgt für Lösungen von (12) auch die Umkehrung. Daher sind die Lösungen $\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_n(t)$ genau dann linear unabhängig, wenn die Funktionswerte $\vec{x}_1(t_0), \dots, \vec{x}_n(t_0)$ an einer Stelle (und dann an jeder Stelle) linear unabhängig sind. Also sind die Lösungen $\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_n(t)$ genau dann linear unabhängig, wenn die aus ihnen gebildete Matrix

$$W = (\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_n(t)),$$

die sogenannte WRONSKIMATRIX, an einer und dann an jeder Stelle t vollen Rang $= n$ bzw. Determinante $\neq 0$ besitzt.

Machen Sie sich klar, warum Linearkombinationen von Lösungen des *inhomogenen* Systems im allgemeinen *keine* Lösungen liefern. Und rechnen Sie nach, dass wenn $\vec{x}_1(t)$ und $\vec{x}_2(t)$ zwei Lösungen des inhomogenen Systems sind, dass dann $x(t) = \vec{x}_1(t) - \vec{x}_2(t)$ das zugehörige homogene System löst. Dann haben Sie bewiesen:

Satz 13 (Lösungsraum des inhomogenen Systems). Sei $\vec{x}_P(t)$ eine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$\vec{x}' = A(t)\vec{x} + \vec{b}(t). \quad (14)$$

Man nennt das auch eine partikuläre oder spezielle Lösung von (14). Dann findet man alle Lösungen von (14), indem man zu \vec{x}_P alle Lösungen \vec{x}_H der homogenen Gleichung (12) addiert. Man sagt,

$$\vec{x} = \vec{x}_P + \vec{x}_H$$

ist die allgemeine Lösung von (14), wenn \vec{x}_H die allgemeine Lösung von (12) ist.

Ist $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ eine Lösungsbasis für die homogene Gleichung, so ist also die Menge der Lösungen der inhomogenen Gleichung gegeben durch

$$\vec{x} = \vec{x}_P + c_1 \vec{x}_1 + \dots + c_n \vec{x}_n$$

mit beliebigen Konstanten c_1, \dots, c_n .

Damit ist die Struktur des Lösungsraumes linearer Differentialgleichungssysteme geklärt. Bleibt die Frage, wie man Lösungen von (14) finden kann. Wir erklären im nächsten Abschnitt, wie man bei konstanter Systemmatrix A und $\vec{b}(t) = \vec{0}$ vorgeht, um eine Lösungsbasis für das homogene System zu finden. Wenn man die hat, gibt es (auch bei variabler Matrix A) ein Verfahren zur Bestimmung einer partikulären Lösung des inhomogenen Systems:

Satz 14 (Variation der Konstanten). Sei $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ eine Lösungsbasis der homogenen Gleichung (12). Mit der WRONSKIMATRIX der \vec{x}_i bilde man das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c'_1 \\ c'_2 \\ \vdots \\ c'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Die (eindeutig bestimmten) Lösungsfunktionen c'_i integriere man. Dann erhält man mit

$$\vec{x}_P(t) = c_1(t)\vec{x}_1(t) + \dots + c_n(t)\vec{x}_n(t)$$

eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung (10).

Beweis. Wir machen den Ansatz $\vec{x}(t) = \vec{x}_P(t) = c_1(t)\vec{x}_1(t) + \dots + c_n(t)\vec{x}_n(t)$ und setzen dies in das Differentialgleichungssystem ein. Zunächst berechnen wir

$$\begin{aligned} \vec{x}'(t) &= c_1(t)\vec{x}'_1(t) + \dots + c_n(t)\vec{x}'_n(t) + c'_1(t)\vec{x}_1(t) + \dots + c'_n(t)\vec{x}_n(t) \\ &= c_1(t)A(t)\vec{x}_1(t) + \dots + c_n(t)A(t)\vec{x}_n(t) + c'_1(t)\vec{x}_1(t) + \dots + c'_n(t)\vec{x}_n(t) \\ &= A(t)(c_1(t)\vec{x}_1(t) + \dots + c_n(t)\vec{x}_n(t)) + c'_1(t)\vec{x}_1(t) + \dots + c'_n(t)\vec{x}_n(t) \\ &= A(t)\vec{x}(t) + c'_1(t)\vec{x}_1(t) + \dots + c'_n(t)\vec{x}_n(t). \end{aligned}$$

Also ist $\vec{x}(t)$ genau dann eine Lösung des inhomogenen Systems (10), wenn

$$c'_1(t)\vec{x}_1(t) + \dots + c'_n(t)\vec{x}_n(t) = \vec{b}(t).$$

In Matrixschreibweise ist das aber gerade (15). □

Beispiel 15. Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 + 3x_2 + 2\cos^2 t \\ x'_2 &= 3x_1 + x_2 + 2\sin^2 t \end{aligned} \quad (16)$$

Lösung des zugehörigen homogenen Systems. Das zugehörige homogene System hat folgende Lösungsbasis

$$\vec{x}_1(t) = \begin{pmatrix} e^{4t} \\ e^{4t} \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Wie wir die gefunden haben, erklären wir später.

Variation der Konstanten. Wir machen den Ansatz $\vec{x}_P(t) = c_1(t)\vec{x}_1(t) + c_2(t)\vec{x}_2(t)$ und lösen

$$\begin{pmatrix} e^{4t} & e^{-2t} \\ e^{4t} & -e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c'_1 \\ c'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos^2 t \\ 2\sin^2 t \end{pmatrix}.$$

Wir finden

$$c'_1(t) = e^{-4t}, \quad c'_2(t) = (\cos^2 t - \sin^2 t)e^{2t} = \cos 2t e^{2t}.$$

Nun müssen wir die $c'_j(t)$ integrieren:

$$c_1(t) = -\frac{1}{4}e^{-4t}, \quad c_2(t) = \frac{1}{4}(\sin 2t + \cos 2t)e^{2t}.$$

Einsetzen in den Ansatz liefert

$$\vec{x}_P(t) = -\frac{1}{4}e^{-4t} \begin{pmatrix} e^{4t} \\ e^{4t} \end{pmatrix} + \frac{1}{4}(\sin 2t + \cos 2t)e^{2t} \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(\sin 2t + \cos 2t - 1) \\ -\frac{1}{4}(\sin 2t + \cos 2t + 1) \end{pmatrix}$$

als eine spezielle Lösung von (16). □

Eine andere „Methode“, um eine partikuläre Lösung zu finden, ist das
ERRATEN EINER LÖSUNG. Wir wollen hier nur folgenden Fall betrachten:

$$\vec{x}' = A\vec{x} - e^{\mu t}\vec{b} \quad (17)$$

mit konstanten A und \vec{b} . Der Parameter μ kann reell oder auch komplex sein, so dass der Fall einer “trigonometrischen“ rechten Seite mit erfasst ist. Wir machen den Ansatz

$$\vec{x}(t) = e^{\mu t}\vec{v} \quad (18)$$

mit einem konstanten Vektor \vec{v} . Einsetzen liefert

$$\mu e^{\mu t}\vec{v} = e^{\mu t}A\vec{v} - e^{\mu t}\vec{b}$$

oder

$$A\vec{v} - \mu\vec{v} = \vec{b}.$$

Das sieht in Komponenten so aus:

$$\begin{array}{rcccc} (a_{11} - \mu)v_1 + & a_{12}v_2 + & \dots + & a_{1n}v_n & = b_1 \\ a_{21}v_1 + & (a_{22} - \mu)v_2 + & \dots + & a_{2n}v_n & = b_2 \\ \dots & & & & \\ a_{n1}v_1 + & a_{n2}v_2 + & \dots + & (a_{nn} - \mu)v_n & = b_n \end{array}$$

Also ist (18) genau dann eine Lösung von (17), wenn \vec{v} dieses lineare Gleichungssystem löst. Beachten Sie aber, dass das Gleichungssystem nicht unbedingt lösbar sein muss; dann führt der obige Ansatz nicht zum Ziel. Das kann passieren, wenn μ ein Eigenwert der Matrix A ist, d.h. wenn das System mit Schwingungen in Eigenfrequenz angeregt wird (*Resonanzfall*).

Beispiel 16. Für eine Gleichung der Form

$$\vec{x}' = A\vec{x} - \cos \omega t \vec{b}$$

mit reellen A und \vec{b} löst man

$$\vec{x}' = A\vec{x} - e^{i\omega t}\vec{b}$$

mit der vorstehenden Methode und nimmt dann den Realteil der Lösung. □

1.5.2 Konstante Koeffizienten: Der Exponentialansatz

In diesem Abschnitt behandeln wir die Eigenwertmethode zur Lösung homogener linearer Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten.

Wir betrachten das homogene lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\&\quad \dots \\x_n' &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n\end{aligned}$$

mit Konstanten a_{ij} . Mit Matrizen und Vektoren schreibt sich das kurz als

$$\vec{x}' = A\vec{x}. \tag{19}$$

Weil bei der Differentialgleichung $x' = ax$ offenbar der Exponentialansatz $x(t) = e^{\lambda t}$ erfolgreich ist, nämlich mit $\lambda = a$ eine Lösung liefert, probieren wir für (19) etwas ähnliches. Weil die Lösungsfunktion $\vec{x}(t)$ vektorwertig sein muss, versuchen wir den Ansatz

$$\vec{x}(t) = e^{\lambda t}\vec{v}. \tag{20}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung zeigt, dass dies genau dann eine Lösung liefert, wenn $\lambda e^{\lambda t}\vec{v} = A(e^{\lambda t}\vec{v})$, d.h. wenn nach Division mit $e^{\lambda t} \neq 0$ gilt

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}.$$

Diese Gleichung für λ und \vec{v} hat natürlich immer die Lösung $\vec{v} = \vec{0}$ und λ beliebig, aber die liefert auch nur die triviale Lösung der homogenen Differentialgleichung. Daran sind wir nicht interessiert. Interessant sind Lösungen mit $\vec{v} \neq 0$, bei denen also λ ein Eigenwert und \vec{v} ein zugehöriger Eigenvektor von A ist. Wie man zu einer gegebenen Matrix die Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmen kann, wissen Sie aus dem Modul *Lineare Algebra für Ingenieure*.

Wir haben also gefunden:

$\vec{x}(t) = e^{\lambda t}\vec{v}$ ist genau dann eine (nicht-triviale) Lösung der Differentialgleichung

$$\vec{x}' = A\vec{x}, \tag{21}$$

wenn λ ein Eigenwert und \vec{v} ein zugehöriger Eigenvektor von A sind.

Beispiel 17. Wir betrachten das homogene lineare Differentialgleichungssystem $\vec{x}' = A\vec{x}$ mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Die charakteristische Gleichung ist

$$\det(A - \lambda E) = 45 + 21\lambda - \lambda^2 - \lambda^3 = 0.$$

Sie hat die Lösungen -3 und 5 , wobei -3 eine doppelte Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist.

Eigenvektoren zum Eigenwert -3 . Wir erhalten das Gleichungssystem

$$(A - (-3)E)\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Man sieht mit bloßem Auge, dass die zweite und dritte Gleichung Vielfache der ersten sind. Es bleibt also nur die Gleichung

$$x + 2y - 3z = 0$$

und wir können zwei Parameter frei wählen: Der Lösungsraum, der sogenannte Eigenraum zum Eigenwert -3 ist zweidimensional.

$$z = 0, y = 1 \implies x = -2$$

$$z = 1, y = 0 \implies x = 3$$

Mit diesen Wahlen erhalten wir zwei linear unabhängige Eigenvektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

zum Eigenwert $\lambda = -3$.

Eigenvektoren zum Eigenwert 5. Wir erhalten das Gleichungssystem

$$(A - 5E)\vec{v} = \begin{pmatrix} -7 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & -6 \\ -1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Mit dem Gaußalgorithmus ergibt sich das äquivalente System

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

mit der Lösung $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ als Eigenvektor zum Eigenwert 5.

Die allgemeine Lösung von $\vec{x}' = A\vec{x}$ ist daher

$$\vec{x}(t) = e^{-3t} \left(c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) + c_3 e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

□

Wie viele unabhängige Lösungen liefert die Eigenwertmethode? Im optimalen Fall hat eine n -reihige Matrix n -verschiedene Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Die zugehörigen Eigenvektoren $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ sind nach einem Satz der linearen Algebra dann linear unabhängig, und der Wronskitest liefert, dass

$$e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1, \dots, e^{\lambda_n t} \vec{v}_n$$

eine Lösungsbasis bilden. Aber es kann folgende Probleme geben:

1. Auch bei reeller Matrix A können komplexe Eigenwerte auftreten. Dann sind die zugehörigen Eigenvektoren auch komplex, und man erhält eben eine komplexe Lösungsbasis. Wenn man aber an einer reellen Lösungsbasis interessiert ist, muss man noch ein wenig arbeiten.

2. Das charakteristische Polynom kann mehrfache Nullstellen haben, und dann sind es eben nicht mehr n verschiedene. Aber zu einer k -fachen Nullstelle, man sagt zu einem *Eigenwert der algebraischen Vielfachheit k* , kann es durchaus k linear unabhängige Eigenvektoren geben. Dann sagt man, die *geometrische Vielfachheit* sei gleich der algebraischen, und alles geht problemlos wie oben, der Eigenwert liefert k linear unabhängige Lösungen.
3. Ein Eigenwert der algebraischen Vielfachheit $k > 1$ kann aber auch nur weniger als k linear unabhängige Eigenvektoren besitzen, die geometrische Vielfachheit kann kleiner sein als die algebraische. Wie findet man dann dazu k unabhängige Lösungen der Differentialgleichung?

Dem ersten und dritten Fall wenden wir uns jetzt zu.

Komplexe Eigenwerte. Sei A eine reelle Matrix. Wenn das charakteristische Polynom komplexe Nullstellen hat, treten diese in komplex-konjugierten Paaren $\lambda = \alpha + i\omega$ und $\bar{\lambda} = \alpha - i\omega$ auf. Auch die entsprechenden Eigenvektoren sind dann konjugiert-komplex.

Für die Lösung der Differentialgleichung kann man von komplex- konjugierten Paaren von Lösungen je eine vergessen, wenn man von der verbleibenden den Real- und Imaginärteil nimmt.

Das ist klar, weil Linearkombinationen von Lösungen wieder Lösungen sind, die Gleichung ist ja homogen(!), und weil für komplexes z

$$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\bar{z}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}z - \frac{1}{2i}\bar{z}.$$

Beispiel 18. Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

hat die charakteristische Gleichung $(1 - \lambda)^2 + 1 = 0$. Sie hat die Lösungen

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm i.$$

Offensichtlich sind

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

zugehörige Eigenvektoren. Das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 - x_2 \\ x_2' &= x_1 + x_2 \end{aligned}$$

hat daher die allgemeine komplexe Lösung

$$\vec{x}(t) = c_1 e^{(1+i)t} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{(1-i)t} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}$$

Die Lösung

$$e^{(1+i)t} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = e^t (\cos t + i \sin t) \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + i e^t \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

liefert die allgemeine reelle Lösung

$$\vec{x}(t) = a_1 e^t \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + a_2 e^t \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R}.$$

komplexe Lösung $e^{(1-i)t} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$ kann man also vergessen. □

Defizite bei den Eigenvektoren. Die Eigenvektoren sind Lösungen der Eigenvektorgleichungen

$$(A - \lambda E)\vec{v} = \vec{0}$$

zu den verschiedenen Eigenwerten λ der n -reihigen Matrix A . Im Idealfall gibt es n linear unabhängige Eigenvektoren. Wenn das aber nicht so ist, gibt es mehrfache Eigenwerte, zum Beispiel einen Eigenwert λ der algebraischen Vielfachheit $k > 1$, zu dem weniger als k linear unabhängige Eigenvektoren existieren. In der linearen Algebra zeigt man, dass es in diesem Fall zu λ immer noch k linear unabhängige *Hauptvektoren* gibt, die gewissermaßen einen Ersatz für die Eigenvektoren bilden. Ein Hauptvektor ist eine nicht-triviale Lösung der Gleichung

$$(A - \lambda E)^k \vec{v} = 0,$$

woraus man sofort ersieht, dass Eigenvektoren auch Hauptvektoren sind, weil ja

$$(A - \lambda E)^k \vec{v} = (A - \lambda E)^{k-1} (A - \lambda E) \vec{v}$$

ist.

Wir beschreiben ein Verfahren zur Gewinnung einer Lösungsbasis des homogenen linearen Differentialgleichungssystems (19), wenn es nicht genügend linear unabhängige Eigenvektoren gibt.

Satz 19 (Hauptvektorlösungen). *Ist λ eine k -fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms von A und \vec{v} eine Lösung von*

$$(A - \lambda E)^k \vec{v} = 0, \tag{22}$$

also ein Hauptvektor, so ist

$$\vec{x}(t) := e^{\lambda t} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{t^j}{j!} (A - \lambda E)^j \vec{v} = e^{\lambda t} \left(\vec{v} + t(A - \lambda E)\vec{v} + \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} (A - \lambda E)^{k-1} \vec{v} \right) \tag{23}$$

eine Lösung von

$$\vec{x}' = A\vec{x}.$$

Es gibt immer k linear unabhängige Lösungen von (22), und solche führen zu linear unabhängigen Lösungen der Differentialgleichung.

Beweis. Der Beweis erfolgt durch einfaches Nachrechnen. Dabei hat man es leichter, wenn man beachtet, dass $(A - \lambda E)^m \vec{v} = 0$ für alle $m \geq k$. Deshalb kann man die Summe in (23) einfach bis ∞ laufen lassen. Wir schreiben

$$\vec{x}_0(t) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} (A - \lambda E)^j \vec{v}.$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} \vec{x}_0'(t) &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} (A - \lambda E)^j \vec{v} = (A - \lambda E) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} (A - \lambda E)^{j-1} \vec{v} \\ &= (A - \lambda E) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} (A - \lambda E)^j \vec{v} = (A - \lambda E) \vec{x}_0(t). \end{aligned}$$

Daher ist

$$\vec{x}'(t) = \frac{d}{dt} e^{\lambda t} \vec{x}_0(t) = \lambda \vec{x}(t) + (A - \lambda E) \vec{x}(t) = A \vec{x}(t).$$

□

So einfach dieser Beweis im Grunde ist, so mysteriös erscheint die Formel (23). Wie ist man darauf gekommen? Dahinter steckt wieder eine ganz einfache Idee, deren technische Umsetzung aber einige Erklärung erfordert. Wir behandeln sie im Anhang 5.1.

Die direkte Anwendung des Satzes mit den Hauptvektoren ist mühsam, denn man muss die Matrixpotenzen bis $(A - \lambda E)^k$ bilden. Einfacher geht es bei **doppelten** Nullstellen, und es lohnt, sich diesen häufiger auftretenden Fall zu merken:

Beispiel 20. Ist λ ein **zweifacher** Eigenwert bei beliebiger Dimension, so berechnet man zunächst einen Eigenvektor \vec{v}_1 . Dazu muss man die Matrix $A - \lambda E$ bilden. Gibt es nun zu λ keinen zweiten linear unabhängigen Eigenvektor, so gibt es einen von \vec{v}_1 linear unabhängigen *Hauptvektor* \vec{v}_2 . Für den gilt

$$0 = (A - \lambda E)^2 \vec{v}_2 = (A - \lambda E)((A - \lambda E)\vec{v}_2).$$

Das heißt, $(A - \lambda E)\vec{v}_2$ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert λ , also von der Form $a\vec{v}_1$. Wir haben daher

$$(A - \lambda E)\left(\frac{1}{a}\vec{v}_2\right) = \vec{v}_1.$$

Weil es auf Vielfache $\neq 0$ bei Eigen- und Hauptvektoren nicht ankommt, können wir den Faktor $1/a$ vergessen.

Fazit: Für einen Eigenvektor \vec{v}_1 zu einer doppelten Nullstelle ist das Gleichungssystem

$$\boxed{(A - \lambda E)\vec{v}_2 = \vec{v}_1}$$

lösbar und liefert uns „den“ fehlenden Hauptvektor zum Eigenwert λ . Die zugehörige Lösung ist dann

$$\boxed{\vec{y}(t) = e^{\lambda t}(\vec{v}_2 + t\vec{v}_1)}.$$

Achtung: Bei dreifachen und höheren Nullstellen kann man ebenfalls versuchen

$$(A - \lambda E)\vec{v}_2 = \vec{v}_1$$

und dann weiter $(A - \lambda E)\vec{v}_3 = \vec{v}_2$ etc. zu lösen. Wenn's klappt hat man Hauptvektoren gefunden, aber es ist in diesem Fall nicht sicher, dass das System lösbar ist! Dann muss man doch auf $(A - \lambda E)^k \vec{v} = \vec{0}$ zurückgreifen. □

Beispiel 21. Wir betrachten

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix hat die Eigenwerte $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = 2$. Die Gleichung

$$(A - 1E)\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

liefert einen linear unabhängigen Eigenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert 1. Daher liefert

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

einen Hauptvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert 1. Das Differentialgleichungssystem

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}$$

hat in diesem Fall eine Lösungsbasis aus

$$\vec{x}_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2(t) = e^t \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

und einer weiteren Lösung $\vec{x}_3(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert 2. Die allgemeine Lösung ist

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^t + c_2 t e^t \\ c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 e^{2t} \\ -c_2 e^t + c_3 e^{2t} \end{pmatrix}$$

□

1.6 Lineare Differentialgleichungen n -ter Ordnung

- Skalare lineare Differentialgleichungen n -ter Ordnung kann man durch Einführen von Hilfsvariablen äquivalent umschreiben als ein lineares System 1. Ordnung.
- Dann überträgt sich die Lösungstheorie von den Systemen auf den skalaren Fall.
- Für die konkrete Lösung skalarer Gleichungen kann man diese aber auch - und einfacher - direkt behandeln.

Wir betrachten nun gewöhnliche lineare Differentialgleichungen n -ter Ordnung für reell- oder komplexwertige Funktionen. Im Gegensatz zu den Differentialgleichungssystemen spricht man auch von *skalaren* Differentialgleichungen.

Die allgemeine Form ist diese:

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_n(t)x = b(t) \quad (24)$$

mit stetigen reell- oder komplexwertigen Funktionen $a_k(t)$ und $b(t)$ auf einem Intervall I . Ist $b = 0$, so nennt man die Gleichung *homogen*, andernfalls *inhomogen*.

Beispiel 22. Ein Beispiel liefert die Bewegungsgleichung für ein Federpendel der Masse m mit Federkonstante k und Reibungskoeffizient a :

$$mx'' + ax' + kx = 0, \quad (25)$$

die nach Normierung mit $\frac{1}{m}$ in die vorstehende Form übergeht.

Wenn man in diesem Beispiel die Geschwindigkeit mit $v = x'$ bezeichnet, ist die Gleichung äquivalent zu einem linearen System, nämlich

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= -\frac{b}{m}x - \frac{a}{m}v \end{aligned}$$

oder

$$\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{b}{m} & -\frac{a}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Jede Lösung $\begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ dieses Systems liefert durch "Vergessen" der zweiten Komponente eine Lösung von (25). Umgekehrt liefert jede Lösung $x(t)$ von (25) zusammen mit ihrer Ableitung eine Lösung $\begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$ von (26). \square

SKALARE GLEICHUNGEN UND SYSTEME. Allgemein ist

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = b(t) \quad (27)$$

nach Einführung von "Hilfsfunktionen" $x_1(t) := x(t), x_2(t) := x'(t), \dots, x_n(t) := x^{(n-1)}(t)$ äquivalent zu

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & -a_{n-2}(t) & \dots & -a_1(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Als Konsequenz ist die Theorie der skalaren Differentialgleichungen n -ter Ordnung ein Spezialfall der Systeme 1. Ordnung, und beide Theorien stimmen weitgehend überein. Der nächste Abschnitt ist deshalb einfach eine mehr oder weniger wörtliche Übersetzung des entsprechenden Abschnitts über Systeme.

1.6.1 Struktur des Lösungsraumes

Satz 23 (Existenz und Eindeigkeitssatz). Gegeben sei Gleichung

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_n(t)x = b(t) \quad (29)$$

mit stetigen reell- oder komplexwertigen Funktionen $a_k(t)$ und $b(t)$ auf einem Intervall I . Sei $t_0 \in I$ und seien Anfangswerte

$$x(t_0) = \eta_0, x'(t_0) = \eta_1, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = \eta_{n-1}$$

vorgegeben. Dann gibt es genau eine Lösung $x(t)$ von (29) mit diesen Anfangswerten.

Weil alle Lösungen auf demselben Intervall definiert sind, kann man auch über Linearkombinationen von Lösungen reden, und es gilt:

Satz 24 (Lösungsraum der homogenen Gleichung). Der Lösungsraum der homogenen Gleichung

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_n(t)x = 0 \quad (30)$$

ist ein Vektorraum der Dimension n . Das heißt:

- Linearkombinationen von Lösungen sind wieder Lösungen: Es gilt das Superpositionsprinzip.
- Es gibt n linear unabhängige Lösungen.
- Sind die Lösungen $x_1(t), \dots, x_n(t)$ linear unabhängig, so ist jede andere Lösung eine Linearkombination von diesen:

$$x(t) = c_1x_1(t) + \dots + c_nx_n(t) \quad (31)$$

Man nennt $x_1(t), \dots, x_n(t)$ eine Lösungsbasis oder ein Fundamentalsystem von Lösungen und (31) „die allgemeine Lösung von (30)“.

LINEARE UNABHÄNGIGKEIT: WRONSKITEST. Wir betrachten Lösungen

$$x_1(t), \dots, x_n(t)$$

von (30) und wollen wissen, ob sie linear unabhängig sind. Wir erinnern uns an die Umschreibung der Differentialgleichung als System und bilden die Matrix

$$W = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \dots & x_n(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \dots & x_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t) & x_2^{(n-1)}(t) & \dots & x_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

Die Lösungen sind genau dann linear unabhängig, wenn diese Matrix an einer (und dann an jeder) Stelle x den Rang n , also eine Determinante $\neq 0$ hat.

Satz 25 (Lösungsraum des inhomogenen Systems). Sei $x_P(t)$ eine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_n(t)x = b(t) \quad (32)$$

Man nennt das auch eine partikuläre oder spezielle Lösung von (32). Dann findet man alle Lösungen von (32), indem man zu x_P alle Lösungen $x_H(t)$ der zugehörigen homogenen Gleichung (30) addiert. Man sagt,

$$x(t) = x_P(t) + x_H(t)$$

ist die allgemeine Lösung von (14), wenn \vec{x}_H die allgemeine Lösung von (12) ist. Ist $x_1(t), \dots, x_n(t)$ eine Lösungsbasis für die homogene Gleichung, so ist also die Menge der Lösungen der inhomogenen Gleichung gegeben durch

$$x(t) = x_P(t) + c_1x_1(t) + \dots + c_nx_n(t)$$

mit beliebigen Konstanten c_1, \dots, c_n .

Damit ist die Struktur des Lösungsraumes linearer Differentialgleichungen n -ter Ordnung geklärt. Bleibt die Frage, wie man Lösungen von (32) finden kann. Wir erklären im nächsten Abschnitt, wie man bei konstanten Koeffizienten und $b(t) = 0$ vorgeht, um eine Lösungsbasis für die homogene Gleichung zu finden. Wenn man die hat, gibt es (auch bei variablen a_i) ein Verfahren zur Bestimmung einer partikulären Lösung des inhomogenen Systems:

Satz 26 (Variation der Konstanten). Sei $x_1(t), \dots, x_n(t)$ eine Lösungsbasis der homogenen Gleichung (30). Mit der WRONSKIMATRIX der x_i bilde man das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ x_1' & \dots & x_n' \\ \vdots & \dots & \vdots \\ x_1^{(n-1)} & \dots & x_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \\ \vdots \\ c_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b(t) \end{pmatrix}. \quad (33)$$

Die (eindeutig bestimmten) Lösungsfunktionen c_i' integriere man. Dann erhält man mit

$$x_P(t) = c_1(t)x_1(t) + \dots + c_n(t)x_n(t)$$

eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung (32).

Beispiel 27. Wir betrachten

$$x'' + x = \tan t. \quad (34)$$

Offenbar sind $x_1(t) = \cos t$ und $x_2(t) = \sin t$ Lösungen der zugehörigen homogenen Gleichung. Die WRONSKIMATRIX ist

$$\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

mit Determinante = 1, also haben wir eine Lösungsbasis. Das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tan t \end{pmatrix}$$

hat die Lösungen

$$c_1' = -\sin t \tan t, \quad c_2' = \sin t.$$

Nach Integration findet man

$$c_1 = \sin t - \ln \frac{\cos(t/2) + \sin(t/2)}{\cos(t/2) - \sin(t/2)}, \quad c_2 = -\cos t.$$

und damit die partikuläre Lösung

$$\begin{aligned} y_P(t) &= \sin t \cos t - \cos t \ln \frac{\cos(t/2) + \sin(t/2)}{\cos(t/2) - \sin(t/2)} - \cos t \sin t \\ &= -\cos t \ln \frac{\cos(t/2) + \sin(t/2)}{\cos(t/2) - \sin(t/2)}. \end{aligned}$$

Das hätte man nicht so einfach geraten. Die allgemeine Lösung der Gleichung (34) ist

$$y(t) = -\cos t \ln \frac{1 + \sin t}{\cos t} + c_1 \cos t + c_2 \sin t.$$

□

ANSATZ VOM TYP DER RECHTEN SEITE. Natürlich kann man versuchen, eine partikuläre Lösung von

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_n(t)x = b(t)$$

zu raten. Bei einfacher rechter Seite mag das gelingen. Weiter kommt man mit der Überlegung, dass die linke Seite für $x(t) = q(t)e^{\mu t}$ mit einem Polynom $q(t)$ wieder einen Ausdruck derselben Form $p(t)e^{\mu t}$ mit einem anderen Polynom ist. Ist also $b(t) = p(t)e^{\mu t}$ von dieser Form, so kann man den Ansatz $y(t) = q(t)e^{\mu t}$ mit einem allgemeinen Polynom $q(t)$ machen und versuchen, dessen Koeffizienten durch Koeffizientenvergleich entsprechend zu bestimmen.

Welchen Ansatz würden Sie versuchen, wenn $b(t) = \cos x$?

1.6.2 Konstante Koeffizienten: Der Exponentialansatz

Wir betrachten nun das Problem, Lösungen der homogenen Gleichung n -ter Ordnung zu finden:

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = 0. \quad (35)$$

Wenn die Koeffizienten a_i konstant sind, und nur diesen Fall wollen wir jetzt betrachten, liefert die Umschreibung in ein System 1. Ordnung

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}, \quad (36)$$

kurz

$$\vec{x}' = A\vec{x},$$

eine konstante Systemmatrix A , und wir wissen schon, wie die Lösungen dann aussehen: Man erhält Lösungsbasisfunktionen der Form $x(t) = e^{\lambda t}$, "schlimmstenfalls" zusätzlich noch solche der Form $x(t) = t^k e^{\lambda t}$, wenn nämlich beim System Hauptvektorklösungen erforderlich werden. Dabei sind die λ die Eigenwerte der Systemmatrix. Es ist nicht so einladend, das charakteristische Polynom einer Matrix der Form aus (36) zu bestimmen. Aber wenn man in (35) den Ansatz

$$x(t) = e^{\lambda t}$$

einsetzt, findet man sofort, dass genau die Lösungen der Gleichung

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (37)$$

auch Lösungen der Differentialgleichung liefern, und tatsächlich ist dies (bis auf ein mögliches Vorzeichen der linken Seite) die charakteristische Gleichung auch der Matrix A .

Hat diese n verschieden Lösungen, so erhält man eine Lösungsbasis, möglicherweise allerdings mit komplexen Funktionen

$$e^{(\alpha+i\omega)t} = e^{\alpha t}(\cos \omega t + i \sin \omega t),$$

die man wieder in Real- und Imaginärteil zerlegen kann, um eine reelle Lösungsbasis zu gewinnen.

Beispiel 28. Betrachte

$$x'' + 6x' + 10x = 0.$$

Die charakteristische Gleichung $\lambda^2 + 6\lambda + 10 = 0$ hat dann die Lösungen

$$\lambda_1 = -3 + i, \lambda_2 = -3 - i,$$

und die liefern die allgemeine Lösung

$$x(t) = c_1 e^{(-3+i)t} + c_2 e^{(-3-i)t}. \quad (38)$$

Die allgemeine reelle Lösung erhält man aus $e^{(-3+i)t} = e^{-3t}(\cos t + i \sin t)$ durch Zerlegen. Sie ist

$$x(t) = c_1 e^{-3t} \cos t + c_2 e^{-3t} \sin t.$$

□

MEHRFACHE NULLSTELLEN DES CHARAKTERISTISCHEN POLYNOMS. Bei Matrizen der Form (36) kann die Situation mehrfacher Eigenwerte mit mehreren linear unabhängigen Eigenvektoren nicht auftreten, man ist immer in der Hauptvektor-Situation, die im skalaren Fall aber sehr einfach ist:

Eine k -fache Nullstelle λ der charakteristischen Gleichung (37) liefert linear unabhängige Lösungsbasisfunktionen

$$e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \dots, t^{k-1}e^{\lambda t}.$$

Für ein parameterabhängiges charakteristisches Polynom erklären wir im Anhang 5.2, wie im Grenzwert die $te^{\lambda t}$ -Lösungen entstehen.

Beispiel 29. Betrachte

$$x'' + 6x' + 9x = 0.$$

Die charakteristische Gleichung $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$ hat dann die Lösungen

$$\lambda_1 = -3 = \lambda_2.$$

Die liefern für die Differentialgleichung die allgemeine Lösung

$$x(t) = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t}. \tag{39}$$

□

2 Integraltransformationen

Integraltransformationen machen aus einer Funktion $f(t)$ eine neue Funktion $F(s)$ auf die folgende Weise:

$$F(s) = \int_a^b f(t)K(s,t)dt.$$

Dabei ist $K(s,t)$ eine feste, von $f(t)$ unabhängige Funktion, die sogenannte *Kernfunktion*.

Das Interesse an solchen Transformationen hat mehrere Gründe, von denen wir zwei hier ansprechen wollen.

- Sei $f(t)$ die gesuchte Lösung einer Differentialgleichung. Kann man diese Differentialgleichung durch eine einfachere zu lösende Gleichung für $F(s)$ ersetzen, und beherrscht man die Transformation

$$f(t) \leftrightarrow F(s),$$

so hat man ein Hilfsmittel für die Lösung von Differentialgleichungen gefunden. Insbesondere kann man bei partiellen linearen Differentialgleichungen die Zahl der „differentialen“ Variablen reduzieren.

Zum Beispiel wird in der Netzwerktheorie oder der Regelungstheorie die Wirkung von Systemkomponenten durch Systeme von Differentialgleichungen beschrieben. Die sogenannte Laplacetransformation macht daraus *algebraische* Gleichungen. Oft formuliert man die ganze Theorie sogar im laplacetransformierten Bereich, muss nicht mehr transformieren und die Wirkung der Systemkomponenten wird durch algebraische Gleichungen beschrieben.

- In der Fourieranalyse werden Schwingungen $f(t)$ der Periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$ zerlegt in eine harmonische Schwingung $e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$ und deren Oberschwingungen $e^{ik\omega t}$ mit $k \in \mathbb{Z}$:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t}.$$

Die Amplituden der beteiligten Schwingungen, die sogenannten *Fourierkoeffizienten* c_k , berechnen sich dabei als

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)e^{-ik\omega t} dt = \int_0^T f(t) \underbrace{\frac{1}{T} e^{-ik\omega t} dt}_{=: K(k\omega, t)} dt =: F(k\omega).$$

Will man *aperiodische* Funktionen auf diese Weise „fourier-analysieren“, so treten nicht die diskreten Frequenzen $k\omega$ (zu welchem ω denn??) auf, sondern ein kontinuierliches Frequenzspektrum $-\infty < \omega < \infty$:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt.$$

$F(\omega)$ liefert die Intensität, mit der die Frequenz $\omega \in \mathbb{R}$ an der Funktion $f(t)$ beteiligt ist, und die Rücktransformation auf f sieht fast so aus wie die Hintransformation:

$$f(t) = \text{const.} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t} d\omega.$$

Vieles aus diesem Kapitel finden Sie wieder in der Netzwerktheorie, Nachrichtentechnik oder Regelungstechnik, vergleichen Sie [*Einführung in die Netzwerktheorie*], [*Signale und Systeme*], [*Regelungstechnik I*] oder [*Regelung in der Luft- und Raumfahrt*].

2.1 Die Laplacetransformation

2.1.1 Definition und grundlegende Eigenschaften

- Wir definieren die Laplacetransformation und zeigen ihre wichtigsten Eigenschaften.
- Wir definieren auch eine Klasse von Funktionen, die Funktionen von exponentieller Ordnung, für die das uneigentliche Integral der Laplacetransformation immer existiert.
- Der Ableitungssatz erklärt, warum die Laplacetransformation beim Lösen linearer Differentialgleichungen helfen kann.

Definition 30. Für eine Funktion $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{C}$ definiert man die *Laplacetransformation* folgendermaßen: Für $s \in \mathbb{C}$ sei

$$\mathcal{L}[f](s) := \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt,$$

falls das Integral existiert, d.h. falls

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_0^{\beta} f(t)e^{-st} dt$$

existiert.

Notation: Häufig schreibt man einfacher $F(s)$ statt $\mathcal{L}[f](s)$. Die komplexe Variable s wird auch mit p oder z bezeichnet.

Eine einfache Konsequenz der Definition ist der

Satz 31 (Linearität). Die Laplacetransformation ist linear:

Existieren $\mathcal{L}[f]$ und $\mathcal{L}[g]$, so existieren auch $\mathcal{L}[f + g]$ und $\mathcal{L}[af]$ für beliebiges $a \in \mathbb{C}$ und es gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f + g] &= \mathcal{L}[f] + \mathcal{L}[g], \\ \mathcal{L}[af] &= a\mathcal{L}[f].\end{aligned}$$

Matrixwertige Funktionen. Für vektor- oder matrixwertige Funktionen definiert man die Laplacetransformation einfach komponentenweise.

Wir berechnen nun die Laplacetransformation einiger Funktionen.

Satz 32 (Laplacetransformierte). Es gilt für $a \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{L}[e^{at}](s) = \frac{1}{s - a} \quad \text{Re } s > \text{Re } a \quad (40)$$

$$\mathcal{L}[\sin at](s) = \frac{a}{s^2 + a^2} \quad \text{Re } s > |\text{Im } a| \quad (41)$$

$$\mathcal{L}[\cos at](s) = \frac{s}{s^2 + a^2} \quad \text{Re } s > |\text{Im } a| \quad (42)$$

$$\mathcal{L}[1](s) = \frac{1}{s} \quad \text{Re } s > 0 \quad (43)$$

$$\mathcal{L}[t^n](s) = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad \text{Re } s > 0 \quad (44)$$

Beweis. Zu (40).

$$\begin{aligned}\int_0^\beta e^{at} e^{-st} dt &= \frac{1}{a-s} e^{(a-s)t} \Big|_0^\beta \\ &= \frac{1}{a-s} \left(e^{(\operatorname{Re} a - \operatorname{Re} s)\beta} e^{i(\operatorname{Im} a - \operatorname{Im} s)\beta} - 1 \right)\end{aligned}$$

Falls $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} a$, geht für $\beta \rightarrow +\infty$ das Glied mit den Exponentialtermen gegen null, also

$$\int_0^{+\infty} e^{at} e^{-st} dt = \frac{1}{a-s} (0 - 1) = \frac{1}{s-a}.$$

Zu (41). Aus (40) und der Linearität von \mathcal{L} folgt

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\sin(at)](s) &= \mathcal{L}\left[\frac{1}{2i}(e^{iat} - e^{-iat})\right](s) \\ &= \frac{1}{2i} (\mathcal{L}[e^{iat}](s) - \mathcal{L}[e^{-iat}](s)) \\ &= \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{s-ia} - \frac{1}{s+ia} \right) \\ &= \frac{1}{2i} \frac{2ia}{s^2 + a^2} \\ &= \frac{a}{s^2 + a^2}.\end{aligned}$$

Zu (42). Analog.

Zu (43). Folgt aus (42) mit $a = 0$.

Zu (44). Mit vollständiger Induktion. Den Fall $t^0 = 1$ haben wir gerade erledigt. Zum Induktionsschritt beachte, dass mit partieller Integration für $n > 0$

$$\begin{aligned}\int_0^\beta t^n e^{-st} dt &= \left[t^n \frac{-e^{-st}}{s} \right]_0^\beta + \frac{n}{s} \int_0^\beta t^{n-1} e^{-st} dt \\ &= \frac{-\beta^n}{s e^{s\beta}} + \frac{n}{s} \int_0^\beta t^{n-1} e^{-st} dt.\end{aligned}$$

Für $\beta \rightarrow \infty$ geht der erste Summand gegen 0, der zweite gegen $\frac{n}{s} \mathcal{L}[t^{n-1}](s)$, also ist

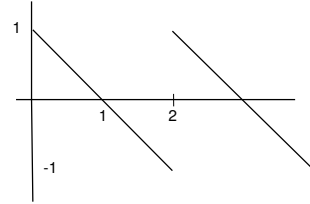
$$\mathcal{L}[t^n](s) = \frac{n}{s} \mathcal{L}[t^{n-1}](s).$$

Das vollendet den Induktionsschritt. □

Existenz: Funktionen von exponentieller Ordnung Jetzt wollen wir auf die Frage nach der Existenz der Laplacetransformierten eine einfache Antwort geben. Dazu müssen wir zwei Dinge sicherstellen:

1.

Für alle $\beta > 0$ muss $\int_0^\beta f(t)e^{-zt} dt$ existieren. Das ist der Fall, wenn $f(t)$ auf jedem endlichen Intervall beschränkt und stückweise stetig ist. Beispiele liefern natürlich die stetigen Funktionen $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, aber auch die nebenstehende „Sägezahnfunktionen“.



2. Der Grenzwert

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_0^\beta f(t)e^{-st} dt$$

muss existieren, und das heißt, der Integrand muss ausreichend schnell gegen 0 gehen. Nun ist mit $s = x + iy$

$$|f(t)e^{-st}| = |f(t)| \cdot |e^{-xt}| \cdot \underbrace{|e^{-ity}|}_{=1}.$$

Je größer x ist, um so schneller fällt e^{-xt} und um so mehr Wachstum kann sich $f(t)$ „erlauben“. Aber natürlich darf $f(t)$ nicht schneller wachsen, als es die Exponentialfunktion kompensieren kann. Das führt zu folgender

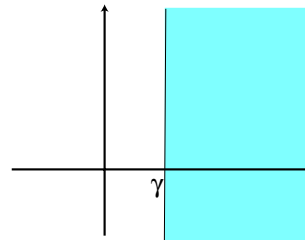
Definition 33. Sei $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

- (i) $f(t)$ heißt *stückweise stetig*, wenn es in jedem *beschränkten* Intervall nur *endlich viele* Unstetigkeitsstellen hat, und wenn an jeder Unstetigkeitsstelle t der linksseitige Grenzwert $f(t-)$ und der rechtsseitige Grenzwert $f(t+)$ existieren.
- (ii) $f(t)$ heißt *von exponentieller Ordnung*, wenn es Konstanten C und γ gibt, so dass für alle $t \geq 0$

$$|f(t)| \leq Ce^{\gamma t}.$$

Beispiel 34. Die Funktionen t^n , e^{at} oder $t^n e^{at}$ für komplexes a sind von exponentieller Ordnung. Damit sind alle Lösungen homogener linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten von exponentieller Ordnung. Die Funktion $f(t) = e^{(t^2)}$ ist nicht von exponentieller Ordnung, aber es ist kaum denkbar, dass Sie ernsthaft mit ihr zu tun bekommen. \square

Unter den jetzt diskutierten Voraussetzungen existiert die Laplacetransformation vielleicht nicht für alle Werte von s , aber doch für alle Werte mit hinreichend großem Realteil, also rechts von einer Geraden $x = \gamma$ in der komplexen Ebene:



Satz 35 (Funktionen von exponentieller Ordnung). Sei $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{C}$ von exponentieller Ordnung und stückweise stetig. Dann gibt es ein $\gamma \in \mathbb{R}$, so dass $\mathcal{L}[f](s)$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > \gamma$ existiert.

Weiter gilt für reelles x

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \mathcal{L}[f](x) = 0. \quad (45)$$

Beweis. Die Existenz der eigentlichen (endlichen) Integrale ist nach den gemachten Voraussetzungen klar. Seien nun C und γ wie in der Definition und sei $s = x + iy$ mit $x > \gamma$. Seien weiter $0 \leq \alpha < \beta$. Dann ist

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(t)e^{-st} dt \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f(t)|e^{-xt} dt \leq \int_{\alpha}^{\beta} Ce^{(\gamma-x)t} dt = \frac{C}{\gamma-x} e^{(\gamma-x)t} \Big|_{\alpha}^{\beta} \leq \frac{C}{x-\gamma} e^{-\alpha(x-\gamma)}.$$

Bei festem s mit $\operatorname{Re} s = x > \gamma$ wird also der Beitrag der Teilintegrale $\int_{\alpha}^{\beta} \dots$ beliebig klein, wenn wir α groß genug wählen. Daher existiert das uneigentliche Integral bis $+\infty$; und mit $\alpha = 0$ findet man

$$\left| \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \right| \leq \frac{C}{x-\gamma} \rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow \infty.$$

□

Generalvoraussetzung. Einstweilen setzen wir voraus, dass alle betrachteten Funktionen von exponentieller Ordnung und stückweise stetig sind. Die Gleichungen für die Laplacetransformierten gelten für hinreichend großen Realteil von s , ohne dass wir das immer wieder anmerken.

Wenn f von exponentieller Ordnung ist, erhält man für $t \geq 0$

$$|tf(t)| \leq tCe^{\gamma t} \leq e^t Ce^{\gamma t} = Ce^{(\gamma+1)t}.$$

Das ist die erste Behauptung vom

Satz 36 (Multiplikationssatz). Ist $f(t)$ von exponentieller Ordnung, so auch $tf(t)$, und es gilt

$$\mathcal{L}[tf(t)](s) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[f](s).$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[tf(t)](s) &= \int_0^{\infty} f(t)te^{-st} dt = -\int_0^{\infty} f(t)\frac{\partial}{\partial s}e^{-st} dt \\ &= \frac{d}{ds} \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[f](s). \end{aligned}$$

Der vorletzte Schritt, das Herausziehen der s -Ableitung aus dem Integral, bedarf einer mathematischen Rechtfertigung, auf die wir aber nicht eingehen. □

Wir kommen nun zur Schlüssel-Eigenschaft der Laplacetransformation in Bezug auf Differentialgleichungen. Die Ableitung von f nach der Zeit bezeichnen wir dabei mit f' statt mit \dot{f} , weil das bei den höheren Ableitungen bequemer zu notieren ist.

Satz 37 (Ableitungssatz). Sei $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$.

(i) Ist f stetig differenzierbar und f' von exponentieller Ordnung, so auch f und es gilt

$$\mathcal{L}[f'] = s\mathcal{L}[f](s) - f(0).$$

(ii) Ist f n -mal differenzierbar und $f^{(n)}$ von exponentieller Ordnung, so auch f und es gilt

$$\mathcal{L}[f^{(n)}](s) = s^n \mathcal{L}[f](s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0).$$

Bis auf die additive Konstante $-f(0)$ entspricht der *Differentiation* von f also die *Multiplikation* von $F(s) = \mathcal{L}[f](s)$ mit s . Differentialgleichungen werden damit zu algebraischen Gleichungen.

Beweis. Zu (i). Ist $|f'(t)| \leq Ce^{\gamma t}$, so folgt

$$|f(t)| = \left| \int_0^t f'(\tau) d\tau \right| \leq \int_0^t Ce^{\gamma \tau} d\tau = \frac{C}{\gamma} (e^{\gamma t} - 1) \leq \frac{C}{\gamma} e^{\gamma t}.$$

Also ist auch f von exponentieller Ordnung. Weiter ist

$$\begin{aligned} \int_0^\beta f'(t) e^{-st} dt &= f(t) e^{-st} \Big|_0^\beta - \int_0^\beta f(t) (-s) e^{-st} dt \\ &= f(t) e^{-st} \Big|_0^\beta + s \int_0^\beta f(t) e^{-st} dt. \end{aligned}$$

Weil f und f' von exponentieller Ordnung sind, folgt

$$\mathcal{L}[f'](s) = 0 - f(0) + s \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt = s\mathcal{L}[f](s) - f(0).$$

Zu (ii). Folgt aus (i) durch vollständige Induktion. □

Satz 38 (Dämpfungssatz). Für komplexes a gilt

$$\mathcal{L}[e^{at} f](s) = \mathcal{L}[f](s - a).$$

Beweis.

$$\mathcal{L}[e^{at} f](s) = \int_0^\infty e^{at} f(t) e^{-st} dt = \int_0^\infty f(t) e^{-(s-a)t} dt = \mathcal{L}[f](s - a).$$

□

Wir schließen mit einem Satz über Grenzwerte der Laplacetransformierten. Insbesondere findet die „Endwertformel“ Anwendung in der Regelungstechnik bei der Berechnung der bleibenden Regelabweichung, vgl. [Regelungstechnik I, Abschnitt 4.5].

Satz 39 (Anfangs- und Endwerte).

(i) Für reelles x gilt

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x\mathcal{L}[f](x) = \lim_{t \searrow 0} f(t).$$

(ii) Existiert der Grenzwert $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$, so ist für reelles x

$$\lim_{x \searrow 0} x\mathcal{L}[f](x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t).$$

Um das zu sehen, beachten Sie, dass für positives x nach der Substitutionsregel gilt

$$x\mathcal{L}[f](x) = \int_0^\infty f(t)xe^{-xt} dt = \int_0^\infty f\left(\frac{\tau}{x}\right)e^{-\tau} d\tau.$$

Nun ist

$$\int_0^\infty e^{-\tau} d\tau = 1.$$

Also genügt der Nachweis, dass

$$\lim_x \int_0^\infty f\left(\frac{\tau}{x}\right)e^{-\tau} d\tau = \int_0^\infty \lim_x f\left(\frac{\tau}{x}\right)e^{-\tau} d\tau$$

für $x \searrow 0$ bzw. $x \rightarrow +\infty$.

Man kann einen Limes nicht immer in das Integral ziehen. Unter den hier für f gemachten Voraussetzungen (stückweise stetig und von exponentieller Ordnung) ist das aber möglich, wie aus einem tieferen Satz der Mathematik (dem Konvergenzsatz von Lebesgue) folgt.

2.1.2 Anwendungen der Laplacetransformation I

- Wir behandeln Anwendungen der Laplacetransformation auf auf verschiedene Differentialgleichungsprobleme.

Das wichtigste Anwendungsgebiet der Laplacetransformation sind

LINEARE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN.

Beispiel 40. Löse das Anfangswertproblem

$$y'' - 6y' + 9y = t, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

Wir wenden auf die Differentialgleichung die Laplacetransformation an. Dabei benutzen wir die Linearität und den Ableitungssatz. Wir schreiben zur Vereinfachung

$$Y := \mathcal{L}[y(t)](s)$$

und erhalten

$$s^2 Y - sy(0) - y'(0) - 6(sY - y(0)) + 9Y = \frac{1}{s^2}.$$

Einsetzen der Anfangswerte und Auflösen nach Y liefert

$$Y = \frac{1}{s^2(s-3)^2} + \frac{1}{(s-3)^2}.$$

Partialbruchzerlegung des ersten Terms der rechten Seite mit dem Ansatz

$$\frac{1}{s^2(s-3)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s-3} + \frac{D}{(s-3)^2}$$

liefert

$$Y = \frac{2/27}{s} + \frac{1/9}{s^2} + \frac{-2/27}{s-3} + \frac{1/9}{(s-3)^2} + \frac{1}{(s-3)^2}.$$

Die Rücktransformation ergibt

$$y = \frac{2}{27} + \frac{1}{9}t - \frac{2}{27}e^{3t} + \frac{1}{9}te^{3t} + te^{3t} = \frac{2}{27} + \frac{1}{9}t + \left(-\frac{2}{27} + \frac{10}{9}t\right)e^{3t}.$$

□

Natürlich kann man das vorstehende Problem auch mit Exponentialansatz und Ansatz vom Typ der rechten Seite lösen. Einen Vergleich beider Methoden (bei komplizierterer rechter Seite) finden Sie im Anhang. Er ergibt einen kleinen Vorteil für die Laplacetransformation, aber Computer schaffen das natürlich noch einfacher:

$$\text{DSolve}[\{y''[t]-6y'[t]+9y[t]==t,y[0]==0,y'[0]==1\},y[t],t] \\ \{\{y(t) \rightarrow \left(\left(\frac{1}{9} + \frac{10e^{3t}}{9}\right)t - \frac{2e^{3t}}{27} + \frac{2}{27}\right)\}\}$$

Daraus ersehen wir, dass die Bedeutung der Laplacetransformation heute sicher nicht mehr in der Lösungspraxis für lineare Differentialgleichungen wie die obige liegt. Wenigstens zwei Gründe lassen sie trotzdem sehr nützlich erscheinen:

- Die zu Beginn aus der Netzwerktheorie geschilderte Modellbildung im s -Bereich. Dadurch verschwinden die Differentialgleichungen überhaupt, man braucht nicht mehr hin- und erst recht nicht rückzutransformieren, es bleiben nur algebraische Gleichungen.

- Zum anderen ist die Laplacetransformation ideal für die Behandlung von linearen Differentialgleichungen mit *unstetiger* rechter Seite (Impuls). Wir kommen darauf zurück.

Zuvor müssen wir allerdings noch einen Punkt aus der Lösung der Beispielaufgabe klären, nämlich die Frage nach der „Rücktransformation“. Wir haben Y berechnet und dann eine Funktion y angegeben, für die $\mathcal{L}[y] = Y$ ist. Dabei haben wir unterstellt, dass es nur *eine* solche Funktion y gibt, dass also die Laplacetransformation injektiv ist. Zum Glück ist das so:

Satz 41 (Eindeutigkeitssatz von Lerch). *Wenn f und g unsere Generalvoraussetzung erfüllen und wenn*

$$\mathcal{L}[f](s) = \mathcal{L}[g](s)$$

für alle s mit hinreichend großem Realteil gilt, dann ist

$$f(t) = g(t)$$

in allen Punkten t , in denen beide Funktionen stetig sind.

Auf den Beweis verzichten wir hier (vgl. Ende des Abschnittes 2.2.2), die Bedeutung des Satzes sollte jedenfalls deutlich geworden sein.

Bemerkung zur Rücktransformation rationaler Funktionen. Beim Beispiel 40 war das Hauptproblem die Rücktransformation einer gebrochen-rationalen Funktion $F(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$ mit Polynomen $p(s)$ und $q(s)$. Das ist in diesem Zusammenhang ein typisches Problem. Aus $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 0$, vgl. Satz 35, folgt, dass der Zählergrad kleiner ist als der Nennergrad, und daher ist $F(s)$ nach Partialbruchzerlegung eine Summe von Termen der Form

$$\frac{a}{(s - s_j)^l}.$$

Dabei sind die s_j die Nullstellen von $q(s)$, und wenn n_j die Ordnung von s_j bezeichnet, ist $1 \leq l \leq n_j$. Vergleichen Sie dazu den Anhang 5.3. Wegen

$$\mathcal{L} \left[\frac{a}{(l-1)!} e^{s_j t} t^{l-1} \right] = \frac{a}{(s - s_j)^l}$$

ist damit das Problem der Rücktransformation von gebrochen-rationalen Funktionen erledigt, sobald man die Partialbruchzerlegung hat. Schon die Nullstellen des Nenners allein geben wichtige qualitative Information: Wegen $e^{s_j t} = e^{x_j t} (\cos y_j t + i \sin y_j t)$ bestimmen der Realteil x_j das Stabilitäts- und der Imaginärteil y_j das Frequenzverhalten der Lösung.

Anwendung auf lineare Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten. Bei solchen Systemen kann man die Laplacetransformation natürlich auf jede einzelne Zeile anwenden. Die Notation vereinfacht sich, wenn man \mathcal{L} auch für **vektorwertige Funktionen** definiert durch

$$\mathcal{L} \left[\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \right] := \begin{pmatrix} \mathcal{L}[f_1] \\ \vdots \\ \mathcal{L}[f_n] \end{pmatrix}. \quad (46)$$

Insbesondere hat man dann wieder

$$\mathcal{L}[\vec{f}'(t)](s) = s\mathcal{L}[\vec{f}(t)](s) - \vec{f}(0).$$

ANWENDUNG AUF PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN. Natürlich kann man die Laplacetransformation auch auf lineare *partielle* Differentialgleichungen anwenden, indem man sie auf eine der Variablen beschränkt.

Beispiel 42. Löse das Rand-Anfangswertproblem

$$u_t + x u_x = xt, \quad u(x, 0) = 0 = u(0, t).$$

Wir bezeichnen die Laplacetransformierte von u bezüglich t mit

$$U(x, s) := \int_0^{+\infty} u(x, t) e^{-st} dt.$$

Dann erhalten wir

$$sU(x, s) - \underbrace{u(x, 0)}_{=0} + xU_x(x, s) = \frac{x}{s^2}.$$

Wir betrachten dies für festes s als Differentialgleichung in x . Die Bedingung $u(0, t) = 0$ liefert die Anfangsbedingung $U(0, s) = 0$. Wir machen deshalb nach kurzem Nachdenken den Ansatz

$$U(x, s) = Cx$$

mit von s abhängiger Konstante C . Einsetzen liefert

$$(sC + C)x = \frac{x}{s^2},$$

also $C = \frac{1}{s^2(s+1)}$. Damit erhalten wir

$$U(x, s) = \frac{x}{s^2(s+1)} = \frac{x}{s^2} - \frac{x}{s} + \frac{x}{s+1}.$$

Die Rücktransformation liefert nun

$$u(x, t) = xt - x + x e^{-t} = x(e^{-t} - 1 + t).$$

□

Das vorstehende Beispiel ist sehr einfach (und mathematisch dafür konstruiert). Das folgende ist um einiges komplizierter, aber dafür ist es eine typische Anwendung.

Beispiel 43 (Diffusion im Halbleiter).

Werkstoffe II, Abschnitt 8.3

Bei der Anreicherung von Fremdstoffen in einem Halbleiter durch Diffusion in einem Halbraum „rechts von der yz -Ebene“ genügt die Konzentration an der Stelle x zur Zeit t der *Diffusionsgleichung*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Dieselbe Gleichung beschreibt auch die Temperaturentwicklung bei der Wärmeausbreitung und heißt deshalb auch die *Wärmeleitungsgleichung*. Ist zur Zeit $t = 0$ kein Fremdstoff vorhanden, und beginnt man zu diesem Zeitpunkt, eine ebene Oberfläche des Halbleiters mit konstanter Dichte T zu dotieren, so hat man die Rand- und Anfangsbedingungen

$$u(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = T = \text{const.}$$

Wir versuchen, mit einer Laplacetransformation bezüglich t dieses Problem zu lösen. Wir setzen also

$$U(x, s) := \int_0^{\infty} u(x, t) e^{-st} dt.$$

Dann ergibt sich

$$sU(x, s) - 0 = \lambda \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad (47)$$

Die Anfangsbedingung bei $x = 0$ liefert

$$U(0, s) = \mathcal{L}[T] = \frac{T}{s}$$

und die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung (47) liefert

$$U(x, s) = \frac{T}{s} e^{-\sqrt{s/\lambda} x}. \quad (48)$$

Das ist natürlich nicht *die* Lösung des Anfangswertproblems. Wir haben ja nur den Funktionswert, nicht auch die Ableitung bei $x = 0$ vorgeschrieben, so dass es gar keine eindeutig bestimmte Lösung gibt. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung enthält auch eine $e^{+\sqrt{s/\lambda} x}$ -Komponente.

Aber aus physikalischen Gründen ist es sinnvoll anzunehmen, dass $u(x, t)$ für jedes x von exponentieller Ordnung in t ist. Und weil λ und x positiv sind, folgt aus dem zweiten Teil von Satz 35, dass der $e^{+\sqrt{s/\lambda} x}$ -Anteil der Laplacetransformierten verschwindet.

Die Funktion (48) müssen wir jetzt zurücktransformieren, um $u(x, t)$ zu erhalten. Die Rücktransformation solcher Funktionen ist aber schwierig, vgl. z.B. *B. Davies, Integral Transforms and Their Applications, Springer 1978, §6.2*. Wir vertrauen uns Mathematica an:

```
g[s_] := T Exp[-sqrt[s/l] x]/s
InverseLaplaceTransform[g[s], s, t]
Out= -T  $\frac{\lambda x \left( \operatorname{Erf} \left( \frac{\sqrt{x^2}}{2\sqrt{t}} \right) - 1 \right)}{\sqrt{\lambda^3} \sqrt{\frac{x^2}{\lambda}}}$ .
```

(Beachten Sie, dass Mathematica nicht weiß, ob x und λ positiv sind. Daher bleiben z.B. Ausdrücke vom Typ $\sqrt{x^2}$ stehen.)

Im Output ist Erf die Gaußsche Fehlerfunktion aus der Analysis II:

$$\operatorname{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\eta^2} d\eta.$$

Mit $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\eta^2} d\eta = 1$ erhalten wir

$$u(x, t) = \frac{2T}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\sqrt{\lambda t}}}^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta.$$

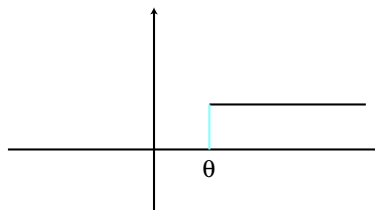
Mit der Substitution $\eta = \frac{\xi+x}{2\sqrt{\lambda t}}$ wird daraus

$$u(x, t) = \frac{2T}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4\lambda t}}}{2\sqrt{\lambda t}} d\xi.$$

UNSTETIGE RECHTE SEITE, VERALLGEMEINERTE FUNKTIONEN (DISTRIBUTIONEN)

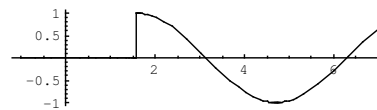
Ein wichtiges Anwendungsfeld sind lineare Differentialgleichungen mit un stetiger rechter Seite. Dazu betrachten wir die *Sprungfunktion* oder *Heavisidefunktion*

$$u_\theta(t) := \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq \theta, \\ 1 & \text{für } t > \theta. \end{cases}$$



mit positivem θ . Sie ist ideal, um die rechte Seite einer Differentialgleichung erst zum Zeitpunkt θ „einzuschalten“.

So sieht zum Beispiel $u_{\pi/2}(t) \cos(t - \pi/2)$ aus:



Satz 44 (Verschiebungssatz). Ist $g(t)$ stückweise stetig und von exponentieller Ordnung, so gilt

$$\mathcal{L}[u_\theta(t)g(t - \theta)](s) = e^{-\theta s} \mathcal{L}[g(t)](s).$$

Beweis. Es gilt

$$\mathcal{L}[u_\theta(t)g(t - \theta)](s) = \int_0^\infty u_\theta(t)e^{-st}g(t - \theta)dt = \int_\theta^\infty e^{-st}g(t - \theta)dt,$$

und daraus folgt mit der Substitutionsregel

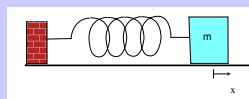
$$\mathcal{L}[u_\theta(t)g(t - \theta)](s) = \int_0^\infty e^{-s(t+\theta)}g(t)dt = e^{-\theta s} \int_0^\infty e^{-st}g(t)dt = e^{-\theta s} \mathcal{L}[g(t)](s).$$

□

Beispiel 45. Die Differentialgleichung

$$mx'' + ax' + bx = h(t) \tag{49}$$

kann man interpretieren als Gleichung für die gedämpfte Schwingung einer Masse m an einer Feder mit Federkonstante b und der „Zwangskraft“ $h(t)$. Wir nehmen an, dass der Reibungskoeffizient $a > 0$ und $a^2 - 4bm < 0$. Dann hat die zugehörige homogene Gleichung die allgemeine Lösung



$$x(t) = e^{-at/2m}(c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t), \quad -\omega^2 = \frac{a^2}{4m^2} - \frac{b}{m}.$$

Mit dem üblichen Trick kann man das auch schreiben als

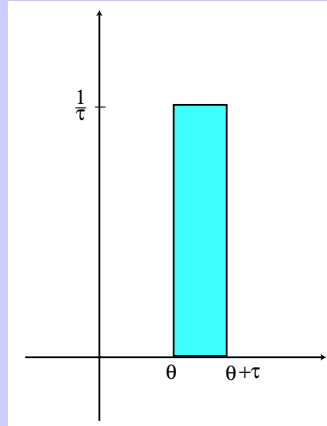
$$x(t) = Ae^{-at/(2m)} \cos \omega(t - t_0)$$

und sieht ganz deutlich, dass man eine gedämpfte harmonische Schwingung erhält. Anfangs-amplitude A und Phase t_0 ergeben sich aus den Anfangsbedingungen.

Aufgabe: Wie sieht die Bewegung mit Anfangsbedingungen $x(0) = x'(0) = 0$ aus, wenn die Zwangskraft $h(t)$ ein sehr kurzer Impuls (Fußtritt) zum Zeitpunkt $\theta > 0$ ist:

$$h_{\theta,\tau}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\tau} & \text{für } \theta \leq t \leq \theta + \tau, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

mit sehr kleinem $\tau > 0$.



Wir benutzen die Laplacetransformation. Es ist

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[h_{\theta,\tau}](s) &= \frac{1}{\tau} \int_{\theta}^{\theta+\tau} e^{-st} dt = \frac{1}{-s\tau} e^{-st} \Big|_{\theta}^{\theta+\tau} = e^{-s\theta} \frac{1}{s\tau} (1 - e^{-s\tau}) \\ &= e^{-s\theta} \frac{1}{s\tau} \left(\frac{s\tau}{1!} - \frac{(s\tau)^2}{2!} \pm \dots \right) = e^{-s\theta} \left(1 - \frac{(s\tau)^1}{2!} \pm \dots \right) \end{aligned}$$

Für $\tau \searrow 0$ folgt

$$\lim_{\tau \searrow 0} \mathcal{L}[h_{\theta,\tau}](s) = e^{-s\theta}.$$

Wir haben

$$\lim_{\tau \searrow 0} h_{\theta,\tau}(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \neq \theta \\ \infty & \text{für } t = \theta. \end{cases}$$

Der ganz in θ konzentrierte Impuls ist also keine richtige mathematische Funktion mehr. Trotzdem versteht man ihn mit dem Symbol $\delta_{\theta}(t)$ und nennt

$\delta_{\theta}(t)$ die in θ zentrierte *Diracfunktion*

nach dem englischen Physiker P. A. Dirac (1902-1984), der zuerst solche „verallgemeinerten“ Funktionen untersucht hat. Im mathematischen Sprachgebrauch nennt man sie heute *Distributionen* und spricht von der *Diracdistribution*. Es ist also

$$\boxed{\mathcal{L}[\delta_{\theta}] = e^{-s\theta} \text{ und insbesondere } \mathcal{L}[\delta_0] = 1.}$$

Zurück zu unserem Fußtritt-Problem, das wir jetzt so formulieren: Löse die Schwingungsgleichung (49) für einen Einheitsimpuls

$$h(t) = \delta_{\theta}(t).$$

Anwendung der Laplacetransformation auf (49) liefert wegen $x(0) = x'(0) = 0$

$$\begin{aligned} X(s) &= e^{-s\theta} \frac{1}{ms^2 + as + b} \\ &= e^{-s\theta} \frac{1}{m\left(s + \frac{a}{2m}\right)^2 + b - \frac{a^2}{4m}} \\ &= e^{-s\theta} \frac{1}{m\omega} \frac{\omega}{\left(s + \frac{a}{2m}\right)^2 + \omega^2} \end{aligned} \quad (50)$$

mit $\omega := \sqrt{\frac{b}{m} - \frac{a^2}{4m^2}}$. Mit dem Dämpfungssatz ergibt sich

$$X(s) = e^{-s\theta} \frac{1}{m\omega} \mathcal{L}[e^{-at/(2m)} \sin \omega t](s) = \mathcal{L}\left[\frac{1}{m\omega} u_\theta(t) e^{-a(t-\theta)/(2m)} \sin \omega(t-\theta)\right](s).$$

Dabei haben wir zum Schluß den Verschiebungssatz benutzt.

Also erhalten wir

$$x(t) = \frac{1}{m\omega} u_\theta(t) e^{-a(t-\theta)/2m} \sin \omega(t-\theta). \quad (51)$$

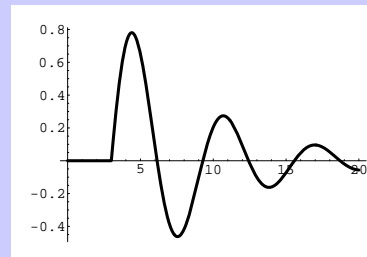
Das sieht dann so aus:

$\theta = 3$; $a = 1$; $\omega = 1$; $m = 3$;

`x[t_] := If[t < 3, 0, Exp[-a(t - 3)/(2m)] Sin[omega(t - 3)]]`

`Plot[x[t], {t, 0, 20}, AspectRatio ->.7,`

`PlotStyle -> Thickness[0.01]]`



Bemerkung zum Nachdenken. Das in diesem Beispiel beschriebene Problem läßt sich mit den „normalen“ Methoden nicht lösen, ja es läßt sich gar nicht richtig formulieren, weil eben die *Diracfunktionen* gar keine Funktionen sind. Ihre Laplacetransformierten sind hingegen über jeden Zweifel erhaben, und deshalb ist die Laplacefunktion das ideale Werkzeug für solche „Schockprobleme“.

Beachten Sie, dass die Lösungsfunktion (51) an der Stelle θ nicht differenzierbar ist. Weil dort die rechte Seite der Differentialgleichung eine „unendliche Spitze“ hat, kann man das auch wohl nicht erwarten. Wenn wir nun $\theta = 0$ wählen, statt wie bisher $\theta > 0$, bleiben die obigen Rechnungen gültig und man erhält

$$x(t) = \frac{1}{m\omega} e^{-at/2m} \sin \omega t, \quad t \geq 0. \quad (52)$$

Diese Funktion ist plötzlich an der Stelle $\theta = 0$ differenzierbar, weil wir nur $t \geq 0$ betrachten. Allerdings ist $x'(0) = \frac{1}{m} \neq 0$, so dass wir *keine* Lösung des Anfangswertproblems erhalten. Grund für diesen scheinbaren Widerspruch ist, dass das Anfangswertproblem für δ als rechte Seite im naiven klassischen Sinne eben sinnlos ist – wie ja schon die Delta“funktion“. Das Problem wie seine Lösung werden durch den obigen Grenzwertprozess definiert.

Noch einmal: Im s -Bereich wir δ zu 1, und die Situation ist absolut harmlos.

Die charakteristische Eigenschaft der Diracdistribution. Ist $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist

$$\lim_{\tau \searrow 0} \int_0^{+\infty} h_{\theta, \tau}(t) f(t) dt = \lim_{\tau \searrow 0} \underbrace{\frac{1}{\tau} \int_{\theta}^{\theta+\tau} f(t) dt}_{\text{Mittelwert von } f \text{ auf } [\theta, \theta + \tau]} = f(\theta).$$

Wir schreiben das als $\int_0^{+\infty} \delta_{\theta}(t) f(t) dt = f(\theta)$ und wollen diese Gleichung noch etwas umformulieren. Wegen $\delta_{\theta}(t) = \delta_0(\theta - t) =: \delta(\theta - t)$ gilt

$$\int_0^{+\infty} \delta(\theta - t) f(t) dt = f(\theta).$$

Natürlich kann man mit der Integration auch bei $-\infty$ beginnen. Dann gilt die Gleichung auch für negative θ :

Satz 46 (Diracdistribution). Für die in 0 zentrierte Diracdistribution δ gilt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\theta - t) f(t) dt = f(\theta)$$

und insbesondere

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t) dt = f(0).$$

2.1.3 Anwendungen der Laplacetransformation II

- In der Signalverarbeitung oder der Systemtheorie bewegt man sich gern und am bequemsten nur in der Welt der Laplacetransformierten.
- Wir erklären, was ein LTI-System ist, was eine Übertragungsfunktion und was der Frequenzgang eines solchen Systems.

Wir beginnen mit einer

Definition 47. Die Faltung $f * g$ zweier Funktionen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ist definiert durch

$$(f * g)(t) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - \theta)g(\theta) d\theta, \quad t \in \mathbb{R},$$

falls dies Integral existiert.

Ist $f(t) = g(t) = 0$ für $t < 0$, oder sind f und g nur auf $[0, +\infty[$ definiert und setzt man sie für negative Werte mit 0 fort, so hat man

$$(f * g)(t) = \int_0^{\infty} f(t - \theta)g(\theta)d\theta = \int_0^t f(t - \theta)g(\theta)d\theta.$$

Im Rahmen der Laplacetransformation kann man für die Faltung also auch diese Integrationsgrenzen verwenden.

Beispiel 48. Zeigen Sie, dass für stetiges $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ und $g(t) := (x * f(x))(t)$ gilt:

$$g''(t) = f(t).$$

□

Satz 49 (Faltungssatz). Seien $f(t), g(t)$ stückweise stetig von exponentieller Ordnung. Dann gilt

$$\mathcal{L}[f * g] = \mathcal{L}[f]\mathcal{L}[g].$$

Wegen der Injektivität der Laplacetransformation folgt

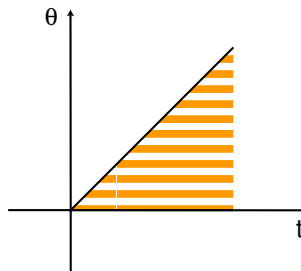
Korollar 50.

$$f * g = g * f. \tag{53}$$

Beweis des Faltungssatzes.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left[\int_0^t f(t - \theta)g(\theta)d\theta \right] &= \int_0^{\infty} \left(\int_0^t f(t - \theta)g(\theta)d\theta \right) e^{-st} dt \\ &= \int_{t=0}^{\infty} \int_{\theta=0}^t e^{-st} f(t - \theta)g(\theta)d\theta dt \\ &= \int_{\theta=0}^{\infty} \int_{t=\theta}^{\infty} e^{-st} f(t - \theta)g(\theta)dt d\theta. \end{aligned}$$

Für den letzten Schritt vergleiche die nebenstehende Skizze. Wir nehmen ohne Beweis an, dass diese Vertauschung der Integrationsreihenfolge erlaubt ist.



Nun können wir die Rechnung mit der Substitution $t \rightarrow \tau = t - \theta$ fortsetzen:

$$\begin{aligned} \int_{\theta=0}^{\infty} \int_{t=\theta}^{\infty} e^{-st} f(t-\theta)g(\theta)dt d\theta &= \int_{\theta=0}^{\infty} g(\theta) \int_{\tau=0}^{\infty} e^{-s(\tau+\theta)} f(\tau)d\tau d\theta \\ &= \int_{\theta=0}^{\infty} g(\theta)e^{-s\theta} d\theta \int_{\tau=0}^{\infty} e^{-s\tau} f(\tau)d\tau \\ &= \mathcal{L}[f]\mathcal{L}[g]. \end{aligned}$$

□

Beispiel 51. Nach Satz 46 ist

$$\delta * f = f. \tag{54}$$

Weiter war $\mathcal{L}[1](s) = \frac{1}{s}$ für die Funktion $[0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto 1$. Deshalb ist

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right](s) = \mathcal{L}[1 * f(t)](s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f(t)](s).$$

□

Der Faltungssatz kann im Prinzip für die Rücktransformation von Produkten benutzt werden, aber seine Bedeutung liegt eher in der Theorie linearer Systeme, die eine fundamentale Rolle in vielen Anwendungsbereichen spielen, wie ein Blick in eines der folgenden Skripten [*Signale und Systeme, Einführung in die Netzwerktheorie, Regelungstechnik I*] zeigt.

Matrixwertige Funktionen. Für matrixwertige Funktionen

$$a(t) = (a_{ij}(t)) : \mathbb{R} \rightarrow M(m \times k), \quad b(t) = (b_{ij}(t)) : \mathbb{R} \rightarrow M(k \times n)$$

definiert man das Faltungsprodukt, indem man im gewöhnlichen Matrixprodukt die Multiplikation durch die Faltung der Komponenten ersetzt.

$$(a_{ij}) * (b_{jk}) = \left(\sum_j a_{ij} * b_{jk} \right)$$

Die Laplacetransformation matrixwertiger Funktionen war komponentenweise definiert. Rechnen Sie damit nach, dass für solche Funktionen

$$\mathcal{L}[(a * b)(t)](s) = \mathcal{L}[a(t)](s)\mathcal{L}[b(t)](s).$$

Wir beginnen mit einigen Beispielen.

Beispiel 52 (Greensche Funktion). Löse das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y &= h(t) \\ y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) &= 0 \end{aligned} \tag{55}$$

mit konstanten Koeffizienten und einer stückweise stetigen Funktion h von exponentieller Ordnung.

Die Laplacetransformation liefert mit $Y := \mathcal{L}[y]$ usw.

$$Y = \underbrace{(s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n)^{-1}}_{=: G(s)} H.$$

Findet man also ein $g(t)$, so dass

$$\mathcal{L}[g] = G(s),$$

so folgt aus dem Faltungssatz

$$y(t) = (g * h)(t) = \int_0^t g(t - \theta)h(\theta)d\theta.$$

Die Funktion $g(t - \theta) =: K(t, \theta)$ heißt auch die *GREENsche Funktion* für das Anfangswertproblem. Hat man sie einmal gefunden, so ist die Lösung von (52) für verschiedene rechte Seiten auf eine Integration reduziert.

Hat man inhomogene Anfangswerte $y(0), \dots, y^{(n-1)}(0)$, so ergibt sich ebenso

$$Y(s) = G(s)H(s) + \frac{A(s)}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n},$$

wobei $A(s)$ ein Polynom ist, das nur von den Anfangsbedingungen und den Koeffizienten der Differentialgleichung abhängt. Außer $g(t)$ braucht man in diesem Fall noch ein $a(t)$ mit $\mathcal{L}[a(t)](s) = \frac{A(s)}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}$, und die Lösung der Differentialgleichung ist dann

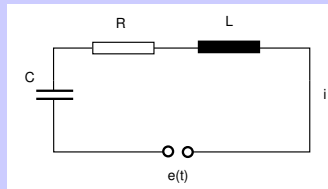
$$y(t) = a(t) + (g * h)(t).$$

□

Beispiel 53.

Im abgebildeten Stromkreis wird der Zusammenhang zwischen dem Strom $i(t)$ und der aufgeprägten Spannung $e(t)$ nach dem Ohmschen Gesetz gegeben durch die *Integrodifferentialgleichung*

$$Li'(t) + Ri(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\theta)d\theta = e(t).$$



Wir nehmen an, dass $i(t) = 0$ für $t \leq 0$. Dann ist $i(0) = i'(0) = 0$ und wir erhalten mit der Laplacetransformation

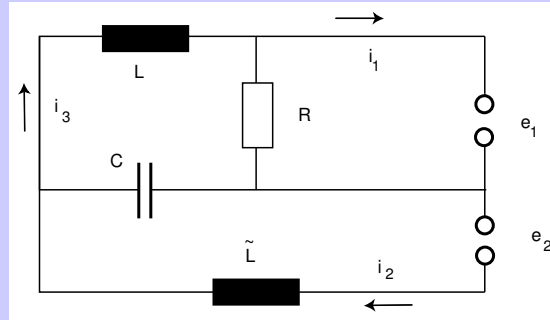
$$LsI(s) + RI(s) + \frac{1}{sC}I(s) = E(s).$$

(Vgl. Beispiel 51). Es folgt

$$I(s) = (Ls + R + \frac{1}{sC})^{-1}E(s)$$

Damit ist man in der Situation des letzten Beispiels.

Beispiel 54 (Netzwerktheorie). Betrachtet man statt des einfachen LRC-Kreises ein Netzwerk mit verschiedenen Komponenten, etwa dieses



so lernt man in der Netzwerktheorie verschiedene Methoden, wie man mittels der Ohmschen und Kirchhoffschen Gesetze dafür ein *System* von Integrodifferentialgleichungen aufstellt. Für das vorstehenden Netzwerk erhält man zum Beispiel

$$\begin{aligned} Ri_1 - Ri_3 &= e_1 \\ \tilde{L}i_2' + \frac{1}{C} \int_0^t i_2 dt - \frac{1}{C} \int_0^t i_3 dt &= e_2 \\ -Ri_1 - \frac{1}{C} \int_0^t i_2 dt + Li_3' + Ri_3 + \frac{1}{C} \int_0^t i_3 dt &= 0. \end{aligned}$$

Durch Anwendung der Laplacetransformation ergibt sich ein lineares Gleichungssystem

$$\begin{aligned} RI_1(s) & & -RI_3(s) &= E_1(s) \\ s\tilde{L}RI_1(s) + \frac{1}{sC} I_2(s) & & &= E_2(s) \\ -RI_1(s) - \frac{1}{sC} I_2(s) + (sL + R + \frac{1}{sC}) I_3(s) &= & 0. \end{aligned}$$

Allgemein liefert ein solches Netzwerk nach Laplacetransformation ein Gleichungssystem folgender Gestalt:

$$\begin{aligned} Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 + \dots + Z_{1n}I_n &= E_1 \\ Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 + \dots + Z_{2n}I_n &= E_2 \\ &\dots \\ Z_{n1}I_1 + Z_{n2}I_2 + \dots + Z_{nn}I_n &= E_n. \end{aligned}$$

Daraus kann man die Ströme I_j auf algebraischem Wege ausrechnen. Aus physikalischen Gründen sollte die Matrix (Z_{jk}) invertierbar mit inverser Matrix mit $G = (G_{jk}) = (Z_{jk})^{-1}$ sein. Damit erhält man

$$I_k(s) = G_{1k}(s)E_1(s) + \dots + G_{nk}(s)E_n(s)$$

oder, in Matrixform,

$$I(s) = G(s)E(s).$$

Wenn man das zurücktransformieren will, muss man den Faltungssatz berücksichtigen:

$$\vec{i} = (g_{jk}) * \vec{e},$$

das heißt

$$i_j = \sum_k g_{jk} * e_k = \sum_k \int_0^t g_{jk}(t - \theta) e_k(\theta) d\theta.$$

Aber in der Regel will man das gar nicht. Die Matrix $G = (G_{jk})$ heißt die *Übertragungsmatrix* des Netzwerks. Sie beschreibt auf einfachste Weise den Output $I(s)$ bei gegebenem Input $E(s)$. Im nächsten Abschnitt gehen wir näher darauf ein.

LINEARE SYSTEME.

Vergleichen Sie das 7. Kapitel über „Kontinuierliche lineare Systeme im Frequenzbereich“ im Skriptum [*Signale und Systeme*] oder den Abschnitt 2.1 über lineare Systeme in [*Regelungstechnik I*].

Wir betrachten nun (erst einmal skalare) Systeme, d.h. Abbildungen, die einer reell- oder komplexwertigen Eingangsfunktion $e(t)$ eine Ausgangsfunktion (=Systemantwort) $i(t)$ zuordnen, symbolisch

$$S : e(t) \rightarrow i(t).$$

Wir schreiben das wie üblich als

$$i = S[e].$$

In der anwendungsorientierten Literatur findet man dafür oft eine solche Darstellung:



In den obigen Beispielen 45 oder 53 wird etwa

- der aufgeprägten Spannung $e(t)$ der dadurch hervorgerufene Strom $i(t)$ oder
- der Zwangskraft $h(t)$ die von ihr induzierte Schwingung $x(t)$

zugeordnet. Wir wollen aber solche Systeme ganz abstrakt betrachten und nur gewisse formale Voraussetzungen fordern. Wir werden sehen, wie sich dann die Wirkung des Systems beschreiben läßt, ohne dass man sein „Innenleben“ kennt. Der Vorteil einer solchen Abstraktion ist, dass die entsprechende Theorie sich in sehr vielen und sehr verschiedenen Situationen anwenden läßt, zum Beispiel auf elektrische oder elektronische Systeme ebenso wie auf mechanische oder andere.

Folgende Eigenschaften soll unser System haben:

1. Es soll *linear* sein. Das bedeutet, dass einer Linearkombination von Eingangsfunktionen dieselbe Linearkombination von Ausgangsfunktionen entsprechen soll:

$$S[\sum \alpha_k f_k] = \sum \alpha_k S[f_k].$$

Eigentlich bedeutet „Linearkombination“ eine endliche solche Summe. Wir verlangen aber Linearität sogar für unendliche Summen, ja sogar für Integrale:

$$S \left[\int_a^b \alpha(k) f(k, t) dk \right] = \int_a^b \alpha(k) S[f(k, t)] dk. \quad (56)$$

Dabei haben wir die Integrationsvariable in Anlehnung an die obige Summe mit k bezeichnet, obwohl sie natürlich das ganze reelle Intervall durchläuft. Und unter dem Integral wirkt das S auf die Variable t . Weil sich also die Gleichheit von endlichen Linearkombinationen auf unendliche ausdehnen läßt, ist das S mit der Grenzwertbildung verträglich, und man nennt solche S genauer *stetig und linear*. Wir unterdrücken aber das *stetig*.

2. Das System soll *zeitunabhängig* oder *zeitinvariant* sein, d.h. zu jeder Zeit dieselbe Wirkung zeigen:

$$S[f(t - t_0)](\theta) = S[f(t)](\theta - t_0) \quad (57)$$

für alle θ und t_0 .

In diesem Sinne lineare zeitinvariante Systeme heißen auch *LTI-Systeme*.

Insbesondere im Zusammenhang mit der Laplacetransformation werden wir noch fordern:

3. Das System soll *kausal* sein, d.h.

$$f(t) = 0 \text{ für } t < \theta \implies S[f](t) = 0 \text{ für } t < \theta. \quad (58)$$

Solange kein Eingang vorhanden ist, solange rührt sich auch S nicht.

Ob ein gegebenes System diese Eigenschaften hat, muss man nachprüfen: Das ist eine Aufgabe für Mathematiker, wenn das System (wie oben) mathematisch formuliert ist. Bei physikalisch gegebenen Systemen muss man die Frage aufgrund von Experimenten oder bereits vorliegender Erfahrungen entscheiden.

Satz 55 (Faltungssatz für LTI-Systeme). *Es gilt*

$$S[f * g] = S[f] * g.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} S[f * g] &= S \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t - \theta)g(\theta) d\theta \right] \\ &\stackrel{(56)}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} S[f(t - \theta)](t)g(\theta) d\theta \\ &\stackrel{(57)}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} S[f(t)](t - \theta)g(\theta) d\theta = (S[f] * g)(t). \end{aligned}$$

□

Wir wenden das (großzügig auf die Delta-Funktion an und erhalten

$$S[f] = S[\delta * f] = S[\delta] * f$$

Aber das bedeutet, dass man die Wirkung von S auf allen („einigermaßen anständigen“) Funktionen schon kennt, wenn man sie für den Impuls δ kennt:

Satz 56 (Impulsantwort). Für ein LTI-System S sei

$$h(t) := S[\delta](t)$$

die sogenannte Impulsantwort. Dann gilt

$$S[f] = h * f.$$

Die Wirkung des Systems ist die Faltung mit der Impulsantwort.

Weil schließlich die Laplacetransformation die Faltung durch das Produkt ersetzt, macht sie die ganze Situation noch einmal deutlich einfacher. Wir setzen voraus, dass S kausal ist. Dann kann man S auf Funktionen $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ anwenden, indem man $f(t) := 0$ für negative t setzt. $S[f](t)$ verschwindet dann auch für negative t .

Satz 57 (Übertragungsfunktion). Sei S ein kausales LTI-System.

Man nennt die Laplacetransformierte $\mathcal{L}[h]$ der Impulsantwort $h : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ die Übertragungsfunktion des Systems. Damit gilt

$$\mathcal{L}[S[f]] = \mathcal{L}[h]\mathcal{L}[f].$$

Im s -Bereich wirkt das System durch Multiplikation mit der Übertragungsfunktion.

Vektorwertige Funktionen. (Kausale) LTI-Systeme mit vektorwertigem Ein- und Ausgang definiert man genauso wie oben die mit skalarem Ein- und Ausgang.

Für eine vektorwertige Funktion $\vec{f}(t)$ und eine skalarwertige Funktion $g(t)$ ist $(\vec{f} * g)(t)$ wieder eine vektorwertige Funktion, und dafür hat man einen verallgemeinerten Faltungssatz für LTI-Systeme:

$$S[\vec{f} * g] = S[\vec{f}] * g,$$

und damit findet man

$$\begin{aligned} S[\vec{f}] &= S\left[\sum f_j \vec{e}_j\right] = S\left[\sum (\delta * f_j) \vec{e}_j\right] \\ &= S\left[\sum \delta \vec{e}_j * f_j\right] = \sum S[\delta \vec{e}_j * f_j] = \sum S[\delta \vec{e}_j] * f_j. \end{aligned}$$

Definiert man die Impulsantwort als die Matrix $h(t) := (h_{ij}(t))_{i,j}$ mit

$$S[\delta \vec{e}_j] = \sum h_{ij} e_i,$$

so folgt

$$S[\vec{f}] = \sum_{i,j} h_{ij} * f_j \vec{e}_i = h * \vec{f}$$

wie im skalaren Fall.

Aus der Übertragungsfunktion wird ebenfalls eine Matrix, die Übertragungsmatrix

$$\mathcal{L}[h] = (\mathcal{L}[h_{ij}])_{i,j},$$

und man erhält

$$\mathcal{L}[S[\vec{f}]] = \mathcal{L}[h]\mathcal{L}[\vec{f}].$$

Beispiele von Impulsantworten und Übertragungsfunktionen kennen wir bereits:

- Bei den Netzwerken im Beispiel 54 haben wir die Beschreibung durch eine Übertragungsfunktion bereits ohne Benutzung der Impulsantwort hergeleitet.
- Im Beispiel 45 über die durch einen Impuls angeregte Feder setzt man $\theta = 0$. Dann geben die Formeln (50) bzw. (51) die Übertragungsfunktion bzw. die Impulsantwort.

DER FREQUENZGANG EINES SYSTEMS. Sei $h(t) = S[\delta](t)$ die Impulsantwort des kausalen LTI-Systems S . Wegen der Kausalität ist $h(t) = 0$ für $t < 0$.

Sei $\omega \in \mathbb{R}$ und

$$f(t) := \begin{cases} e^{i\omega t} & \text{für } t \geq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann hat man, weil $h(t) = 0$ für $t < 0$,

$$\begin{aligned} S[f](t) &= (h * f)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - \theta)h(\theta) d\theta \\ &= \int_0^t e^{i\omega(t-\theta)}h(\theta)d\theta \\ &= e^{i\omega t} \int_0^t e^{-i\omega\theta}h(\theta)d\theta \\ &= e^{i\omega t} \int_0^{\infty} e^{-i\omega\theta}h(\theta)d\theta - e^{i\omega t} \int_t^{\infty} e^{-i\omega\theta}h(\theta)d\theta \\ &= e^{i\omega t} \mathcal{L}[h](i\omega) - e^{i\omega t} \int_t^{\infty} e^{-i\omega\theta}h(\theta)d\theta. \end{aligned}$$

Wir haben die Existenz der uneigentlichen Integrale stillschweigend vorausgesetzt. Dann geht das letzte Integral für $t \rightarrow \infty$ gegen null, beschreibt also einen Einschwingvorgang bei zur Zeit $t = 0$ aufgeschalteter harmonischer Erregung $e^{i\omega t}$. Der erste Term rechts hingegen beschreibt den stationären Zustand nach Abklingen des Einschwingvorgangs.

Schreibt man $\mathcal{L}[h](i\omega) = |\mathcal{L}[h](i\omega)|e^{i\phi}$, so ist die stationäre Antwort

$$|\mathcal{L}[h](i\omega)|e^{i(\omega t + \phi)}$$

wieder eine harmonische Schwingung, und zwar mit derselben Frequenz ω , der Amplitude $|\mathcal{L}[h](i\omega)|$ und einer (von ω abhängigen) Phasenverschiebung ϕ .

Definition 58 (Frequenzgang). Man nennt die Funktion

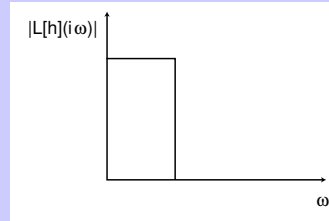
$$\omega \mapsto \mathcal{L}[h](i\omega)$$

den *Frequenzgang des Systems*.

Beispiel 59 (Butterworth-Filter).

Signale und Systeme, Abschnitt 10.4

Ein ideales Tiefpassfilter hat einen Frequenzgang, dessen Betrag so aussieht:
 Durch welche Übertragungsfunktion kann man das möglichst gut realisieren? Und durch welches elektronische Netzwerk kann man die Übertragungsfunktion realisieren?



Wir betrachten das Polynom

$$q(s) = 1 - s^{2n}$$

mit ungeradem n . Die Nullstellen von q sind die $2n$ -ten Einheitswurzeln. Sie liegen auf dem Einheitskreis. Es ist

$$q(i\omega) = 1 - i^{2n}\omega^{2n} = 1 - (-1)^n\omega^{2n} = 1 + \omega^{2n}. \quad (59)$$

Daher liegen auf der imaginären Achse keine Nullstellen von $q(s)$. Andererseits liegen die Nullstellen symmetrisch zur imaginären Achse, denn $q(-s) = q(s)$ und

$$q(\bar{s}) = \overline{q(s)}.$$

Daher läßt sich $q(s)$ schreiben in der Form

$$q(s) = p(s)p(-s) \quad (60)$$

mit einem reellen Polynom $p(s)$, dessen sämtliche Nullstellen negativen Realteil haben. Zum Beispiel ist (Nachrechnen!)

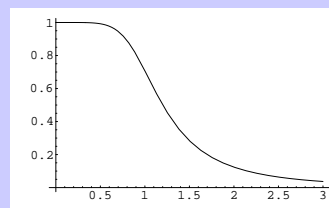
$$1 - s^6 = \underbrace{(s^3 + 2s^2 + 2s + 1)}_{p(s)} \underbrace{((-s)^3 + 2(-s)^2 + 2(-s) + 1)}_{p(-s)} \quad (61)$$

Weiter folgt aus (59) und (60), dass

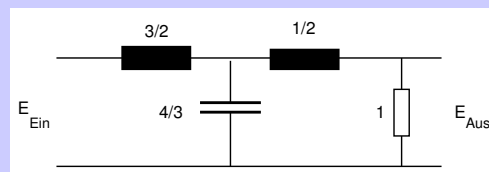
$$p(i\omega)\overline{p(i\omega)} = p(i\omega)p(-i\omega) = 1 + \omega^{2n}$$

und daher

$$\left| \frac{1}{p(i\omega)} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^{2n}}}.$$



Filter mit der so definierten Übertragungsfunktion $\frac{1}{p(s)}$ vom Grad n heißen Butterworth-Filter der Ordnung n . Ihre physikalische Realisierung ist ein Problem der Netzwerksynthese. Vergleichen Sie dafür z.B. *I. Holbrook, Laplace-Transformationen, Braunschweig 1970*. Für das Polynom p aus (61) findet man mittels *Vierpoltheorie*



2.2 Die Fouriertransformation

2.2.1 Definition und grundlegende Eigenschaften

- Die Fouriertransformation ist der Laplacetransformation ähnlich, gestattet aber eine viel anschaulichere physikalische Interpretation.
- Diese wird gegeben durch die inverse Fouriertransformation, die auch erklärt, warum es dabei um Spektralanalyse geht.
- Wir erklären insbesondere den Zusammenhang mit den Fourierreihen.

Definition 60 (Fouriertransformation). Für $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ sei die *Fouriertransformierte*

$$F = \mathcal{F}[f] : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

definiert durch

$$\mathcal{F}[f](\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$$

falls das uneigentliche Integral rechts existieren. Die Abbildung

$$\mathcal{F} : f \mapsto F$$

heißt die *Fouriertransformation*.

Zur Erinnerung: Für reellwertiges f ist

$$\int f(t)e^{-i\omega t} = \int f(t) \cos \omega t dt - i \int f(t) \sin \omega t dt.$$

Bei komplexwertigen f muss man den Integranden entsprechend in Real- und Imaginärteil zerlegen.

Die Definition der Fouriertransformation ist in der Literatur nicht einheitlich. Man findet vor dem Integral auch den Faktor $\frac{1}{2\pi}$ oder $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

Eine einfache Konsequenz der Definition ist der

Satz 61 (Linearität). Die Fouriertransformation ist linear: Existieren $\mathcal{F}[f]$ und $\mathcal{F}[g]$, so existieren auch $\mathcal{F}[f + g]$ und $\mathcal{F}[af]$ für beliebiges $a \in \mathbb{C}$ und es gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f + g] &= \mathcal{F}[f] + \mathcal{F}[g], \\ \mathcal{F}[af] &= a\mathcal{F}[f].\end{aligned}$$

Vergleich mit der Laplacetransformation. Während die Laplacetransformation vor allem auf Anfangswertprobleme zugeschnitten ist, weil sie nur Funktionswerte $f(t)$ mit $t \geq 0$ berücksichtigt, treten bei der Behandlung von nicht-kausalen Systemen (z.B. in der Nachrichtentechnik) Systeme auf, die den Funktionsverlauf auf der *ganzen* reellen Achse einbeziehen (Vergleichen Sie etwa [Signale und Systeme, Kapitel 4]). Weil die Fourier-Kernfunktion $e^{-i\omega t}$ vom Betrage 1 ist, leistet sie im Gegensatz zur Laplaceschen e^{-st} keinen wesentlichen Beitrag zur Konvergenz des uneigentlichen Integrals. Also müssen die zu transformierenden Funktionen f selber schnell genug gegen null gehen, wir kommen darauf zurück.

Vergleich mit den Fourierreihen. Die Koeffizienten der komplexen Fourierreihe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t}$$

der Funktion $f(t)$ mit Periode $T = 2\pi/\omega$ sind gegeben durch

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) e^{-ik\omega\tau} d\tau.$$

Sie geben an, wie stark die Oberschwingung der Frequenz $k\omega$ in $f(t)$ vertreten ist. Ist die Reihe gegen f konvergent, so hat man also

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) e^{-ik\omega\tau} d\tau \right) e^{ik\omega t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\omega}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) e^{-ik\omega\tau} d\tau \right) e^{ik\omega t}.$$

Weil für beliebiges k aber

$$\omega = \int_{k\omega}^{(k+1)\omega} d\theta,$$

können wir auch schreiben:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{k\omega}^{(k+1)\omega} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) e^{-ik\omega\tau} d\tau \right) e^{ik\omega t} d\theta.$$

Wenn wir nun sehr große T betrachten, können wir das innere Integral einfach über die ganze reelle Achse erstrecken, und weil $\omega = \frac{2\pi}{T}$ dann sehr klein ist, ist $k\omega$ annähernd gleich $\theta \in [k\omega, (k+1)\omega]$. Damit erhalten wir

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{k\omega}^{(k+1)\omega} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-i\theta\tau} d\tau \right) e^{i\theta t} d\theta = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-i\theta\tau} d\tau \right) e^{i\theta t} d\theta.$$

Der Klammerausdruck ist die Fouriertransformierte $F(\theta)$ von f , und wenn wir die Integrationsvariable θ durch das gewohnte ω ersetzen, erhalten wir

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} F(\omega) d\omega. \quad (62)$$

Beim Grenzprozess $T \rightarrow \infty$ waren wir sehr großzügig, die Sache ist viel komplizierter. Deshalb haben die vorstehenden Überlegungen nur heuristischen Wert. Wir werden aber die Formel (62) weiter unten noch einmal exakt beweisen.

Fazit:

- Man kann T -periodische Schwingungen $f(t)$ als Überlagerung von harmonischen Schwingungen der Frequenzen $2\pi k/T$ interpretieren, und dabei geben die Fourierkoeffizienten von f die Intensität der einzelnen Komponenten an.
- Ebenso kann man auch *aperiodische* Schwingungen als Überlagerung von harmonischen Schwingungen der Frequenzen ω darstellen, wobei allerdings das ω alle reellen Werte in $] -\infty, \infty[$ annehmen kann. Die Intensität der Schwingung $e^{i\omega t}$ wird (bis auf den Faktor 2π) durch die Fouriertransformierte $F(\omega)$ von f an der Stelle ω gegeben.

Das gibt also eine physikalische Interpretation von $F(\omega)$ und erklärt, warum man das Argument mit ω bezeichnet.

Wir gehen nun systematischer auf die Fouriertransformation ein.

Zunächst definieren wir eine Klasse von Funktionen, für die die Fouriertransformation gewiß definiert ist. Wie bei der Laplacetransformation wird sich allerdings herausstellen, dass man in Anwendungen häufig auch andere Funktionen (oder gar verallgemeinerte Funktionen) betrachten muss.

Definition 62 (Schwartzsche Funktionen). Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt eine *Schwartzsche Funktion* oder kurz eine *S-Funktion*, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (i) $f(t)$ ist beliebig oft differenzierbar.
- (ii) Für jedes $k \in \mathbb{N}$ und jedes Polynom $p(t)$ ist $p(t)f^{(k)}(t)$ beschränkt.

Aus $|p(t)f^{(k)}(t)| \leq C$ folgt, dass für alle t außer den Nullstellen von $p(t)$, insbesondere also für großes $|t|$ gilt

$$|f^{(k)}(t)| \leq \frac{C}{|p(t)|}.$$

Deshalb gehen $f(t)$ und alle seine Ableitungen für $t \rightarrow \pm\infty$ schneller gegen Null als jedes Polynom wächst. Man sagt, sie sind *schnell fallend*.

Klar ist, dass Ableitungen von S-Funktionen wieder S-Funktionen sind.

Beispiel 63. Die Funktion $e^{-(t^2)}$ ist eine S-Funktion, und „die meisten“ S-Funktionen, die man durch eine explizite Formel hinschreiben kann, benutzen die e-Funktion. Zum Beispiel ist

$$f(t) = p(t)e^{-t^2}$$

für jedes Polynom $p(t)$ eine S-Funktion. Funktionen, die unendlich oft differenzierbar sind und außerhalb eines endlichen Intervalls verschwinden, sind ebenfalls S-Funktionen, aber es ist nicht so leicht, solche Funktionen explizit anzugeben. \square

Satz 64 (Existenz der Fouriertransformation). Die Fouriertransformation existiert für jede S-Funktion.

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es ein C , so dass

$$|f(t)| \leq \frac{C}{1+t^2} \text{ für alle } t.$$

Weil aber das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{C dt}{1+t^2} = C\pi$ existiert, existiert auch das uneigentliche Integral von $f(t)e^{-i\omega t}$. \square

Der Beweis zeigt außerdem $|\mathcal{F}[f](\omega)| \leq C\pi$, d.h. die Fouriertransformierten von S-Funktionen sind beschränkt.

Satz 65 (Eigenschaften der Fouriertransformierten).

Sind f eine S-Funktion, $a \neq 0$ und $t_0 \in \mathbb{R}$, so gilt

$$\mathcal{F}[f'](\omega) = i\omega\mathcal{F}[f](\omega), \tag{63}$$

$$\mathcal{F}[f]'(\omega) = \mathcal{F}[-itf(t)](\omega), \tag{64}$$

$$\mathcal{F}\left[f\left(\frac{t}{a}\right)\right](\omega) = |a|\mathcal{F}[f](a\omega), \tag{65}$$

$$\mathcal{F}[f(t-t_0)](\omega) = e^{-i\omega t_0}\mathcal{F}[f(t)](\omega). \tag{66}$$

Beweis. Zu (63).

$$\mathcal{F}[f'](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{-i\omega t} dt = f(t)e^{-i\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} + i\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt = i\omega \mathcal{F}[f](\omega).$$

Zu (65). Wir nehmen an, dass $a < 0$, für $a > 0$ ist die Rechnung noch etwas einfacher.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left[f\left(\frac{t}{a}\right)\right](\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{t}{a}\right)e^{-i\omega t/a} dt = \int_{+\infty}^{-\infty} f(\tau)e^{-ia\omega\tau} a d\tau \\ &= a \int_{+\infty}^{-\infty} f(\tau)e^{-ia\omega\tau} d\tau = -a \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-ia\omega\tau} d\tau = |a| \mathcal{F}[f(t)](a\omega). \end{aligned}$$

Die anderen Gleichungen können Sie selbst beweisen. □

Nach (64) ist die Fouriertransformierte einer S-Funktion differenzierbar und die Ableitung ist wieder die Fouriertransformierte einer S-Funktion. Also sind Fouriertransformierte von S-Funktionen beliebig oft differenzierbar. Nach (63) ist weiter $\omega F(\omega)$ und dann auch $p(\omega)F(\omega)$ für jedes Polynom $p(\omega)$ die Fouriertransformierte einer S-Funktion, also nach einer obigen Bemerkung beschränkt, Es folgt:

Satz 66. *Die Fouriertransformierten von S-Funktionen sind wieder S-Funktionen.*

Das ist einer der Gründe, warum man die Fouriertransformation gern auf dem Raum der S-Funktionen studiert.

Wie für die Laplacetransformation beweist man auch für die Fouriertransformation einen

Satz 67 (Faltungssatz). *Sind $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ zwei S-Funktionen, so ist auch $f * g$ eine S-Funktion, und es gilt*

$$\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f]\mathcal{F}[g].$$

Beispiel 68. Wir versuchen, für die einfachste S-Funktion $f(t) = e^{-t^2/2}$ die Fouriertransformierte $F(\omega)$ zu berechnen. Der Versuch einer direkten Integration scheitert kläglich, wir brauchen einen Trick und berechnen mit partieller Integration

$$\begin{aligned} F'(\omega) &= \mathcal{F}[-itf(t)](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} (-it)f(t)e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{(-it)e^{-t^2/2}}_{=u'(t)} \underbrace{e^{-i\omega t}}_{=v(t)} dt = ie^{-t^2/2}e^{-i\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} ie^{-t^2/2}(-i\omega)e^{-i\omega t} dt \\ &= -\omega \mathcal{F}[f](\omega). \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass $\mathcal{F}[f]$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$y'(\omega) + \omega y(\omega) = 0$$

ist. Die kennen wir aber; sie sind $y(\omega) = A e^{-\omega^2/2}$ mit einer beliebigen Konstanten $A = y(0)$. Also wissen wir jetzt

$$F(\omega) = A e^{-\omega^2/2}.$$

Das Gauß-Integral

$$F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{2\pi}$$

ist aus der Analysis II bekannt, und wir erhalten

$$\mathcal{F}[e^{-t^2/2}](\omega) = \sqrt{2\pi} e^{-\omega^2/2}.$$

□

Die Fouriertransformation bildet die S-Funktionen bijektiv auf die S-Funktionen ab, und die Umkehrabbildung lässt sich bequem explizit hinschreiben: Sie ist nämlich beinahe gleich der Fouriertransformation selbst. Das ist der Inhalt des folgenden Satzes.

Satz 69 (Inverse Fouriertransformation). Seien $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine S-Funktion und

$$F := \mathcal{F}[f] : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

ihre Fouriertransformierte. Dann gilt

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[F](-t).$$

Also hat man

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (67)$$

Sie erkennen die Formel vom Anfang dieses Abschnittes wieder. Nun wollen wir sie beweisen. Der Beweis ist wiederum trickreich. Wir führen ihn trotzdem vor, weil seine Rechenschritte bei den Integraltransformationen häufig vorkommen.

Beweis. Wir betrachten zwei S-Funktionen $f(t)$ und $h(t)$. Wir schreiben $F(\omega)$ und $H(\omega)$ für deren Fouriertransformierte und berechnen für $a > 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[h(a\omega)F(\omega)](t) &= \int_{\omega=-\infty}^{\infty} h(a\omega) \left(\int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \right) e^{-it\omega} d\omega \\ &= \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \int_{\tau=-\infty}^{\infty} h(a\omega) f(\tau) e^{-i\omega(\tau+t)} d\tau d\omega \\ &= \int_{\tau=-\infty}^{\infty} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} h(a\omega) f(\tau) e^{-ia\omega \frac{\tau+t}{a}} d\omega d\tau. \end{aligned}$$

Wir substituieren $a\omega = x$ und $\frac{\tau+t}{a} = y$ und erhalten

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[h(a\omega)F(\omega)](t) &= \int_{y=-\infty}^{\infty} \int_{x=-\infty}^{\infty} h(x) f(ay-t) e^{-ixy} \left(\frac{1}{a} dx\right) (a dy) \\ &= \int_{y=-\infty}^{\infty} f(ay-t) \int_{x=-\infty}^{\infty} h(x) e^{-ixy} dx dy \\ &= \int_{y=-\infty}^{\infty} f(ay-t) H(y) dy, \end{aligned}$$

wobei $H(y) = \mathcal{F}[h(x)](y)$ ist.

Man kann zeigen, dass diese Gleichung stetig von a abhängt, und wir betrachten den Limes für $a \rightarrow 0$. Dann folgt:

$$h(0)\mathcal{F}[F(\omega)](t) = f(-t) \int_{-\infty}^{\infty} H(y) dy. \quad (68)$$

Wir wählen nun für h die einzige S-Funktion, mit der wir uns besser auskennen, nämlich $h(t) = e^{-t^2/2}$. Dafür ist $h(0) = 1$ und

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2\pi} e^{-y^2/2} dy = 2\pi.$$

Einsetzen in (68) liefert

$$\mathcal{F}[F(\omega)](-t) = 2\pi f(t).$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Beispiel 70. Die Funktion $f(t) := e^{-|t|}$ ist keine S-Funktion, aber sie fällt schnell, und deshalb existiert ihre Fouriertransformierte $F(\omega)$:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^0 e^t e^{-i\omega t} dt + \int_0^{+\infty} e^{-t} e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{e^{(1-i\omega)t}}{1-i\omega} \Big|_{-\infty}^0 + \frac{e^{(-1-i\omega)t}}{-1-i\omega} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{1-i\omega} - \frac{1}{1+i\omega} = \frac{2}{1+\omega^2}. \end{aligned}$$

$F(\omega)$ ist auch keine S-Funktion, denn $(1+\omega^2)F(\omega)$ geht für $\omega \rightarrow \pm\infty$ nicht gegen 0. Trotzdem existiert auch hier die Fouriertransformierte, und der obige Satz bleibt richtig, es gilt $\mathcal{F}[F(\omega)](t) = 2\pi f(-t)$ und damit

$$\mathcal{F} \left[\frac{1}{1+t^2} \right] (\omega) = \pi e^{-|\omega|}.$$

□

Als Konsequenz aus dem Inversionssatz und dem Faltungssatz 67 ergibt sich

Satz 71 (Produktsatz). Für S-Funktionen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ gilt

$$\mathcal{F}[fg] = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[f] * \mathcal{F}[g]. \tag{69}$$

Beweis. Wir setzen $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)](\omega)$, $G(\omega) = \mathcal{F}[g(t)](\omega)$. Weil die Fouriertransformation umkehrbar ist, müssen wir nur zeigen, dass die beiden Seiten von (69) dieselbe Fouriertransformation haben. Es gilt

$$\mathcal{F}[\mathcal{F}[fg]](t) = 2\pi(fg)(-t)$$

und

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{2\pi} F * G\right](t) = \frac{1}{2\pi} (\mathcal{F}[F]\mathcal{F}[G])(t) = \frac{1}{2\pi} 2\pi f(-t) 2\pi g(-t) = 2\pi(fg)(-t).$$

□

2.2.2 Anwendungen der Fouriertransformation

- Wie die Laplacetransformation kann die Fouriertransformation bei der Lösung von Differentialgleichungen helfen. Wir zeigen das an einem fundamentalen Problem der Wärmeleitung oder Diffusion.
- Eine andere, in der Signalverarbeitung zentrale, Rolle spielt die Fouriertransformation bei der Digitalisierung. Wir behandeln den dafür wichtigen Abtastatz.

Beispiel 72 (Anfangswertproblem der Diffusionsgleichung).

Werkstoffe II, Abschnitt 8.3

Wir betrachten das Diffusionsproblem aus Beispiel 43 in einem beiderseits der yz -Ebene ausgedehnten Raum und vorgegebener Anfangskonzentration $f(x)$, also das Problem.

$$\begin{aligned}u_t &= \lambda u_{xx}, \\u(x, 0) &= f(x).\end{aligned}$$

Wie die Laplacetransformation kann man auch die Fouriertransformation zur Lösung benutzen. Wie wenden sie aber nicht auf t , sondern auf x an und setzen

$$U(\omega, t) := \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-i\omega x} dx.$$

Mit Satz 65 ergibt sich dann aus der Differentialgleichung $U_t = -\omega^2 \lambda U$, und die ist leicht zu lösen:

$$U(\omega, t) = F(\omega) e^{-\omega^2 \lambda t}.$$

Die Funktion $F(\omega) = U(\omega, 0)$ ist offenbar gerade die Fouriertransformation von

$$f(x) = u(x, 0).$$

Wir erinnern nun an

$$\mathcal{F}\left[e^{-x^2/2}\right](\omega) = \sqrt{2\pi} e^{-\omega^2/2}.$$

Daraus erhalten wir

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\lambda t}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{2\lambda t}}\right)^2}\right](\omega) = e^{-\omega^2 \lambda t}.$$

Mit dem Faltungssatz ergibt sich daher

$$U(\omega, t) = \mathcal{F}[f(x)](\omega) \mathcal{F}\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi\lambda t}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{2\lambda t}}\right)^2}\right](\omega) = \mathcal{F}\left[f(x) * \frac{1}{2\sqrt{\pi\lambda t}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{2\lambda t}}\right)^2}\right].$$

Für die Konzentration $u(x, t)$ zur Zeit $t > 0$ findet man:

$$\boxed{u(x, t) = f(x) * \frac{1}{2\sqrt{\pi\lambda t}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{2\lambda t}}\right)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\lambda t}}}{2\sqrt{\pi\lambda t}} d\xi.} \quad (70)$$

Man rechnet durch Differenzieren unter dem Integral leicht nach, dass auch der „Integral-kern“

$$\phi(x, t) := \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\lambda t}}}{2\sqrt{\pi\lambda t}}$$

für jedes feste $\xi \in \mathbb{R}$ eine Lösung der Diffusionsgleichung liefert, die sogenannte in ξ zentrierte *Fundamentallösung* oder *Grundlösung*. Mit Hilfe der Diracfunktion läßt sie sich folgendermaßen interpretieren. Für $\xi_0 \in \mathbb{R}$ ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\xi - \xi_0)g(\xi)d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\xi)g(\xi + \xi_0)d\xi = g(\xi_0).$$

Daher ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi - \xi_0) \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\lambda t}}}{2\sqrt{\pi\lambda t}} d\xi = \frac{e^{-\frac{(x-\xi_0)^2}{4\lambda t}}}{2\sqrt{\pi\lambda t}}.$$

Das ist nach (70) also die Lösung, die einer anfänglich im Punkt ξ_0 lokalisierten Konzentration entspricht.

Das nächste Beispiel betrifft eine Erweiterung der Fouriertransformation auf eine Funktion mit Unstetigkeiten.

Beispiel 73 (Rechteckimpuls). Sei $T > 0$ und

$$r_T(t) := \begin{cases} \frac{1}{2T} & \text{für } |t| < T \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

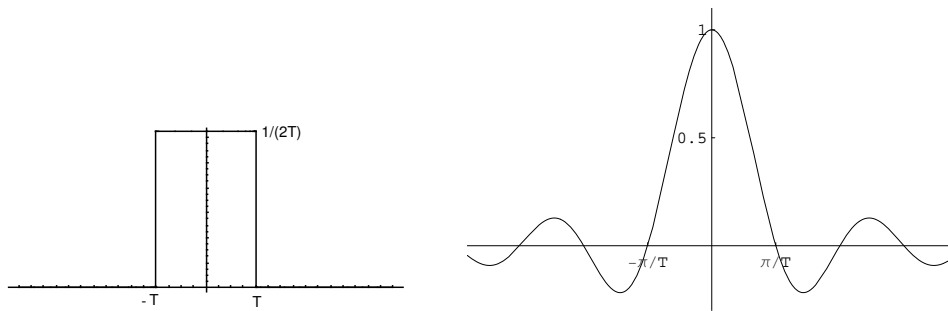
Wir nennen r_T den *Rechteckimpuls der Breite $2T$* . Für ihn erhält man

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[r_T](\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} r_T(t)e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{-1}{2i\omega T} e^{-i\omega t} \Big|_{-T}^T = \frac{1}{2i\omega T} (e^{i\omega T} - e^{-i\omega T}) \\ &= \frac{\sin \omega T}{\omega T}. \end{aligned}$$

Die Funktion

$$\text{si } x := \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 1 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

heißt auch die *Spaltfunktion*.



Wir sehen: In der Fourieranalyse von $r_T(t)$ überwiegen die Frequenzen im Bereich $|\omega| < \pi/T$. Ein Bandpaßfilter für diesen Frequenzbereich verzerrt also Rechteckimpulse $a r_{T_1}(t)$ nicht sehr stark. Da aber die Breite des wesentlichen Frequenzbandes der Impulsdauer umgekehrt proportional ist, ist für $T \ll T_1$ eine starke Verzerrung zu erwarten. \square

[Fouriertransformierte der Diracfunktion. Für $T \rightarrow 0$ geht der Rechteckimpuls gegen die Diracfunktion δ , während andererseits $\lim_{T \rightarrow 0} \text{si}(\omega T) = \text{si } 0 = 1$. Deshalb definiert man

$$\boxed{\mathcal{F}[\delta] = 1.}$$

Die Umkehrformel, deren Anwendbarkeit allerdings einer ausführlicheren Erklärung bedarf, liefert

$$\mathcal{F}[1] = 2\pi\delta.$$

Fouriertransformierte der Spaltfunktion. Aus dem Satz über die Inverse folgt mit vertauschten Rollen von t und ω

$$\mathcal{F}[\text{si}(tT)](\omega) = 2\pi r_T(-\omega) = 2\pi r_T(\omega).$$

Die Fourieranalyse der Spaltfunktion zeigt also, dass an ihr nur Frequenzen in dem endlichen Band zwischen $-T$ und T beteiligt sind. Damit ist sie ein Beispiel für den folgenden Begriff:

Definition 74 (Endliche Bandbreite). Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *von endlicher Bandbreite*, wenn es ein ω_0 gibt, so dass

$$\mathcal{F}[f](\omega) = 0 \text{ für alle } \omega \text{ mit } |\omega| > \omega_0.$$

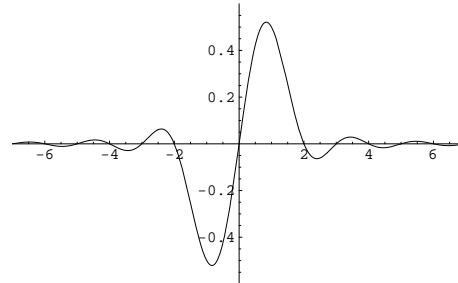
Beispiel 75. Der Rechteckimpuls ist nicht von endlicher Bandbreite, aber die Spaltfunktion ist es.

Ein weiteres Beispiel liefert die Funktion

$$f(t) := \frac{\sin(\pi t)}{\pi(1-t^2)}.$$

Zeigen Sie mit Hilfe der Umkehrformel, dass

$$F(\omega) = \begin{cases} -i \sin \omega & \text{für } |\omega| \leq \pi, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$



□

In der Nachrichtentechnik möchte man wissen, wieviel Information man verliert, wenn man ein kontinuierliches Signal nur an diskreten Stellen „abtastet“, vgl. [Signale und Systeme, Abschnitt 11]. Der folgende Satz besagt, dass Funktionen von endlicher Bandbreite ideal sind: Wenn man ihre Werte an hinreichend eng gewählten Stellen abtastet, hat man gar keinen Informationsverlust: Man kann daraus die Funktion eindeutig rekonstruieren.

Satz 76 (Abtastsatz von Kotelnikov/Shannon). Seien f_1, f_2 zwei S -Funktionen von endlicher Bandbreite ω_1 bzw. ω_2 und $\omega_0 \geq \max(\omega_1, \omega_2)$. Gilt dann

$$f_1\left(k \frac{\pi}{\omega_0}\right) = f_2\left(k \frac{\pi}{\omega_0}\right)$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$, so gilt $f_1(t) = f_2(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Genauer ist

$$f_1(t) = f_2(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_1\left(-k \frac{\pi}{\omega_0}\right) \text{si}(k\pi + t\omega_0).$$

Beweis. Sei f eine S -Funktion von endlicher Bandbreite ω_0 und $F(\omega)$ seine Fouriertransformierte. Dann ist

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{it\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} F(\omega) e^{it\omega} d\omega$$

Wir benutzen nun die endliche Bandbreite von f . Wir setzen $F(\omega)$ zu einer Funktion $\tilde{F}(\omega)$ mit Periode $2\omega_0$ auf ganz \mathbb{R} fort und entwickeln \tilde{F} in eine Fourierreihe, die wegen der stetigen Differenzierbarkeit von F konvergent ist. Für $|\omega| \leq \omega_0$ gilt dann

$$F(\omega) = \tilde{F}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\omega \frac{k2\pi}{2\omega_0}}$$

mit den Fourierkoeffizienten

$$c_k = \frac{1}{2\omega_0} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \tilde{F}(\omega) e^{-i\omega \frac{k2\pi}{2\omega_0}} d\omega = \frac{2\pi}{2\omega_0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega \frac{k2\pi}{2\omega_0}} d\omega = \frac{\pi}{\omega_0} f\left(-\frac{k\pi}{\omega_0}\right).$$

Einsetzen in die Integralformel für $f(t)$ liefert

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{\omega_0} f\left(-\frac{k\pi}{\omega_0}\right) e^{i\omega \frac{k2\pi}{2\omega_0}} e^{it\omega} d\omega = \frac{1}{2\omega_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} f\left(-\frac{k\pi}{\omega_0}\right) e^{i\omega \frac{k\pi+t\omega_0}{\omega_0}} d\omega \\ &= \frac{1}{2\omega_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(-\frac{k\pi}{\omega_0}\right) \frac{\omega_0}{i(k\pi+t\omega_0)} e^{i\omega \frac{k\pi+t\omega_0}{\omega_0}} \Big|_{-\omega_0}^{\omega_0} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{f\left(-\frac{k\pi}{\omega_0}\right)}{k\pi+t\omega_0} \frac{e^{i(k\pi+t\omega_0)} - e^{-i(k\pi+t\omega_0)}}{2i} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{f\left(-\frac{k\pi}{\omega_0}\right)}{k\pi+t\omega_0} \sin(k\pi+t\omega_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(-\frac{k\pi}{\omega_0}\right) \operatorname{si}(k\pi+t\omega_0). \end{aligned}$$

□

Der Satz von Shannon in der Praxis. Zunächst bemerken wir

- Im obigen Satz verwendet man, wie überhaupt in der Theorie der Fouriertransformation, nicht die übliche Frequenz ν , sondern die Kreisfrequenz³ $\omega = 2\pi\nu$. Mit $\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ ist also das zeitliche Abtastintervall im obigen Satz

$$\frac{\pi}{\omega_0} = \frac{1}{2\nu_0}.$$

Die Abtastfrequenz muss das Doppelte der maximalen Frequenz sein.

- In der Mathematik sind Funktionen endlicher Bandbreite eher die Ausnahme. In der Praxis gibt es dagegen keine beliebig großen Frequenzen, und aus Kapazitätsgründen filtert man zum Beispiel Tondokumente wie CDs auf die physiologisch maximal relevanten 20kHz. Ein solches Signal hat dann zwangsläufig beschränkte Bandbreite und kann aus den Abtastwerten mit der Frequenz 40kHz rekonstruiert werden, wie dies in den digitalen Wiedergabegeräten geschieht.

³ Ein Punkt, der mit der Geschwindigkeit ω auf dem Einheitskreis herumläuft, läuft in der Zeiteinheit $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ -mal herum.

Umkehrung der Laplacetransformation. Wir schließen diesen Abschnitt mit einer Überlegung zum Zusammenhang von Fourier- und Laplacetransformation, die auch einen Beweis des Satzes 41 von Lerch über die Eindeutigkeit der Laplacetransformation liefert.

Sei $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ stückweise stetig und von exponentieller Ordnung und sei die Laplace-Transformation $F(s)$ von f für $\operatorname{Re}(s) = \alpha$ konvergent. Wir setzen f auf ganz \mathbb{R} fort, indem wir $f(t) = 0$ für $t < 0$ setzen. Dann ist

$$F(\alpha + i\omega) = \int_0^\infty f(t)e^{-(\alpha+i\omega)t} dt = \int_{-\infty}^\infty e^{-\alpha t} f(t)e^{-i\omega t} dt = \mathcal{F}[e^{-\alpha t} f(t)](\omega).$$

Obwohl $e^{-\alpha t} f(t)$ im allgemeinen in 0 unstetig und damit keine S -Funktion ist, kann man zeigen, dass der Satz über die inverse Fouriertransformation gilt. Er liefert

$$e^{-\alpha t} f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty F(\alpha + i\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

oder

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^\infty F(\alpha + i\omega) e^{(\alpha+i\omega)t} i d\omega \quad (71)$$

Rechts wird also die Funktion $F(s)e^{st}$ über eine Parallele zur imaginären Achse (mit der Abszisse α) integriert.

Bemerkungen:

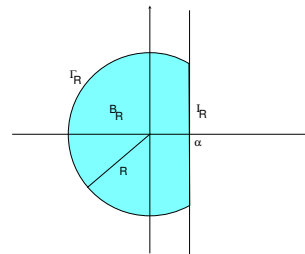
1. Wenn f nicht beliebig oft differenzierbar, sondern wie häufig bei der Laplacetransformation nur stückweise differenzierbar ist, liefert die rechte Seite an den Unstetigkeitsstellen nicht $f(t)$, sondern ähnlich wie bei den Fourierreihen

$$\frac{f(t+) + f(t-)}{2}.$$

2. In der *Analysis III für Ingenieure* lernen Sie, wie man das Integral (71) ausrechnet, ohne wirklich zu integrieren. Wir zitieren hier das Ergebnis, ohne auf die Bedeutung der verwendeten Begriffe einzugehen: In vielen Fällen ist $F(s)$ bis auf isolierte Singularitäten auf ganz \mathbb{C} definiert und analytisch, wobei die Singularitäten im Bereich $\operatorname{Re}(s) < \alpha$ liegen. In diesem Fall kann man den Residuensatz zur Berechnung des Integrals (71) benutzen. Das Integral über den Rand $I_R \cup \Gamma_R$ des Bereiches B_R ist nach diesem Satz gleich der $2\pi i$ -fachen Summe der Residuen von $F(s)e^{st}$ in B_R .

Für hinreichend großes R enthält B_R in vielen Fällen *alle* Singularitäten s_k , so dass die Residuensumme für $R \rightarrow \infty$ konstant bleibt, während das Integral über Γ_R gegen null geht. In diesen Fällen ist also für hinreichend großes R

$$f(t) = \sum_{s_k \in B_R} \operatorname{Res}(F(s)e^{st}, s_k).$$



3 Partielle Differentialgleichungen

Die partiellen Differentialgleichungen bilden ein sehr umfang- und anwendungsreiches Kapitel der Mathematik. Eine halbwegs systematische Theorie gibt es eigentlich nur für spezielle Klassen oder Typen von Differentialgleichungen, aber selbst die Systematik jenseits von Ordnung, Linearität, also etwa eine Klasseneinteilung in sogenannte elliptische, hyperbolische und parabolische Typen ist schwierig und nur sinnvoll, wenn man zu einzelnen Typen dann auch substantielle Ergebnisse darstellen kann. Aber selbst bei Beschränkung auf einen Typ würde damit der Rahmen dieser Vorlesung bei weitem gesprengt.

Aufgrund der theoretischen Komplexität ist die unspezifizierte direkte Behandlung partieller Differentialgleichungen mit mathematischer Software so gut wie unmöglich. Die meisten PD-Probleme lassen sich nur numerisch behandeln. Die Auswahl der richtigen numerischen Verfahren und deren Anwendung erfordern Kenntnis und Erfahrung. Glücklicherweise treten je nach Anwendungsgebiet spezielle Typen partieller Differentialgleichungen auf, so dass solche Erfahrung sich bei Mathematikern und Ingenieuren im jeweiligen Bereich ausbilden und sammeln kann.

Wir beschränken uns daher darauf, zunächst an zwei fundamentalen Beispielen, der Wärmeleitungs- oder Diffusionsgleichung auf der einen, der Schwingungs- oder Wellengleichung auf der anderen Seite einige ebenfalls fundamentale Methoden und Phänomene zu erläutern.

Anschließend behandeln wir für diese Gleichungen den Separationsansatz in zwei oder drei Raumdimensionen im Falle symmetrischer Probleme ausführlicher.

Eine umfangreiche Behandlung von weiteren Einzelbeispielen finden Sie im Meyberg/Vachnauer, eine systematisch sehr viel gründlichere Behandlung im Burg/Haf/Wille, vgl. Literaturverzeichnis.

Vieles aus diesem Kapitel finden Sie in ähnlicher Form in der Vorlesung über Theoretische Elektrotechnik wieder [*Theoretische Elektrotechnik, Abschnitt 7.1*].

3.1 Separation und Superposition

- Wir betrachten die Schwingungsgleichung als eine in der ETechnik wie in der Mechanik gleichermaßen wichtige partielle Differentialgleichung.
- An diesem Beispiel demonstrieren wir ausführlich den Separationsansatz als eine Lösungsmethode.
- Wir diskutieren, wieviele Lösungen es gibt, wie man sie alle(?) darstellen kann und welche zusätzlichen Daten eine Lösung eindeutig festlegen.

Beispiel 77 (Schwingende Saite).

Theoretische Elektrotechnik, Abschnitt 7.1, Popov: Mechanik III, Vorlesung 2

Die Ausbreitung elektromagnetischer wie akustischer und anderer Wellen wird durch die *Wellengleichung* oder *Schwingungsgleichung*

$$\Delta u = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (72)$$

beschrieben. Dabei ist $u(x_1, \dots, x_n, t)$ eine Funktion der (räumlichen Variablen x_1, \dots, x_n und der Zeitvariablen t , und Δ ist der räumliche Laplaceoperator

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}.$$

Offenbar ist (72) eine homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung, der Prototyp einer sogenannten *hyperbolischen* Gleichung⁴.

Dann ist die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (73)$$

Wir machen den Ansatz, dass u ein Produkt zweier Funktionen ist, die jeweils nur von einer Variablen abhängen:

$$u(x, t) = X(x)T(t).$$

Warum machen wir diesen Ansatz? Weil man seit Euler und Bernoulli, also seit 200 Jahren weiß, dass man damit Lösungen der Gleichung findet. Allerdings sehen nicht alle Lösungen so aus: Wellen dieser Form haben zu jedem Zeitpunkt bis auf den Faktor $T(t)$ dasselbe räumliche Profil. Zum Beispiel bleiben die Knoten (=Nullstellen) der Welle stets an derselben Stelle, und das ist bei manchen Wellen, zum Beispiel auf dem Meer, sicher nicht der Fall. Vielleicht sind auch die Lösungen, die wir im konkreten Fall suchen, nicht von dieser Form. Dennoch bringt uns der Ansatz der Lösung näher, wie wir weiter unten sehen werden. Der Ansatz klappt allerdings nicht bei jeder Gleichung, aber wir wollen und müssen ja auch nicht „jede Gleichung“ lösen.

Setzen wir also den Ansatz in (73) ein und teilen wir durch $u = XT$, wobei wir annehmen, dass dieses Produkt keine Nullstellen hat. Wir erhalten wegen $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x)T(t)$ und der entsprechenden Gleichung für T

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{c^2} \frac{T''(t)}{T(t)}.$$

Die linke Seite hängt nur von x , die rechte nur von t ab, deshalb bezeichnet man den obigen Ansatz auch als *Separationsansatz*. Er separiert, d.h. er trennt die Variablen. Ändert man x , so ändert sich $\frac{T''(t)}{T(t)}$ natürlich nicht. Deshalb ändert sich aber auch $\frac{X''(x)}{X(x)}$ nicht! Und wenn man t ändert, gilt Entsprechendes. Also sind beide Seiten konstant, etwa

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda = \frac{1}{c^2} \frac{T''(t)}{T(t)},$$

mit einer beliebigen reellen Konstanten λ . Also

$$X'' - \lambda X = 0, \quad T'' - c^2 \lambda T = 0.$$

Das sind zwei sehr einfache *gewöhnliche* Differentialgleichungen. Die Lösungen sind

$$X(x) = ae^{\sqrt{\lambda}x} + be^{-\sqrt{\lambda}x}, \quad T(t) = \alpha e^{\sqrt{\lambda}ct} + \beta e^{-\sqrt{\lambda}ct},$$

falls $\lambda > 0$. Für $\lambda < 0$ setzen wir $\lambda = -\omega^2$ und erhalten als Lösung

$$X(x) = a \cos(\omega x) + b \sin(\omega x), \quad T(t) = \alpha \cos(c\omega t) + \beta \sin(c\omega t).$$

Überlegen Sie selbst, welche Lösungen $\lambda = 0$ liefert.

⁴“Hyperbolisch”, weil $x_1^2 + \dots + x_n^2 = \frac{1}{c^2} t^2$ im \mathbb{R}^{n+1} mit den Koordinaten x_1, \dots, x_n, t ein Hyperboloid beschreibt. Wir betrachten den einfachsten Fall, eine räumlich eindimensionale Welle.

Die cos/sin-Variante liefert im Grunde auch alle Lösungen mit $\lambda > 0$, wenn wir nämlich imaginäre Werte ω erlauben. Und weil wir hier besonders an dem Fall $\lambda < 0$ interessiert sind, beschränken wir uns auf diese Variante. Es folgt

$$u(x, t) = (a \cos(\omega x) + b \sin(\omega x))(\alpha \cos(c\omega t) + \beta \sin(c\omega t)). \quad (74)$$

mit beliebigen Konstanten a, b, α, β . Unsere Rechnung ging von der (bisher unbewiesenen) Voraussetzung aus, dass (73) tatsächlich eine „Produkt-Lösung“ besitzt. Außerdem hatten wir $X(x)T(t) \neq 0$ vorausgesetzt, was bei den nun gefundenen trigonometrischen Funktionen sicher nicht wahr ist. Deshalb müssen wir zeigen, dass $u(x, t)$ wirklich eine Lösung ist. Machen Sie die einfache Probe!

Wieviele Lösungen können wir auf diese Weise finden?

Offenbar unendlich viele: Wir haben freie Wahl der *Separationskonstante* $\lambda = -\omega^2$ und dazu dann der Konstanten $a = a_\omega, \dots, \beta = \beta_\omega$. Man sieht sofort, dass Linearkombinationen von Lösungen wieder Lösungen sind:

Die Lösungen von (73) bilden einen Vektorraum, es gilt – wie für alle linearen homogenen Differentialgleichungen – das *Superpositionsprinzip*. Aber die Lösungen für verschiedene Werte von ω^2 sind sämtlich linear unabhängig. Der Lösungsraum ist unendlich-dimensional! Entsprechend kann man nicht nur endlich viele Lösungen linear kombinieren, wie zum Beispiel

$$u(x, t) = \sum_{m=1}^n a_m \cos(\omega_m x) \sin(c\omega_m t)$$

mit beliebigen a_m und ω_m , sondern bei „guter Konvergenz“ liefern auch unendliche Linearkombinationen wie

$$u(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos(\omega_m x) \sin(c\omega_m t)$$

neue Lösungen. Ja, man kann – und muss häufig – sogar kontinuierlich viele Lösungen überlagern in der Form

$$u(x, t) = \int_0^{\infty} a(\mu) \cos(\omega_\mu x) \sin(c\omega_\mu t) d\mu.$$

Dabei hat man also nicht mehr eine diskrete Folge von Frequenzen, sondern die Frequenzen wechseln kontinuierlich. Integriert wird über μ .⁵ Und natürlich kann man die erwähnten anderen Lösungen ($\lambda \geq 0$) einbeziehen. Ob das dann alle Lösungen der obigen Gleichung gibt? In vielen Fällen schon. Wir gehen darauf aber nicht näher ein, weil es eigentlich nicht unser Problem ist.

Dem Ingenieur (oder Physiker) geht es vielmehr in der Regel um Probleme, welche allein durch eine Differentialgleichung wie die Schwingungsgleichung nicht vollständig erfaßt werden. Es kommen zusätzliche Gleichungen oder Bedingungen hinzu, und erst durch sie wird aus der Fülle der mathematischen Lösungen der wirklich interessierende Bereich herausgegriffen.

Randbedingungen. Interpretiert man (73) als die Gleichung für eine bei $x = 0$ und $x = L$ fixierte schwingende Saite, so hat man eine sogenannte *Randbedingung*.

$$u(0, t) = u(L, t) = 0. \quad (75)$$

⁵Das erinnert an den Übergang von den Fourierreihen zur Fouriertransformation, und hängt damit inhaltlich zusammen.

Wir unterstellen, dass die Lösung von der Form

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos(\omega_k x) + b_k \sin(\omega_k x)) (\alpha_k \cos(c\omega_k t) + \beta_k \sin(c\omega_k t)) \quad (76)$$

ist. Einsetzen der ersten Bedingung aus (75) liefert:

$$0 = u(0, t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (\alpha_k \cos(c\omega_k t) + \beta_k \sin(c\omega_k t))$$

Also müssen wegen der linearen Unabhängigkeit alle $a_k \alpha_k = a_k \beta_k = 0$ sein. Weil $\alpha_k = \beta_k = 0$ zur Folge hat, dass der ganze k -Term verschwindet, ist also o.E. $a_k = 0$ für alle k . Einsetzen von $x = L$ liefert dann

$$0 = u(L, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(\omega_k L) (\alpha_k \cos(c\omega_k t) + \beta_k \sin(c\omega_k t)),$$

und ein analoges Argument wie oben liefert, dass $\omega_k L / \pi$ ganzzahlig sein muss. Insbesondere scheiden für das Randwertproblem also die Separationslösungen mit $\lambda > 0$ aus, weil der \sinh keine Nullstellen außer 0 besitzt. Dagegen kommen alle $\lambda = -\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2$ mit ganzzahligem k in Frage. Damit erhalten wir, wenn wir noch die b_k in die α_k und β_k stecken

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) (\alpha_k \cos\left(\frac{ck\pi}{L}t\right) + \beta_k \sin\left(\frac{ck\pi}{L}t\right)). \quad (77)$$

Machen Sie sich klar, warum man nur positive k berücksichtigen muss. Die Werte $\mu_k = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2$ nennen wir auch die *Eigenwerte* des Randwertproblems

$$\boxed{X'' + \mu X = 0, \quad X(0) = X(L) = 0.}$$

Anfangsbedingungen. Physikalisch ist es klar, dass die Schwingung der Saite eindeutig definiert ist, wenn wir noch wissen, wie sie zur Zeit $t = 0$ aussieht und sich bewegt. Man kann also vermutlich *Anfangsbedingungen* in Form von zwei Funktionen $u_0(x), u_1(x)$ für $0 \leq x \leq L$ vorgeben, die an den Enden verschwinden, und dann eine eindeutige Lösung $u(x, t)$ mit

$$\boxed{u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = u_1(x)}$$

finden. Wir versuchen, die Koeffizienten α_k, β_k in (77) entsprechend anzupassen, und da kommt tatsächlich die Fouriertheorie zum Einsatz. Mit (77) und den Randbedingungen erhalten wir

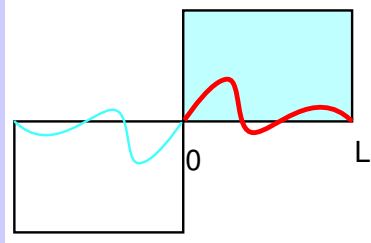
$$u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right),$$

und, wenn man die Reihe gliedweise differenzieren darf⁶, ergibt sich

⁶ In der Analysis haben Sie gelernt, dass man zwar Potenzreihen gliedweise differenzieren darf, Fourierreihen aber im allgemeinen nicht! In speziellen Fällen darf man das aber doch, zum Beispiel, wenn die Koeffizienten schnell fallen. Im folgenden werden wir wiederholt Fourierreihen differenzieren, deren Koeffizienten wir noch gar nicht kennen. Damit leiten wir also nicht eine Lösung des Problems her, sondern einen *Kandidaten* für die Lösung. Wir müssten also eigentlich immer zum Schluss die *Probe* machen! Diese Schwierigkeit übergehen wir aber meistens.

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \frac{ck\pi}{L} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right).$$

Wir müssen also u_0 und u_1 gewissermaßen in Fourierreihen entwickeln, obwohl sie nur auf $[0, L]$ definiert und damit sicher nicht periodisch sind. Wie stellen uns aber einfach vor, sie wären nur ein Ausschnitt aus einer periodischen Funktion \tilde{u}_0 bzw. \tilde{u}_1 mit der Periode $2L$, die überdies *ungerade* ist. Weil die Funktionen an den Enden des Intervalls $[0, L]$ verschwinden, gibt es so eine erweiterte Funktion:



Wenn u_0 und u_1 auch noch stetig differenzierbar sind, liefert die Theorie der Fourierreihen

$$\alpha_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \tilde{u}_0(x) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx$$

und ebenso

$$\frac{ck\pi}{L} \beta_k = \frac{2}{L} \int_0^L u_1(x) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx.$$

Mit diesen Werten ist also

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \left(\alpha_k \cos\left(\frac{k\pi}{L}ct\right) + \beta_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}ct\right) \right).$$

die Lösung unsere Rand-Anfangswertproblems. Diese Lösung ist also eine Superposition (=Linearkombination) von Separationslösungen der Gestalt (76). Sie besteht aus einer Grundschwingung ($k=1$) und einer Folge von Oberschwingungen. In der Akustik sind das die Obertönen. Ihre Amplituden $\sqrt{\alpha_k^2 + \beta_k^2}$ bestimmen die Klangfarbe des Tones.

Modifikationen der Randbedingungen. Wir bleiben bei der Schwingungsgleichung in einer Raumdimension. Die im Beispiel geforderten homogenen Randbedingungen

$$u(0, t) = 0 = u(L, t)$$

waren durch die Beschränkung auf $\sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$ -Terme mit ganzzahligem k besonders leicht zu erfüllen. Aber es kommen natürlich auch kompliziertere Randbedingungen vor. Dafür zwei Beispiele:

- Man kann verlangen, dass

$$u(0, t) = a, \quad u(L, t) = b$$

mit $(a, b) \neq (0, 0)$, vergleichen sie etwa [Theoretische Elektrotechnik, A 7.1]. Solche inhomogenen Randbedingungen kann man „homogenisieren“: Ist u eine Lösung mit diesen Randbedingungen, so ist

$$\hat{u}(x, t) = u(x, t) - \left(\frac{b-a}{L}x + a \right)$$

eine Lösung mit $\hat{u}(0, t) = 0 = \hat{u}(L, t)$ und umgekehrt, weil der lineare Korrekturterm beim zweimaligen Ableiten verschwindet.

- Man kann auch verlangen, dass

$$u(0, t) = 0 = u_x(L, t).$$

Das liefert ein Modell für akkustische Schwingungen in einem Blasinstrument. In diesem Fall folgt wie oben

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2L}x\right) \left(\alpha_k \cos\left(\frac{(2k+1)c\pi}{2L}t\right) + \beta_k \sin\left(\frac{(2k+1)c\pi}{2L}t\right) \right). \quad (78)$$

Aus den Überlegungen im vorstehenden Beispiel wollen wir festhalten:

- Der Lösungsraum einer linearen homogenen partiellen Differentialgleichung ist in der Regel ein unendlich-dimensionaler Vektorraum. Im inhomogenen oder sogar nichtlinearen Fall hat man unendlich viele Freiheitsgrade. Das ist nicht so überraschend, weil man statt endlich vieler Anfangswerte hier *Anfangsfunktionen* vorgeben kann.
- Die Lösung wird in der Regel durch eine Kombination von Rand- und Anfangswertvorgaben eindeutig bestimmt.
- Der Separationsansatz in Verbindung mit Superposition ist wenigstens im homogenen linearen Fall einen Versuch wert.

Beispiel 78 (Klavier). Den Anschlag der Saite beim Klavier kann man modellieren durch die Anfangsbedingungen

$$u(x, 0) = 0$$

und

$$u_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\epsilon L} & \text{für } (a-\epsilon)L \leq x \leq (a+\epsilon)L \\ 0 & \text{sonst für } x \geq 0 \end{cases}$$

mit sehr kleinem ϵ . Das entspricht einem (Einheits-)Impuls an der Anschlagstelle $x = aL$, wobei $0 < a < 1$. In der Lösung

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) (\alpha_k \cos\left(\frac{k\pi}{L}ct\right) + \beta_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}ct\right)).$$

des Randwertproblems wird dann $\alpha_k = 0$ und

$$\beta_k = \frac{2}{ck\pi} \int_{(a-\epsilon)L}^{(a+\epsilon)L} \frac{1}{2\epsilon L} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx = \frac{2}{c\pi^2\epsilon} \frac{\sin(ka\pi) \sin(k\epsilon\pi)}{k^2}.$$

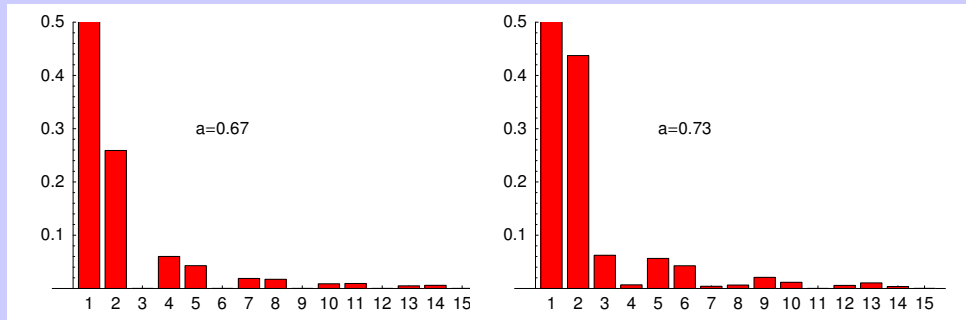
Es folgt

$$u(x, t) = \frac{2}{c\pi^2\epsilon} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\pi a) \sin(k\pi\epsilon)}{k^2} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{ck\pi}{L}t\right)$$

Die Energie der k -ten Oberschwingung relativ zur Grundschwingung ist also

$$\left(\frac{\sin(k\pi a) \sin(k\pi \epsilon)}{k^2 \sin(\pi a) \sin(\pi \epsilon)} \right)^2.$$

Durch Wahl der Anschlagstelle kann man unerwünschte Obertöne minimieren, z.B. den 7. und den 13. (Sexte+3/8 Ton bzw. Sexte-1/4 Ton). Wir geben für zwei ähnliche Werte von a die relativen Energiespektren der Oberschwingungen an. Es ist erstaunlich, wie stark sie differieren.



Beachten Sie die Skala auf der Ordinate. Die Höhe der Grundschwingung ($k = 1$) ist in beiden Fällen 1.

Beispiel 79 (Diffusionsgleichung).

Werkstoffe II, Abschnitt 8.3

Wir betrachten die Wärmeleitungs- oder Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (79)$$

Der Separationsansatz liefert hierfür Lösungen

$$u(x, t) = e^{-\nu^2 t} \cos \frac{\nu x}{\sqrt{\lambda}}.$$

Nach dem Superpositionsprinzip sind auch die Funktionen

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(\nu) e^{-\nu^2 t} \cos \frac{\nu x}{\sqrt{\lambda}} d\nu,$$

bei „guter“ Konvergenz Lösungen von (79). Insbesondere erhält man für $C = \frac{1}{2\pi\sqrt{\lambda}}$ (mit Mathematica) die Lösung

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} C e^{-\nu^2 t} \cos \frac{\nu x}{\sqrt{\lambda}} d\nu = \frac{1}{2\sqrt{\pi\lambda t}} e^{-\frac{x^2}{4\lambda t}}.$$

Diese Lösung hatten wir bereits im Beispiel 72 mit Hilfe der Fouriertransformation gefunden. Sie ist sicherlich selbst nicht separiert, aber eben Superposition von separierten Lösungen.

3.2 Ebene-Wellen-Lösung nach d'Alembert

- Wir diskutieren für die Wellengleichung (72) in beliebiger Raumdimension n einen ganz anderen Lösungsansatz.

Wir machen den Ansatz

$$u(\vec{x}, t) = f(\vec{k} \cdot \vec{x} - ct) \quad (80)$$

mit einem festen Vektor $\vec{k} \in \mathbb{R}^n$. Einsetzen in die Gleichung liefert

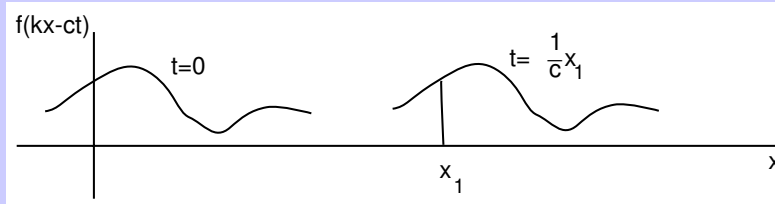
$$0 = \Delta u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum k_i^2 f''(\vec{k} \cdot \vec{x} - ct) - f''(\vec{k} \cdot \vec{x} - ct) = \left(\sum k_i^2 - 1 \right) f''(\vec{k} \cdot \vec{x} - ct).$$

Wir sehen, dass (80) für *beliebige* zweimal differenzierbare Funktionen f eine Lösung liefert, wenn nur $\sum k_i^2 = 1$, d.h. \vec{k} ein Einheitsvektor ist.

Statt $f(\vec{k} \cdot \vec{x} - ct)$ tut es natürlich auch $f(\vec{k} \cdot \vec{x} + ct)$ und damit jede Linearkombination

$$af(\vec{k} \cdot \vec{x} - ct) + bf(\vec{k} \cdot \vec{x} + ct).$$

Die Interpretation dieses von d'Alembert entdeckten Sachverhalts ist die folgende. Die Funktion f beschreibt das Profil (Amplitude) einer Welle. Weil für feste Zeit t die Amplitude $f(\vec{k} \cdot \vec{x} - ct)$ senkrecht zu \vec{k} konstant ist, hat man (bei $n = 3$) ebene Wellenfronten, die sich unverzerrt (=dispersionsfrei) mit der Geschwindigkeit c in Richtung \vec{k} ausbreiten.



Beispiel 80 (Telegraphengleichung). Für die Signalübertragung durch Kabel ergibt sich eine modifizierte Wellengleichung, die sogenannte Telegraphengleichung

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (\alpha + \beta) \frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \beta u = 0. \quad (81)$$

Dafür kann man ebenfalls den Ebene-Wellen-Ansatz versuchen, muss aber eine Dämpfung in Kauf nehmen, für die die Koeffizienten α (=kapazitive Dämpfung) und β (=induktive Dämpfung) verantwortlich sind. Eine wichtige Frage ist die Verzerrungsfreiheit der Übertragung. Im Idealfall hat man

$$u(x, t) = e(t)f(x - ct) \quad (82)$$

für beliebige Funktionen f mit einer Dämpfung $e(t)$, aber es ist gar nicht klar, ob es eine solche Lösung gibt. Wir testen das. Einsetzen in (81) liefert

$$\begin{aligned}
0 &= c^2 e(t) f''(x - ct) \\
&\quad - (e''(t) f(x - ct) + 2e'(t) f'(x - ct)(-c) + e(t) f''(x - ct) c^2) \\
&\quad - (\alpha + \beta) (e'(t) f(x - ct) + e(t) f'(x - ct)(-c)) \\
&\quad - \alpha \beta f(x - ct) \\
&= f''(x - ct) (c^2 e(t) - c^2 e(t)) \\
&\quad + f'(x - ct) (2ce'(t) + (\alpha + \beta)ce(t)) \\
&\quad + f(x - ct) (-e''(t) - (\alpha + \beta)e'(t) - \alpha\beta e(t)).
\end{aligned}$$

Da dies für beliebige Funktionen f gelten soll, können wir insbesondere $f(\tau) = 1$ und $f(\tau) = \tau$ wählen und erhalten

$$e''(t) + (\alpha + \beta)e'(t) + \alpha\beta e(t) = 0 \quad (83)$$

$$2ce'(t) + (\alpha + \beta)ce(t) = 0. \quad (84)$$

Gelten umgekehrt diese beiden Gleichungen, so ist (82) offenbar eine gedämpft-dispersionsfreie Lösung der Telegraphengleichung. Aus (84) folgt nun

$$e(t) = \text{const} e^{-\frac{\alpha+\beta}{2} t}.$$

Einsetzen in (83) liefert

$$0 = \left(-\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2 - \frac{\alpha + \beta}{2}(\alpha + \beta) + \alpha\beta = -\frac{(\alpha - \beta)^2}{4},$$

also $\alpha = \beta$. Damit überträgt das Kabel beliebige Signale bis auf Dämpfung verzerrungsfrei genau dann, wenn kapazitive und induktive Dämpfung gleich sind.

3.3 Separation in Zylinder- und Kugelkoordinaten

- Wir behandeln symmetrische DGL-Probleme durch den Einsatz angepasster Koordinatensysteme, wobei die Grundidee nach wie vor der Eulersche Separationsansatz ist.
- Wir stoßen dann nicht nur auf Sinusgleichungen, sondern auf kompliziertere gewöhnliche Differentialgleichungen, mit denen wir uns anschließend beschäftigen wollen.

Wir beschränken uns auf die Wellengleichung, die Methode ist aber gleichermaßen auf die Wärmeleitungsgleichung anwendbar, vgl. etwa [*Energie-, Impuls- und Stofftransport, Abschnitt 2.3*]. Die Wellengleichung in diesem Zusammenhang wird behandelt in [*Theoretische Elektrotechnik, Abschnitt 7*].

3.3.1 Zylinderkoordinaten

Wir untersuchen die Hohlräumsschwingung in einem Kreiszyylinder vom Radius 1 und der Höhe π . Wir schreiben die Wellengleichung in Zylinderkoordinaten

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

und machen einen Produktansatz

$$u(\rho, \phi, z, t) = R(\rho)\Phi(\phi)Z(z)T(t).$$

Einsetzen in die Differentialgleichung und Division mit u liefert

$$\frac{R''(\rho)}{R(\rho)} + \frac{1}{\rho} \frac{R'(\rho)}{R(\rho)} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\Phi''(\phi)}{\Phi(\phi)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} = \frac{1}{c^2} \frac{T''(t)}{T(t)}.$$

Die Zeit- und die z-Komponente. Wie im letzten Abschnitt folgt daraus

$$T''(t) = c^2 \text{const} \cdot T(t) =: -\omega^2 T(t),$$

wobei ω^2 positiv oder negativ, d.h. ω reell oder rein imaginär sein kann. Weiter ist

$$Z''(z) = -h^2 Z(z)$$

mit einer (ebenfalls positiven oder negativen) Konstanten h^2 . Das liefert die Gleichungen

$$T''(t) + \omega^2 T(t) = 0, \quad Z''(z) + h^2 Z(z) = 0. \quad (85)$$

Die Winkelkomponente. Weiter sehen wir, dass

$$\frac{R''(\rho)}{R(\rho)} + \frac{1}{\rho} \frac{R'(\rho)}{R(\rho)} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\Phi''(\phi)}{\Phi(\phi)} = -\mu^2$$

für eine Konstante μ^2 mit

$$\mu^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - h^2. \quad (86)$$

Es folgt

$$\rho^2 \frac{R''(\rho)}{R(\rho)} + \rho \frac{R'(\rho)}{R(\rho)} + \mu^2 \rho^2 + \frac{\Phi''(\phi)}{\Phi(\phi)} = 0.$$

Wir finden

$$\Phi''(\phi) + \lambda^2 \Phi(\phi) = 0 \quad (87)$$

und

$$\rho^2 \frac{R''(\rho)}{R(\rho)} + \rho \frac{R'(\rho)}{R(\rho)} + \mu^2 \rho^2 - \lambda^2 = 0. \quad (88)$$

Weil ϕ eine Winkelkoordinate in der Ebene ist, muss Φ die Periode 2π haben. Die komplexe Lösungsbasis von (87) ist $e^{\pm i\lambda\phi}$, so dass also notwendig

$$\lambda \in \mathbb{Z}$$

ganzzahlig sein muss.

Die radiale Komponente. Wir wenden uns nun der Gleichung für R zu. Aus (88) erhalten wir

$$\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) + (\mu^2 \rho^2 - \lambda^2) R(\rho) = 0. \quad (89)$$

Das ist eine homogene lineare Differentialgleichung, aber keine mit konstanten Koeffizienten.

- Falls $\mu = 0 = \lambda$, ist die allgemeine Lösung gegeben durch

$$R(\rho) = a \log \rho + b$$

mit beliebigen a, b . Nur für $a = 0$ ist die Lösung in 0 beschränkt, was abhängig vom gestellten Problem eine physikalisch sinnvolle Forderung sein kann.

- Falls $\mu = 0 \neq \lambda$, ist die allgemeine Lösung gegeben durch

$$R(\rho) = a\rho^{-\lambda} + b\rho^\lambda.$$

- Falls $\mu \neq 0$, setzen wir $y(x) = R(\frac{x}{\mu})$. Dann ist

$$y'(x) = \frac{1}{\mu} R'(\frac{x}{\mu}), \quad y''(x) = \frac{1}{\mu^2} R''(\frac{x}{\mu}).$$

Mit der Substitution $x = \rho\mu$ ist die Gleichung (89) also äquivalent zu

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - \lambda^2)y(x) = 0. \quad (90)$$

Das ist die sogenannte *Besselgleichung*, die wir im nächsten Abschnitt untersuchen werden. Ihre Lösungen heißen aus einsichtigen Gründen auch *Zylinderfunktionen*. Die Gleichung hat für jedes ganzzahlige λ (bis auf Vielfache genau) eine *bei 0 beschränkte* Lösung

$$J_\lambda(x) = J_\lambda(\rho\mu),$$

die sogenannte *Besselfunktion 1. Art zum Index λ* .

Zusammenfassung. Nun sammeln wir die einzelnen Bausteine für die Lösung der Wellengleichung zusammen. Dabei benutzen wir die einfachere komplexe Form und verzichten auf doppelte Vorzeichen ebenso wie auf die Sonderfälle für $\mu = 0$:

$$T(t) = e^{i\omega t}, \quad Z(z) = e^{ihz}, \quad \Phi(\phi) = e^{i\lambda\phi} \quad (91)$$

$$R(\rho) = J_\lambda(\rho\mu). \quad (92)$$

Das liefert als Lösungen

$$u(\rho, \phi, z, t) = J_\lambda(\rho\mu) e^{i(\lambda\phi + hz + \omega t)} \quad (93)$$

mit den folgenden Bedingungen für die Separationskonstanten:

$$\mu^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - h^2 \text{ und } \lambda \in \mathbb{Z}. \quad (94)$$

Randbedingungen. Zur Wellengleichung treten z.B. bei TM-Wellen die Randbedingungen

$$u(1, \phi, z, t) = u(\rho, \phi, 0, t) = u(\rho, \phi, \pi, t) = 0. \quad (95)$$

Die Randbedingung, dass u auf dem Boden ($z = 0$) und Deckel ($z = \pi$) des Zylinders verschwinden soll, bedeutet, dass die reelle Z -Lösung durch $Z(z) = \sin(hz)$ mit *ganzzahligem* $h \in \mathbb{Z}$ gegeben ist.

Die noch verbleibende Randbedingung, dass u auf dem Mantel des Zylinders, also für $\rho = 1$ verschwinden soll, bedeutet $J_\lambda(\mu) = 0$. Nun werden wir sehen, dass J_λ unendlich viele positive Nullstellen $j_{\lambda;n}$ mit $n = 1, 2, 3, \dots$ hat. Wir setzen also $\mu = j_{\lambda;n}$ und erhalten zu λ, h und $\mu = j_{\lambda;n}$ aus (94)

$$\omega_{\lambda,n,h}^2 = c^2(j_{\lambda;n}^2 + h^2).$$

Zusammenfassend erhalten wir dann für jede ganzzahlige Wahl von λ, h und n eine Lösung

$$u(\rho, \phi, z, t) = J_\lambda(\rho j_{\lambda;n}) \sin(hz) e^{i(\lambda\phi + \omega_{\lambda,n,h}t)}$$

des Randwertproblems. Diese Lösungen lassen sich linear kombinieren zu Lösungen der Form

$$u(\rho, \phi, z, t) = \sum_{\lambda,h,n} c_{\lambda,h,n} J_\lambda(\rho j_{\lambda;n}) \sin(hz) e^{i(\lambda\phi + \omega_{\lambda,n,h}t)},$$

wobei die Koeffizienten $c_{\lambda,h,n}$ durch geeignete **Anfangsbedingungen** festgelegt werden können. Sie sind aber nicht so einfach zu bestimmen, wie bei der schwingenden Saite (Fourieranalyse), weil das Problem mehrdimensional ist und außerdem noch die Besselfunktionen J_λ auftreten. Wir kommen darauf im Abschnitt 4.1 zurück, wo Sie in 4.1.4 auch eine Veranschaulichung der Lösungen finden.

Tritt an die Stelle des kompakten Zylinders ein unbeschränktes Gebiet, wie etwa bei der Ausbreitung von Radiowellen auf der Erdoberfläche, so hat man Randbedingungen "im Unendlichen" (Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung), aus dem diskreten ω -Spektrum wird ein kontinuierliches und aus der unendlichen Reihe ein uneigentliches Integral.

3.3.2 Kugelkoordinaten

In Kugelkoordinaten sieht die Wellengleichung so aus:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta})}{\partial \theta} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Der Separationsansatz

$$u(r, \theta, \phi, t) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)T(t)$$

führt ähnlich wie oben zu folgenden gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$T'' + \omega^2 T = 0 \quad (96)$$

$$\Phi'' + m^2 \Phi = 0 \quad (97)$$

$$r^2 R'' + 2r R' + (r^2 \frac{\omega^2}{c^2} - \nu^2) R = 0 \quad (98)$$

$$\Theta'' + \cot \theta \Theta' - (\frac{m^2}{\sin^2 \theta} - \nu^2) \Theta = 0 \quad (99)$$

mit Konstanten ω, ν und m . Weil die Lösung in ϕ offensichtlich 2π -periodisch sein muss, muss m ganzzahlig sein. Offenbar können wir annehmen, dass $m \geq 0$ ist.

Die radiale Komponente, Fall $\omega = 0$. Die Gleichung (98) reduziert sich dann auf

$$r^2 R'' + 2rR' - \nu^2 R = 0.$$

Weil die r -Potenz der Faktoren gleich der Ableitungsordnung ist, liegt ein Ansatz $R(r) = r^k$ nahe. Er liefert Lösungen genau dann, wenn $\nu^2 = k(k+1)$. Dabei muss k nicht ganzzahlig sein.

Beachten Sie: Der Fall $\omega = 0$ deckt gleichzeitig die Potentialgleichung

$$\Delta u = 0$$

ab. Sie hat also Lösungen der Form $u(r, \theta, \phi) = r^k \Theta(\theta) \Phi(\phi)$.

Die radiale Komponente, Fall $\omega \neq 0$. Dann setzen wir $x = \frac{\omega}{c} r$ und $y(x) = \sqrt{x} R(r)$. Mit diesen Substitutionen wird (98) zur oben schon aufgetretenen Besselgleichung (90) mit $\lambda^2 = \nu^2 + \frac{1}{4}$

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \left(\nu^2 + \frac{1}{4} \right) \right) y = 0. \quad (100)$$

Aus ihren Lösungen erhält man also mit $R(r) = y\left(\frac{\omega}{c} r\right) / \sqrt{\frac{\omega}{c} r}$ den radialen Anteil im Produktansatz.

Herleitung von (100) aus (98). Beachte $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{c}{\omega}$. Differentiation von $y(x) = \sqrt{x} R(r)$ liefert:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} R(r) + \sqrt{x} R'(r) \frac{c}{\omega} \\ \implies xy'(x) &= \frac{1}{2} y(x) + \sqrt{x} r R'(r). \end{aligned}$$

Differentiation davon ergibt

$$\begin{aligned} xy''(x) + y'(x) &= \frac{1}{2} y'(x) + \frac{3}{2} \sqrt{x} \frac{c}{\omega} R'(r) + \sqrt{x} R''(r) \frac{c^2 x}{\omega^2} \\ \implies x^2 y''(x) + xy'(x) &= \frac{1}{2} xy'(x) + \frac{3}{2} \sqrt{x} r R'(r) + \sqrt{x} r^2 R''(r) \left(\frac{c}{\omega} x \right) \\ &= \sqrt{x} (r^2 R''(r) + 2r R'(r)) - \frac{1}{2} \sqrt{x} r R'(r) + \frac{1}{2} xy'(x) \\ &= \nu^2 y(x) - x^2 y(x) + \frac{1}{4} y(x) = - \left(x^2 - \left(\nu^2 + \frac{1}{4} \right) \right) y(x). \end{aligned}$$

□

Die θ -Komponente. Wir untersuchen nun noch (99). Hier machen wir die Variablensubstitution

$$x = \cos \theta, \quad \Theta(\theta) = y(x) = y(\cos \theta).$$

Dann wird

$$\begin{aligned} \Theta'(y) &= -y'(\cos \theta) \sin \theta \\ \Theta''(\theta) &= y''(\cos \theta) \sin^2 \theta - y'(\cos \theta) \cos \theta. \end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung gibt

$$(x^2 - 1)y'' + 2xy' + \left(\frac{m^2}{1-x^2} - \nu^2 \right) y = 0. \quad (101)$$

Das ist die sogenannte *allgemeine Legendregleichung*. Ihre Lösungen heißen *Legendre-* oder *Kugelfunktionen*.

Beachten Sie: Wir haben unter der Annahme, dass eine separierte Lösung der Wellengleichung existiert, die überdies keine Nullstellen hat (beim Teilen durch $R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)T(t)$), als notwendige Bedingungen gewisse Differentialgleichungen für die Faktoren hergeleitet. Es ist nicht klar und auch nicht richtig, dass *jede* Lösung dieses Systems von Differentialgleichungen tatsächlich zu einer Lösung der Wellengleichung führt. Zum Beispiel war es klar, dass m ganzzahlig sein muss. Damit die Lösungen der Legendregleichung zu Funktionen führen, die auf der ganzen Kugel, insbesondere auf der z -Achse, also für $\theta = 0$ und $\theta = \pi$ zweimal differenzierbar sind, muss auch ν eine zusätzliche Bedingung erfüllen: Es muss gelten

$$\nu^2 = k(k+1) \text{ mit ganzzahligem } k \geq m.$$

Die Herleitung dieser Bedingung ist allerdings so schwierig, dass wir darauf verzichten.

Dem Fall $m = 0$ (keine Abhängigkeit von ϕ) kommt eine besondere Bedeutung zu. Dann wird (101) zur Legendregleichung im engeren Sinne

$$(x^2 - 1)y'' + 2xy' - k(k+1)y = 0.$$

Die Lösungen dieser Gleichung werden wir noch genauer studieren. Mit ihrer Hilfe lassen sich auch die Lösungen der allgemeinen Gleichung (99) bequem angeben. (Vgl. Abschnitt 4.2 über die Legendregleichung und insbesondere den Anhang 5.12 über die *zugeordneten Legendrefunktionen*.)

4 Spezielle Funktionen

4.1 Die Besselsche Differentialgleichung

- Wir finden für die Besselgleichung eine modifizierte Potenzreihenlösung und diskutieren deren Eigenschaften.
- Die gefundenen Besselfunktionen modellieren zum Beispiel die radiale Komponente von Wellen um eine Stabantenne.
- Interessant ist das Verhalten dieser Wellen in größerer Entfernung von der Quelle, ihr asymptotisches Verhalten.

Vergleichen Sie zu diesem Abschnitt [*Theoretische Elektrotechnik, Abschnitte 7.3 und 7.4*].

Im vorangehenden Abschnitt haben wir gesehen, dass die Separation der Wellengleichung (aber auch der Diffusionsgleichung und vieler ähnlicher linearer partieller Differentialgleichungen 2. Ordnung) bei Verwendung von Zylinder- oder Kugelkoordinaten für den radialen Anteil auf die sogenannte *Besselsche Differentialgleichung*

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \lambda^2)y = 0 \quad (102)$$

führt. Um noch einmal den Zusammenhang deutlich zu machen: Ist y eine Lösung dieser Differentialgleichung, eine sogenannte *Zylinderfunktion*, so ist

$$u(\rho, \phi, z, t) = y \left(\rho \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - h^2} \right) e^{i(\lambda\phi + hz + \omega t)}$$

eine (komplexe) Lösung der Wellengleichung

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Die Bedeutung der Besselschen Differentialgleichung für die E-Technik sollte damit deutlich sein (zylindrische Hohlleiter, Skinneffekt, Radiowellen etc.). Viel allgemeiner spielt sie offenbar eine zentrale Rolle bei allen mehrdimensionalen Schwingungsvorgängen.

Die Gleichung ist linear und homogen, aber die Koeffizienten sind nicht konstant, sondern Polynome in x . Wenn man die Gleichung so normiert, dass der Koeffizient von y'' zu 1 wird, sind sie rationale Funktionen in x . Für die allgemeine Lösung auf dem Intervall $x > 0$ brauchen wir nach der Theorie zwei linear unabhängige Lösungen.

Wir werden im folgenden

- eine Lösungsmethode für diese Differentialgleichung vorstellen,
- das Verhalten der Lösungen (=Besselfunktionen) beschreiben,
- Überlagerungen von Besselfunktionen studieren, die für die Lösung von Anfangswertaufgaben bei Schwingungsproblemen wichtig sind.

Alle diese Untersuchungen sind an der Besselgleichung exemplarisch für eine größere Klasse von Differentialgleichungen vorzuführen. Eine allgemeine Systematik wird im Modul *Analysis III für Ingenieure* behandelt (Eigenwerttheorie für Sturm-Liouville-Probleme).

4.1.1 Konstruktion einer Lösung

Es scheint nicht ganz abwegig, eine Lösung y von

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - \lambda^2) y = 0$$

versuchsweise als Polynom anzusetzen. Wenn das vom Grad n ist, so sind $x^2 y''$ und $x y'$ auch vom Grad n . Allerdings ist $(x^2 - \lambda^2)y$ dann vom Grad $n + 2$, so dass dieser Ansatz nicht klappen wird. Stattdessen kann man versuchen y als Potenzreihe anzusetzen, dann ist man das Grad-Problem los. Der Versuch zeigt, dass die Rechnungen einfacher werden durch den Ansatz

$$y(x) = x^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k,$$

weil das λ^2 in der Differentialgleichung kompensiert werden muss.

Wir wollen diesen Ansatz in die Differentialgleichung einsetzen und berechnen dazu zunächst die Ableitungen:

$$y'(x) = \lambda x^{\lambda-1} \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k + x^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} k b_k x^{k-1}.$$

Beachten Sie: Bei der Differentiation der Potenzreihe fällt der konstante Term weg. Wir können aber die Summe trotzdem bei 0 beginnen lassen, weil der Faktor $k = 0$ denselben Effekt hat. Ebenso findet man

$$y''(x) = \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2} \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k + 2\lambda x^{\lambda-1} \sum_{k=0}^{\infty} k b_k x^{k-1} + x^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)x^{k-2}.$$

Bevor wir dies in die Differentialgleichung einsetzen, betrachten wir noch den dann entstehenden Term

$$x^2 y(x) = x^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{k+2} = x^\lambda \sum_{k=2}^{\infty} b_{k-2} x^k.$$

Wir möchten auch diese Summe von 0 beginnen lassen, und definieren daher die bisher noch nicht vorkommenden Koeffizienten durch

$$b_{-2} := b_{-1} := 0.$$

Nun setzen wir ein:

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 \left(\lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2} \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k + 2\lambda x^{\lambda-1} \sum_{k=0}^{\infty} k b_k x^{k-1} + x^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)b_k x^{k-2} \right) \\ &\quad + x \left(\lambda x^{\lambda-1} \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k + x^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} k b_k x^{k-1} \right) + x^2 x^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k - \lambda^2 x^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \\ &= x^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda(\lambda-1)b_k + 2\lambda k b_k + k(k-1)b_k + \lambda b_k + k b_k + b_{k-2} - \lambda^2 b_k) x^k \\ &= x^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} (2\lambda k b_k + k^2 b_k + b_{k-2}) x^k \end{aligned}$$

Nach dem Identitätssatz für Potenzreihen müssen nun alle Koeffizienten $= 0$ sein:

$$k(k+2\lambda)b_k + b_{k-2} = 0. \tag{103}$$

Aus $b_{-1} = 0$ folgt, wenn 2λ keine negative ganze Zahl ist,

$$b_1 = -\frac{b_{-1}}{1(1+2\lambda)} = 0, \quad b_3 = -\frac{b_1}{3(3+2\lambda)} = 0, \dots$$

Beachten Sie, dass wir aber auch im Fall, wo 2λ eine negative ganze Zahl ist, einfach alle $b_{2m+1} = 0$ setzen können, und die Rekursionsformel (103) ist dann für ungerade k erfüllt. Das werden wir im folgenden so machen.

Für die geraden Indizes von b sieht die Sache anders aus, weil

$$0(0+2\lambda)b_0 + b_{-2} = 0$$

keine Bedingung an b_0 stellt. Also können wir b_0 beliebig wählen und die b_{2m} rekursiv berechnen:

$$b_{2m} = -\frac{b_{2m-2}}{4m(\lambda+m)}.$$

Diesmal wollen wir voraussetzen, dass λ keine negative ganze Zahl ist, so dass der Nenner niemals 0 wird. Wir finden

$$\begin{aligned} b_{2m} &= -\frac{b_{2m-2}}{4m(\lambda+m)} = \frac{1}{4m(\lambda+m)} \frac{b_{2m-4}}{4(m-1)(\lambda+m-1)} = \dots \\ &= (-1)^m \frac{b_0}{4^m m! (\lambda+m)(\lambda+m-1) \dots (\lambda+1)} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$y(x) = b_0 x^\lambda \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(\lambda+1) \dots (\lambda+m)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}$$

folgt leicht mit dem Quotientenkriterium, dass die Potenzreihe für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert. Deshalb hat unser Ansatz tatsächlich zum Ziel geführt: Wir haben eine Lösung unserer Differentialgleichung gefunden.

Es ist üblich, für b_0 einen ganz bestimmten, dem λ angepaßten Wert zu wählen: Wenn $\lambda = k \in \mathbb{N}$ ist, bietet sich

$$b_0 = \frac{1}{2^{\lambda} \lambda!}$$

an. Dann wird

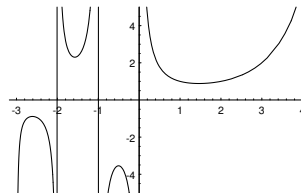
$$y(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(\lambda+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m},$$

und diese Lösung nennt man die *Besselfunktion 1. Art* J_λ zum Index λ . Ihre Reihe ist nicht viel komplizierter als zum Beispiel die Cosinusreihe.

Bei den Zylinderkoordinaten war λ mit der Variablen ϕ gekoppelt und ganzzahlig. Bei den Kugelkoordinaten kommen aber auch nicht ganzzahlige Werte $\lambda = \sqrt{\nu^2 + \frac{1}{4}}$ vor. Dann ist $\lambda!$ nicht mehr definiert. Wie soll man b_0 in diesem Fall wählen?

Man benutzt dann eine Extrapolation der Fakultätsfunktion auf die ganze reelle Achse ausgenommen die negativen ganzen Zahlen, die sogenannte *Gammafunktion* Γ für die gilt:

$$\begin{aligned} \Gamma(n+1) &= n! \quad \text{für } n \in \mathbb{N}, \\ \Gamma(x+1) &= x\Gamma(x) \quad \text{für } -x \notin \mathbb{N}. \end{aligned}$$



Vergleichen Sie den Anhang 5.7.

Wie im ganzzahligen Fall setzt man damit nun

$$b_0 := \frac{1}{2^\lambda \Gamma(\lambda + 1)}.$$

Wegen

$$\Gamma(\lambda + m + 1) = (\lambda + m)\Gamma(\lambda + m) = \dots = (\lambda + m) \dots (\lambda + 1)\Gamma(\lambda + 1)$$

erhält man Besselfunktionen:

$$J_\lambda(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\lambda \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1)\Gamma(\lambda+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}. \quad (104)$$

Dabei ist $\lambda \in \mathbb{R}$, aber zunächst keine negative ganze Zahl.

Für ganzzahliges negatives $\lambda = -k$ kann man die Terme, bei denen $\Gamma(\lambda + m + 1)$ im Nenner einen Pol hat, also die Terme mit $m \leq k - 1$, einfach als Null interpretieren. Dann liefert die vorstehende Formel

$$\begin{aligned} J_{-k}(x) &:= \left(\frac{x}{2}\right)^{-k} \sum_{m=k}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1)\Gamma(-k+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} \\ &= \left(\frac{x}{2}\right)^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+k}}{\Gamma(n+k+1)\Gamma(n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+2k} \\ &= (-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+k+1)\Gamma(n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} \\ &= (-1)^k J_k(x) \end{aligned}$$

und das ist natürlich auch eine Lösung J_λ von (102).

4.1.2 Die allgemeine Lösung

Da die Besselgleichung (102) von zweiter Ordnung ist, braucht man für die allgemeine Lösung ein Fundamentalsystem mit *zwei* linear unabhängige Lösungen. Wir beschreiben nun, wie man eine zweite, von J_λ linear unabhängige Lösung finden kann.

Dazu untersuchen wir zunächst das Verhalten der Besselfunktionen für $x \searrow 0$. Aus der Reihenentwicklung

$$J_\lambda(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\lambda \left(\frac{1}{\Gamma(1)\Gamma(\lambda+1)} - \dots \right)$$

sieht man

$$\lim_{x \searrow 0} J_\lambda(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } \lambda > 0 \\ 1 & \text{für } \lambda = 0 \\ \pm\infty & \text{für } \lambda < 0, \text{ nicht ganzzahlig.} \end{cases} \quad (105)$$

Ist λ nicht ganzzahlig, so sind J_λ und $J_{-\lambda}$ zwei Lösungen *derselben* Gleichung (102), die wegen (105) ganz offensichtlich linear unabhängig sind. Damit wäre das Problem erledigt, wenn man nicht gerade an ganzzahligem λ besonders interessiert wäre. In diesem Fall sind aber J_λ und $J_{-\lambda} = (-1)^\lambda J_\lambda$ linear abhängig, und man muss sich etwas anderes einfallen lassen.

Sind $a, b \in \mathbb{R}$ mit $b \neq 0$, so sind für $\lambda \notin \mathbb{Z}$ auch J_λ und

$$aJ_\lambda + bJ_{-\lambda}$$

linear unabhängig. Zum Beispiel kann man folgende skurrile Koeffizientenwahl treffen:

$$a := \cot(\lambda\pi), \quad b := -\frac{1}{\sin(\lambda\pi)}. \quad (106)$$

Dann ist

$$J_\lambda \quad \text{und} \quad N_\lambda := \frac{\cos(\lambda\pi)J_\lambda - J_{-\lambda}}{\sin(\lambda\pi)}$$

ein Fundamentalsystem von (102).

Die N_λ heißen die *Neumannfunktionen* oder *Besselfunktionen 2. Art*. Sie werden auch mit dem Symbol

$$Y_\lambda(x) = N_\lambda(x)$$

bezeichnet.

Der Grund für die merkwürdige Wahl der Koeffizienten in (106) ist nun, dass für ganzzahliges k der Grenzwert

$$N_k(x) := \lim_{\lambda \rightarrow k} N_\lambda(x)$$

existiert und J_k, N_k auch dann noch ein Fundamentalsystem bilden⁷.

Zum Nachdenken. Die Potenzreihe für die Besselfunktionen J_k mit $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$ beginnt mit $\frac{1}{k!}(\frac{x}{2})^k + \dots$. Also ist

$$J_k(0) = J'_k(0) = 0.$$

Andrerseits ist J_k aber eine Lösung der Besselgleichung, d.h. einer homogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung, und die konstante Funktion $y = 0$ ist eine weitere Lösung mit diesen Anfangswerten. Legen nicht $y(0)$ und $y'(0)$ die Lösung eindeutig fest?

⁷ Im Anhang Abschnitt 5.2 demonstrieren wir anhand einer einfacheren Differentialgleichung, wie man durch geschickte Wahl eines λ -abhängigen Fundamentalsystems auch im Grenzfall die lineare Unabhängigkeit bewahren kann.

4.1.3 Der asymptotische Verlauf der Zylinderfunktionen

Wir wollen nun den Funktionsverlauf der Lösungen von (102) für großes x untersuchen. Die Besselgleichung kann man dann schreiben als

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\lambda^2}{x^2}\right)y = 0.$$

Für große x sieht das aber annähernd aus wie

$$y'' + y = 0, \tag{107}$$

und man kann vermuten, dass die Lösungen der Besselgleichung für großes x daher aussehen wie $A \sin(x - x_0)$, denn das sind ja die Lösungen der letzteren Gleichung. Das haben wir nicht bewiesen, nur vermutet, und es stellt sich heraus, dass diese Vermutung falsch ist.

Trotzdem hat sie einen richtigen Kern. Es gibt einen Satz über Differentialgleichung, den sogenannten *Sturmschen Vergleichssatz*, nach dem sich die Lösungen von

$$y'' + \omega^2 y = 0$$

mit fast-konstantem ω ähnlich verhalten wie die Lösungen der Differentialgleichung mit konstantem ω , also wie $A \sin \omega(x - x_0)$.

Um diesen Satz (auf dessen genaue Formulierung wir verzichten) anwenden zu können, müssen wir allerdings die Besselgleichung zunächst so umschreiben, dass kein y' -Term auftritt.

Dazu nehmen wir an, dass y eine Lösung der Besselgleichung zum Index λ ist. Wir nehmen eine Funktion $m > 0$, über die wir gleich noch verfügen werden, und schreiben

$$y(x) = m(x)v(x).$$

Wir setzen das in (102) ein und erhalten nach kurzer Rechnung

$$x^2 m v'' + (2x^2 m' + x m) v' + (x^2 m'' + x m' + (x^2 - \lambda^2) m) v = 0. \tag{108}$$

Wir wählen nun m so, dass der Faktor von v' verschwindet, also so, dass

$$2x^2 m' + x m = 0.$$

Das ist eine Differentialgleichung für m , die man auch schreiben kann als $\frac{m'}{m} = -\frac{1}{2x}$. Nun ist $\frac{m'}{m} = (\ln m)'$ und $-\frac{1}{2x} = -(\ln \sqrt{x})'$. Also ist $m(x) = \sqrt{\frac{1}{x}}$ eine Lösung, bis auf eine multiplikative Konstante auch die einzige.

Einsetzen in (108) und Teilen durch $x^2 m(x)$ liefert

$$v'' + \left(1 - \frac{\lambda^2 - 1/4}{x^2}\right)v = 0. \tag{109}$$

Wir halten fest: Ist v eine Lösung von (109), so ist $y(x) = \frac{v(x)}{\sqrt{x}}$ eine Lösung der Besselgleichung (102) und umgekehrt.

Das vorstehende Verfahren kann man auf jede homogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung anwenden. Man erhält eine Gleichung (109) von der Form

$$v'' + B(x)v = 0.$$

Die Funktion B ist eine charakteristische Invariante für den Typ der Differentialgleichung. Erhält man für verschiedene Differentialgleichungen dasselbe B , so lassen sich ihre Lösungen durch einen festen multiplikativen Faktor ineinander umrechnen.

Die Gleichung (109) ist also äquivalent zur Besselgleichung, und sie sieht der Sinusgleichung (107) wirklich sehr ähnlich. Der Sturmsche Vergleichssatz besagt, dass sich die Lösungen von (109) für großes x , wenn also $\left(1 - \frac{\lambda^2 - 1/4}{x^2}\right) \approx 1$ ist, so verhalten, wie die Lösungen von (107). Also

$$v(x) \sim A \sin(x - x_0).$$

Für die Lösungen $y(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}v(x)$ der Besselgleichung ergibt sich:

Die Zylinderfunktionen verhalten sich asymptotisch wie eine Sinusfunktion mit Phase und einer wie $\frac{1}{\sqrt{x}}$ gedämpften Amplitude. Sie haben unendlich viele Nullstellen, deren Abstand gegen π geht.

Man kann das noch präzisieren, wenn man die Zylinderfunktion präzisiert. Für die Besselfunktionen ergibt sich

$$\begin{aligned} J_\lambda(x) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\lambda + \frac{\pi}{4}\right), \\ N_\lambda(x) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\lambda + \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

Die unendlich vielen positiven Nullstellen der Besselfunktion J_λ nummeriert man der Größe nach als $j_{\lambda;n}$ mit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Beispiel 81. Radiowellen auf der Erdoberfläche um eine Antenne sind Superpositionen von Wellen der Form

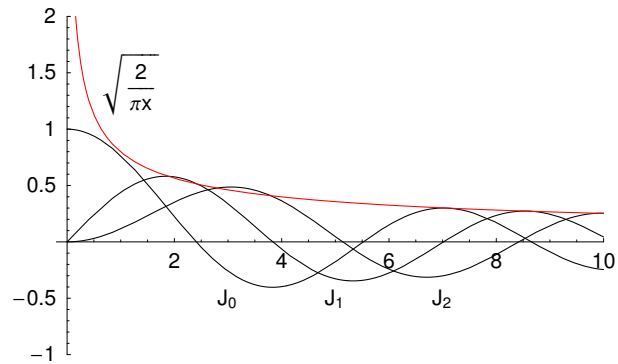
$$J_0\left(\frac{\omega}{c}\rho\right) \times \text{Terme in } \phi, z \text{ und } t$$

wobei ρ den Abstand von der Antenne bezeichnet.

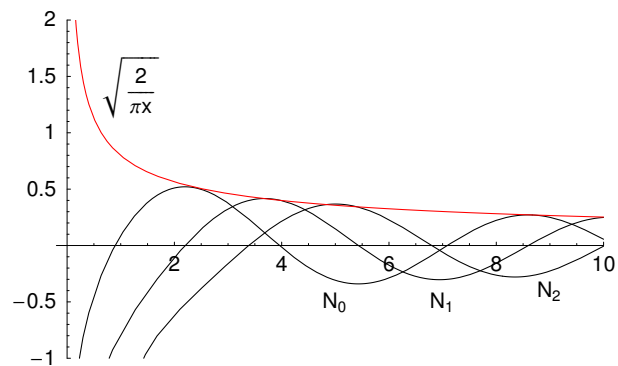
- Die Tatsache, dass bei großem x der Nullstellenabstand $\approx \pi$ ist, garantiert, dass Radiosender mit entfernungsunabhängiger Frequenz senden können. (Die Besselfunktionen machen Autoradios möglich!).
- Weiter ist die Energie einer Welle proportional zum Quadrat ihrer Amplitude. Während also die Länge des Kreises um die Antenne linear mit ρ wächst, nimmt die Energie mit $\left(\frac{1}{\sqrt{\rho}}\right)^2$ ab. Die abgestrahlte Energie ist auf jedem Kreis (oder Zylinder) um die Antenne dieselbe – wie der Energieerhaltungssatz erwarten läßt.

Wenn Sie sich diese zwei physikalischen Tatsachen vor Augen führen, brauchen Sie das asymptotische Verhalten der Zylinderfunktionen nicht mehr auswendig zu lernen, es ist klar.

Das Mathematica-Programm hat die Besselfunktionen „vorrätig“ und liefert



Wegen der Singularität (Unbeschränktheit) in 0 sind die Neumannschen Funktionen in den Anwendungen weit seltener als die Besselschen. Ihre Graphen sehen so aus:



4.1.4 Entwicklung nach Besselfunktionen: Fourier-Bessel-Reihen

- Die Anpassung der mittels Separation gefundenen Lösungen an gegebene Rand- und Anfangswerte erfordert die Bestimmung der Koeffizienten für eine entsprechende Superposition.
- Bei kartesischen Koordinaten muss man dazu Fourierkoeffizienten bestimmen.
- In Zylinder- oder Kugelkoordinaten ergibt sich entsprechend das Problem der Entwicklung nach Besselfunktionen.

Vergleichen Sie hierzu [Theoretische Elektrotechnik, Abschnitt 7.4].

Die Funktionen

$$u(\rho, \phi, z, t) = J_k \left(\rho \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - h^2} \right) e^{i(k\phi + hz + \omega t)}$$

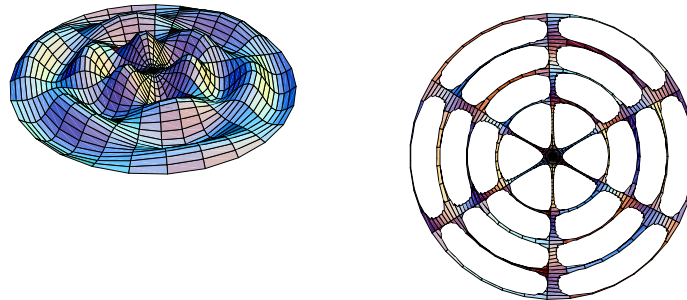
mit ganzzahligem k sind Lösungen der Wellengleichung in Zylinderkoordinaten, sie beschreiben zum Beispiel Schwingungen in einem Hohlzylinder. Wir betrachten der Einfachheit nur solche, die in z -Richtung konstant sind, für die also $h = 0$ ist. Dann hat man also einfach die Wellengleichung in ebenen Polarkoordinaten. Die Lösungen beschreiben gleichermaßen auch die Schwingungen einer Membran, und wir betrachten aus Gründen der Anschaulichkeit im weiteren dieses Modell. Wenn wir annehmen, dass die Membran in einen ebenen Kreis vom Radius R fest eingespannt ist (bei elektromagnetischen Schwingungen würde man entsprechend den Rand als geerdet voraussetzen), so erhält man insbesondere Lösungen der Form

$$u(\rho, \phi, t) = J_k \left(\frac{j_{k;n}}{R} \rho \right) e^{i(k\phi + \omega_{k;n} t)}.$$

Dabei ist $j_{k;n}$ die n -te Nullstellen von J_k und

$$\omega_{k;n} = \frac{c j_{k;n}}{R}.$$

Diese Schwingungen bezeichnet man auch als die *Grundschnwingungen* oder *Moden* der Membran. Die beiden folgende Abbildungen beschreiben ein und dieselbe Grundschnwingung mit $(k; n) = (3; 4)$.



In der rechten Abbildung, einer Aufsicht auf den “geclippten” Graphen, werden die Knotenlinien deutlich.

Nicht jede Membranschwingung ist allerdings von diesem Typ, auch Linearkombinationen (Überlagerungen) sind möglich. Welche Schwingung wirklich vorliegt, hängt von den Anfangsbedingungen ab, und wir gehen jetzt der Frage nach, wie man aus den Anfangsbedingungen die richtigen Koeffizienten für die Linearkombination bestimmt. Vergleichen Sie dazu das Beispiel 77.

Wir betrachten also Lösungen der ebenen Schwingungsgleichung, die auf dem Rand des Kreises vom Radius R verschwinden, nämlich Lösungen der Form

$$u(\rho, \phi, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_k \left(\frac{j_{k;n}}{R} \rho \right) e^{ik\phi} (a_{k;n} e^{i\omega_{k;n}t} + b_{k;n} e^{-i\omega_{k;n}t}).$$

Beachten Sie, dass $J_k = \pm J_{-k}$ ist, aber die Summation über $-\infty < k < \infty$ erfasst sowohl Terme mit $e^{-ik\phi}$ wie mit $e^{+ik\phi}$.

Dann ist die Anfangskonfiguration

$$u(\rho, \phi, 0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} J_k \left(\frac{j_{k;n}}{R} \rho \right) e^{ik\phi} \underbrace{(a_{k;n} + b_{k;n})}_{=: c_{k;n}}$$

und die Anfangsgeschwindigkeit

$$u_t(\rho, \phi, 0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} J_k \left(\frac{j_{k;n}}{R} \rho \right) e^{ik\phi} \underbrace{i\omega_{k;n}(a_{k;n} - b_{k;n})}_{=: \tilde{c}_{k;n}}$$

Wir erklären, wie man die $c_{k;n}$ berechnet. Die Berechnung der $\tilde{c}_{k;n}$ geht dann genauso, und aus beiden zusammen berechnen sich

$$a_{k;n} = \frac{1}{2} \left(c_{k;n} + \frac{\tilde{c}_{k;n}}{i\omega_{k;n}} \right), \quad b_{k;n} = \frac{1}{2} \left(c_{k;n} - \frac{\tilde{c}_{k;n}}{i\omega_{k;n}} \right).$$

Sei also eine Funktion $u_0(\rho, \phi)$ auf der Kreisscheibe vorgegeben. Wir suchen Koeffizienten $c_{k;n}$ mit

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_{k;n} J_k \left(\frac{j_{k;n}}{R} \rho \right) e^{ik\phi} = u_0(\rho, \phi).$$

Für festes ρ ist $u_0(\rho, \phi)$ eine 2π -periodische Funktion, und läßt sich als Fourierreihe darstellen

$$u_0(\rho, \phi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{ik\phi} \quad \text{mit} \quad f_k = f_k(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} u_0(\rho, \phi) e^{-ik\phi} d\phi.$$

Damit ist unser Problem reduziert auf die Berechnung der Darstellung

$$f_k(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{k;n} J_k \left(\frac{j_{k;n}}{R} \rho \right), \tag{110}$$

also (nach einer einfachen Variablensubstitution) auf das Problem, eine vorgegebene Funktion $f(x) = f_k(Rx)$ auf $[0, 1]$ für gegebenes k darzustellen in der Form

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n J_k(j_{k;n}x). \tag{111}$$

Das ist tatsächlich für jede einigermaßen „anständige“ (zum Beispiel stetig differenzierbare) Funktion f der Fall. Man hat auch hier so etwas wie eine Fourierentwicklung, genannt *Fourier-Bessel-Entwicklung* nach den $J_k(j_{k;n}x)$.

Wie bestimmt man die Koeffizienten c_n ? Das geht ähnlich wie bei den Fourierreihen, weil man so wie dort sogenannte *Orthogonalitätsrelationen* hat: Es gilt

$$\int_0^1 J_k(j_{k;m}x)J_k(j_{k;n}x)xdx = 0, \text{ falls } m \neq n. \quad (112)$$

Im Unterschied zu den Fourierreihen integriert man hier von 0 bis 1, und zwar das mit x gewichtete Produkt der beiden Funktionen. Und im Unterschied zu den Fourierreihen ist das Integral der Quadrate komplizierter, nämlich

$$\int_0^1 J_k^2(j_{k;n}x)xdx = \frac{1}{2}J_k'(j_{k;n})^2 = \frac{1}{2}J_{k+1}^2(j_{k;n}). \quad (113)$$

Multipliziert man die Gleichung (111) mit $J_k(j_{k;m}x)x$ und integriert über $[0,1]$, so fallen wegen (112) rechts alle Terme bis auf den m -ten weg, und man erhält mit (113)

$$c_n = \frac{2}{J_{k+1}^2(j_{k;n})} \int_0^1 f(x)J_k(j_{k;n}x)xdx. \quad (114)$$

Für die Koeffizienten in (110) findet man

$$c_{k;n} = \frac{2}{R^2 J_{k+1}^2(j_{k;n})} \int_0^R f_k(\rho)J_k\left(\frac{j_{k;n}}{R}\rho\right)\rho d\rho. \quad (115)$$

Eine Herleitung der Orthogonalitätsrelationen und weiterer Eigenschaften der Besselfunktionen finden Sie im Anhang.

Beispiel 82.*Theoretische Elektrotechnik Abschnitt 7.4*

Wir entwickeln die konstante Funktion $f(x) = 1$ auf $[0, 1]$ nach den $J_0(j_{0;n}x)$. Nach (114) sind die Koeffizienten gegeben durch

$$c_n = \frac{2}{J_1^2(j_{0;n})} \int_0^1 J_0(j_{0;n}x) x dx.$$

Wir substituieren $t = j_{0;n}x$ und erhalten

$$c_n = \frac{2}{j_{0;n}^2 J_1^2(j_{0;n})} \int_0^{j_{0;n}} J_0(t) t dt.$$

Mit Hilfe der im Anhang bewiesenen Identität $(tJ_1(t))' = tJ_0(t)$ kann man das explizit berechnen

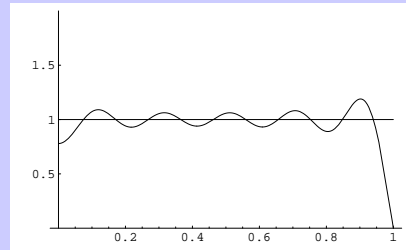
$$c_n = \frac{2}{j_{0;n}^2 J_1^2(j_{0;n})} \int_0^{j_{0;n}} (J_1(t)t)' dt = \frac{2}{j_{0;n}^2 J_1^2(j_{0;n})} J_1(t)t \Big|_0^{j_{0;n}} = \frac{2}{j_{0;n} J_1(j_{0;n})}.$$

Es folgt

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_0(j_{0;n}x)}{j_{0;n} J_1(j_{0;n})}, \quad 0 < x < 1.$$

Hier geben wir eine Skizze der 10. Partialsumme der rechten Seite mit dem erstellenden Mathematica-Programm. In der 1. Zeile wird ein Programmpaket zur Berechnung der Nullstellen von Besselfunktionen eingelesen. Dann wird eine Liste (=z) der ersten 10 Nullstellen von J_0 berechnet. Die algebraischen Operationen der nächsten Zeile werden an Listen einfach elementweise durchgeführt und dann summiert (Apply[Plus...]).

```
<< NumericalMath`BesselZeros`
z=BesselJZeros[0,10];
f[r_]:=Apply[Plus,2 BesselJ[0,r z]/(z BesselJ[1,z])]
Plot[f[r],{r,0,1},PlotRange ->{0,2}]
```



Beispiel 83. In diesem Beispiel betrachten wir kein Randwertproblem, sondern versuchen eine ebene Welle auf dem \mathbb{R}^2 in y -Richtung, nämlich die Welle

$$u(x, y, t) = \cos(y + ct)$$

als Überlagerung von Bessellösungen der Wellengleichung darzustellen. Wir vereinfachen die Situation etwas, indem wir $c = 1$ setzen und die komplexe Welle betrachten: Wir suchen also eine Darstellung

$$e^{i(y+t)} = e^{i(\rho \sin \phi + t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k J_k(\rho) e^{ik\phi} e^{it}.$$

Zu bestimmen sind die c_k . Den Faktor e^{it} kann man kürzen. Dann ergibt sich das Problem, für festes ρ die 2π -periodische Funktion $e^{i\rho \sin \phi}$ in eine komplexe Fourierreihe zu entwickeln.

Die Formel für die Fourierkoeffizienten hilft nicht weiter, und wir benutzen unsere Kenntnis der Exponentialreihe. Wir setzen $e^{i\phi} = z$. Dann ist $z\bar{z} = |e^{i\phi}|^2 = 1$, also $\bar{z} = \frac{1}{z}$ und

$$i \sin \phi = \frac{1}{2}(z - \bar{z}) = \frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right).$$

Damit erhalten wir weiter

$$\begin{aligned} e^{i\rho \sin \phi} &= e^{\frac{\rho}{2}z} e^{-\frac{\rho}{2}\frac{1}{z}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\frac{\rho}{2})^m}{m!} z^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\frac{\rho}{2})^n}{n!} z^{-n} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{\substack{m-n=k \\ m, n \geq 0}} \frac{(-1)^n (\frac{\rho}{2})^{m+n}}{m!n!} \right) z^k \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+k)!n!} (\frac{\rho}{2})^{2n} (\frac{\rho}{2})^k \right)}_{=J_k(\rho)} z^k \end{aligned} \quad (116)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\rho) e^{ik\phi}. \quad (117)$$

(Auf der rechten Seite von (116) darf die Summe über n eigentlich erst bei $\min(-k, 0)$ beginnen, weil $m = n + k$ positiv sein muss. Aber wir interpretieren $\frac{1}{(n+k)!} = 0$, falls $n + k < 0$. Genauso hatten wir die J_k für negatives k definiert.)

Überraschenderweise ist also

$$c_k = 1 \text{ für alle } k,$$

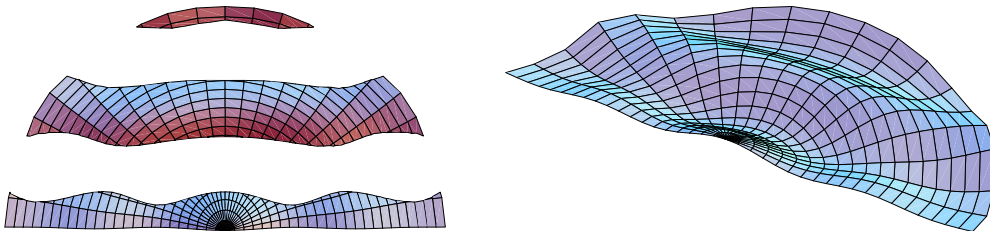
und wir erhalten

$$e^{i(y+t)} = e^{it} \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\rho) e^{ik\phi} \quad (118)$$

oder

$$\cos(y+t) = \operatorname{Re} \left(e^{it} \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\rho) \sin(k\phi) \right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\rho) (\cos(k\phi) \cos t - \sin(k\phi) \sin t). \quad (119)$$

Man nennt die Funktion $e^{\frac{\rho}{2}(z-\frac{1}{z})}$, deren Potenzreihe die Besselfunktionen als Koeffizienten hat, auch die *erzeugende Funktion* für die ganzzahligen Besselfunktionen und die ganzzahligen Besselfunktionen *Besselkoeffizienten*. Die nachstehenden Bilder geben den Graphen einer Partialsumme der rechten Seite (mit $t = 0$) wieder, einmal in Draufsicht mit „Clipping“, wie im Abschnitt 3.3.1 und einmal in einer schrägen Ansicht.



□

Aus der Formel (118) lassen sich sehr einfach wichtige Beziehungen zwischen den ganzzahligen Besselfunktionen gewinnen. Das machen wir nun vor.

Wir differenzieren

$$e^{\frac{\rho}{2}(x-\frac{1}{x})} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\rho)x^k \quad (120)$$

nach ρ und erhalten

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} J'_k(\rho)x^k &= \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)e^{\frac{\rho}{2}(x-\frac{1}{x})} = \frac{1}{2}x \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\rho)x^k - \frac{1}{2x} \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\rho)x^k \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}J_k(\rho)x^{k+1} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}J_k(\rho)x^{k-1} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}(J_{k-1}(\rho) - J_{k+1}(\rho))x^k. \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich folgt

$$\boxed{2J'_k = J_{k-1} - J_{k+1}.} \quad (121)$$

Differentiation nach x liefert mit einer ähnlichen Rechnung

$$\boxed{\frac{2k}{\rho}J_k(\rho) = J_{k+1}(\rho) + J_{k-1}(\rho).} \quad (122)$$

Aus beiden Gleichungen zusammen ergibt sich nach kurzer Rechnung

$$\boxed{\frac{d}{d\rho}(\rho^k J_k(\rho)) = \rho^k J_{k-1}(\rho).} \quad (123)$$

Zahlreiche weitere Identitäten für die Bessel- und Zylinderfunktionen finden Sie in den im Literaturverzeichnis angegebenen Büchern.

4.2 Die Legendresche Differentialgleichung

- Die θ -Komponente von Wellen in Kugelkoordinaten wird durch die Legendregleichung bestimmt, die wir nun lösen.
- Die interessante Lösungsschar ist durch Polynome gegeben, deren Verlauf wir untersuchen.

Die Separation der Potentialgleichung

$$\Delta u = 0$$

in Kugelkoordinaten liefert Lösungen der Form

$$u(r, \theta, \phi) = r^k y(\cos \theta) e^{\pm im\phi},$$

wenn y eine Lösung der allgemeinen oder zugeordneten (assozierten) Legendreschen Differentialgleichung

$$(x^2 - 1)y'' + 2xy' + \left(\frac{m^2}{1 - x^2} - k(k + 1) \right) y = 0 \quad (124)$$

ist. Vergleichen Sie dazu den Abschnitt 3.3.2 und rechnen Sie das nach. Man kann zeigen, dass die Separationskonstanten m und k natürliche Zahlen mit $m \leq k$ sein müssen, wenn die Lösungen im Raum wohldefiniert und singularitätenfrei sein sollen. Ganz ähnlich bekommt man Lösungen der **Wellengleichung** oder der **Wärmeleitungsgleichung** in Kugelkoordinaten, vgl. Abschnitt 3.3.2.

Für $m = 0$ erhält man Lösungen, die unabhängig von ϕ , also rotationssymmetrisch um die z -Achse sind. Das ist physikalisch betrachtet ein sehr spezieller Fall, der aber mathematisch von besonderer Wichtigkeit ist. Aus den Lösungen der sehr viel einfacheren $m = 0$ -Legendregleichung, der Legendregleichung im engeren Sinne

$$\boxed{(x^2 - 1)y'' + 2xy' - k(k + 1)y = 0} \quad (125)$$

erhält man nämlich auch die Lösungen der Gleichung (124), die sogenannten *zugeordneten Legendrefunktionen* durch eine sehr einfache Formel. Wir erklären das im Abschnitt 5.12 im Anhang und beschränken uns jetzt auf die Lösung der Gleichung (125).

Im Gegensatz zur Besselgleichung liefert hier ein reiner Potenzreihenansatz Lösungen, die bei geeigneten Anfangswerten sogar Polynome sind. Wir benutzen im folgenden aber eine andere Methode, die vielleicht weniger motiviert ist, dafür aber den Rechenaufwand stark reduziert. Wir werden nämlich rekursiv aus Lösungen der k -ten Legendregleichung solche der $k + 1$ -ten machen.

Wir schreiben (125) in der Form

$$((x^2 - 1)y')' = k(k + 1)y. \quad (126)$$

Beispiel 84 (Der Fall $k = 0$). Die konstante Funktion

$$y(x) = P_0(x) := 1 \quad (127)$$

ist offenbar eine Lösung für $k = 0$, weil dann $y' = 0$ ist. Die homogene lineare Gleichung hat aber noch eine davon unabhängige Lösung. Mit der Kettenregel zeigt man leicht, dass $\frac{d}{dx} \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{1-x^2}$ auf dem Intervall $] -1, +1[$. Daher ist auch

$$y(x) = Q_0(x) = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \quad (128)$$

eine offenbar von P_0 linear unabhängige Lösung auf dem Intervall $] -1, +1[$. \square

4.2.1 Konstruktion von Lösungen für $k > 0$ durch Rekursion.

Es gelte

$$((x^2 - 1)y'_k)' = k(k + 1)y_k. \quad (129)$$

Definiere

$$y_{k+1} := \frac{x^2 - 1}{k + 1} y'_k + xy_k. \quad (130)$$

Dann folgt

$$y'_{k+1} = \frac{1}{k + 1} k(k + 1)y_k + y_k + xy'_k = (k + 1)y_k + xy'_k \quad (131)$$

und damit

$$\begin{aligned} ((x^2 - 1)y'_{k+1})' &= (k + 1)2xy_k + (k + 1)(x^2 - 1)y'_k + (x^2 - 1)y'_k + x((x^2 - 1)y'_k)' \\ &= (k + 2)(x^2 - 1)y'_k + (k + 1)(k + 2)xy_k \\ &= (k + 1)(k + 2) \left(\frac{x^2 - 1}{k + 1} y'_k + xy_k \right) \\ &= (k + 1)(k + 2)y_{k+1}. \end{aligned}$$

Also löst y_{k+1} die "nächste" Legendregleichung. Ausgehend von einer Lösung für $k = 0$, etwa einer der oben gefundenen, erhält man so rekursiv Lösungen für jedes k . Wir überlegen, dass die Rekursion nicht zu trivialen Lösungen führt. Wir zeigen sogar:

Lineare Unabhängigkeit bleibt unter der Rekursion erhalten. Ist y_k eine Lösung und $y_{k+1} = 0$, so ist also

$$0 = \frac{x^2 - 1}{k + 1} y'_k + xy_k.$$

Durch Differenzieren folgt mit (129)

$$0 = ky_k + y_k + xy'_k = xy'_k + (k + 1)y_k.$$

Subtrahiert man das $\frac{x}{k+1}$ -fache dieser Gleichung von der vorangehenden, so folgt $y'_k = 0$ und damit aus der letzten Gleichung $y_k = 0$. Weil Linearkombinationen von Lösungen bei der Rekursion erhalten bleiben, bleiben darum linear unabhängige Lösungen der k -ten Legendregleichung unter der Rekursion auch linear unabhängig.

Eine andere Formulierung für die Rekursion. Elimination der Ableitungen aus (131) mittels (130) liefert

$$\frac{k + 2}{x^2 - 1} (y_{k+2} - xy_{k+1}) = (k + 1)y_k + x \frac{k + 1}{x^2 - 1} (y_{k+1} - xy_k)$$

und daraus

$$(k + 2)y_{k+2} = (2k + 3)xy_{k+1} - (k + 1)y_k$$

oder

$$(k + 1)y_{k+1} = (2k + 1)xy_k - ky_{k-1}. \quad (132)$$

4.2.2 Die Legendrepolynome oder Legendrefunktionen 1. Art

Diese sind definiert durch die sogenannte Formel von Rodrigues

$$P_k(x) = \frac{1}{2^k k!} D^k (x^2 - 1)^k, \quad (133)$$

wobei $D^k = \frac{d^k}{dx^k}$ gesetzt ist. $P_0 = 1$ haben wir oben schon kennengelernt. P_k ist ein Polynom vom Grad k und je nach der Parität von k gerade oder ungerade. Wir zeigen jetzt, dass die P_k die Rekursion (130) erfüllen, also Lösungen der Legendregleichungen liefern. Dafür müssen wir zeigen, dass

$$\frac{1}{2^{k+1}(k+1)!} D^{k+1} (x^2 - 1)^{k+1} = \frac{x^2 - 1}{k+1} \frac{1}{2^k k!} D^{k+1} (x^2 - 1)^k + x \frac{1}{2^k k!} D^k (x^2 - 1)^k$$

oder

$$\frac{1}{2} D^{k+1} (x^2 - 1)^{k+1} = (x^2 - 1) D^{k+1} (x^2 - 1)^k + (k+1)x D^k (x^2 - 1)^k. \quad (134)$$

Nun ist einerseits

$$\begin{aligned} D^{k+1} (x^2 - 1)^{k+1} &= D^{k+1} ((x^2 - 1)(x^2 - 1)^k) \\ &= (x^2 - 1) D^{k+1} (x^2 - 1)^k + (k+1) 2x D^k (x^2 - 1)^k \\ &\quad + \binom{k+1}{2} 2 D^{k-1} (x^2 - 1)^k \end{aligned}$$

und andererseits

$$\begin{aligned} D^{k+1} (x^2 - 1)^{k+1} &= D^k (2x(k+1)(x^2 - 1)^k) \\ &= 2(k+1)x D^k (x^2 - 1)^k + 2k(k+1) D^{k-1} (x^2 - 1)^k. \end{aligned}$$

Subtrahiert man die Hälfte dieser Gleichung von der vorangehenden, so erhält man (134).

Damit erfüllen die Legendrepolynome die Rekursion, also ist das Polynom P_k eine Lösung der k -ten Legendregleichung. Diese Lösungen bekommt man also, wenn man die Rekursion mit $y_0 = P_0 = 1$ startet.

Beispiel 85. Mit den Rekursionsformeln berechnet man

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, & P_1(x) &= x, \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1), & P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \\ P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), & P_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x). \end{aligned}$$

Mit dem binomischen Satz erhält man eine explizite Formel für die Legendrepolynome:

$$P_k(x) = \frac{1}{2^k k!} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} (-1)^j \binom{k}{j} \frac{(2k-2j)!}{(k-2j)!} x^{k-2j}.$$

□

4.2.3 Funktionsverlauf der Legendrefunktionen

Aus der Rodriguesformel (133) sieht man, dass P_k für gerades k gerade und für ungerades k ungerade ist.

$$P_k(-x) = (-1)^k P_k(x).$$

Insbesondere ist

$$P_{2m+1}(0) = 0.$$

Aus (130) folgt

$$P_{k+1}(\pm 1) = \pm P_k(\pm 1),$$

also

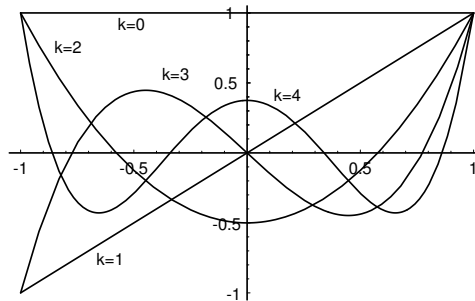
$$P_k(1) = 1, \quad P_k(-1) = (-1)^k.$$

Weiter gilt (vgl. Anhang 5.10)

P_k hat im Intervall $] -1, +1[$ genau k verschiedene Nullstellen.
Die Nullstellen von P_k und P_{k+1} trennen sich gegenseitig.

Mathematica-Plots der Funktionsverläufe von P_k und Q_k sehen so aus:

```
Plot[{LegendreP[0,x],LegendreP[1,x], LegendreP[2,x],LegendreP[3,x],
LegendreP[4,x] },{x,-1,1}]
```

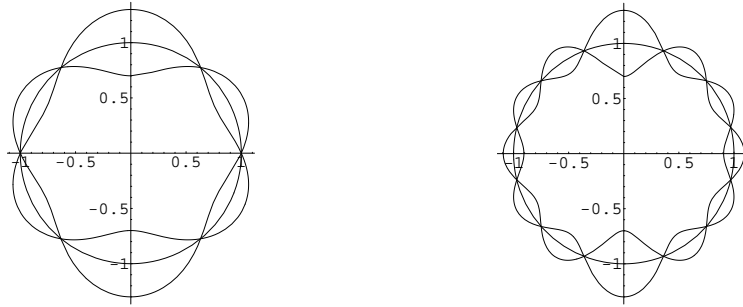


Das Bild suggeriert

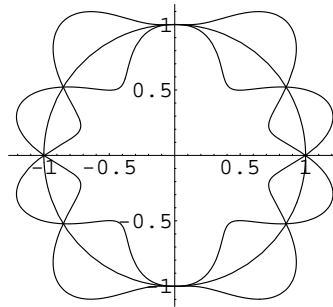
$$|P_k(x)| \leq 1,$$

und das kann man wirklich für alle k beweisen, vgl. Anhang 5.13.

Zum Schluß versuchen wir noch die Veranschaulichung der entsprechenden Lösungen der Wellengleichung. Dazu geben wir das (geeignet skalierte) Profil von P_3 und P_6 als Graph über der Sphäre im Querschnitt wieder. Beachten Sie, dass die Legendrepolynome P_k zum Fall $m = 0$, also zu von der ϕ -Koordinate unabhängigen Lösungen gehören:



Wellen, die auch in der ϕ -Richtung modelliert sind, haben in den Polen Knoten, vgl. Anhang 5.12. Die Darstellung von $P_6^{(3)}$ sieht denn auch so aus:



4.2.4 Entwicklung nach Legendrepolynome

Für die Entwicklung nach Legendrefunktionen sind die Orthogonalitätsrelationen wichtig. Es gilt

$$\int_{-1}^{+1} P_k(x)P_l(x)dx = \begin{cases} \frac{2}{2k+1} & \text{für } k = l, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Einen Beweis geben wir im Anhang. Durch Substitution $x = \cos \theta$ erhält man eine Version, die zur Verwendung mit Kugelkoordinaten handlicher ist:

$$\int_0^\pi P_k(\cos \theta)P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \begin{cases} \frac{2}{2k+1} & \text{für } k = l, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beispiel 86. Wir haben zu Beginn des Abschnitts über die Legendregleichung gesehen, dass die Funktionen $r^k P_k(\cos \theta)$ bezüglich der z -Achse rotationsymmetrische Lösungen der Potentialgleichung $\Delta u = 0$ sind. Dann sind aber auch Linearkombinationen der Form

$$u(r, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(\cos \theta) r^k$$

Lösungen dieser Gleichung.

Will man Randbedingungen $u(R, \theta) = u_R(\theta)$ auf der Kugel vom Radius R vorgeben, so muss man also eine Entwicklung

$$u_R(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k R^k P_k(\cos \theta)$$

finden. Für „anständige“ (zum Beispiel stetig differenzierbare) Funktionen $u_R : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ ist das möglich, und die Koeffizienten lassen sich aufgrund der Orthogonalitätsrelationen einfach bestimmen:

$$a_k = \frac{2k+1}{2R^k} \int_0^\pi u_R(\theta) P_k(\cos \theta) \sin \theta d\theta.$$

□

4.2.5 Die allgemeine Lösung, Legendrefunktionen 2. Art

Beginnt man die Rekursion (130) mit $Q_0(x) = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ (vgl. Beispiel 84), so erhält man die mit Q_k bezeichneten *Legendrefunktionen 2. Art*. Weil P_0 und Q_0 linear unabhängig sind, bleiben P_k, Q_k für alle k linear unabhängig und bilden daher ein Fundamentalsystem für die k -te Legendregleichung auf $] -1, +1[$.

Zur Darstellung der Q_k merken wir an, dass

$$Q_k(x) = P_k(x) \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + q_k(x), \tag{135}$$

mit einem Polynom $q_k(x)$ vom Grad $< k$ und $q_k(-x) = (-1)^{k+1} q_k(x)$. Insbesondere ist

$$Q_k(-x) = (-1)^{k+1} Q_k(x).$$

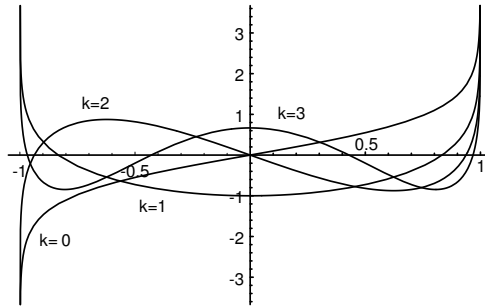
Die Darstellung (135) stimmt sicher für Q_0 . Wenn aber Q_k bereits von dieser Form ist, so folgt

$$\begin{aligned}
 Q_{k+1}(x) &= \frac{x^2-1}{k+1} Q'_k(x) + x Q_k(x) \\
 &= \frac{x^2-1}{k+1} P'_k(x) \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \frac{x^2-1}{k+1} P_k(x) \frac{1}{1-x^2} + \frac{x^2-1}{k+1} q'_k(x) \\
 &\quad + x P_k(x) \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + x q_k(x) \\
 &= P_{k+1}(x) \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \underbrace{\frac{1}{k+1} (P_k(x) + (x^2-1)q'_k(x)) + x q_k(x)}_{=: q_{k+1}(x)}.
 \end{aligned}$$

Dabei ist q_{k+1} ein Polynom vom Grad höchstens k und gerade bzw. ungerade, wenn q_k ungerade bzw. gerade ist. Es gilt

$$\lim_{x \nearrow 1} Q_k(x) = +\infty = (-1)^{k+1} \lim_{x \searrow -1} Q_k(x).$$

Wegen ihrer Unbeschränktheit spielen die Funktionen 2. Art in vielen Anwendungen keine Rolle.



Plot[{LegendreQ[0,x],LegendreQ[1,x], LegendreQ[2,x],LegendreQ[3,x]},
{x,-1,1}]

4.2.6 Die erzeugende Funktion der Legendrepolynome

Mit der Darstellung des Laplaceoperators in Kugelkoordinaten ergibt sich unmittelbar, dass das Coulombpotential einer Ladung Q im Ursprung die Potentialgleichung erfüllt:

$$\Delta \frac{Q}{4\pi\epsilon r} = 0.$$

Natürlich gilt das dann auch für Ladungen in jedem anderen Punkt. Wir betrachten eine Ladung im „Nordpol“ der Einheitskugel, also im Punkt $(0, 0, 1)$. Wir beschreiben nun das Potential im Inneren der Kugel in den üblichen Kugelkoordinaten. Aus

$$\left| \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \phi \\ r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \theta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{r^2 \sin^2 \theta + (r \cos \theta - 1)^2} = \sqrt{1 - 2r \cos \theta + r^2}$$

(oder aus dem Cosinussatz) erhalten wir

$$u(r, \theta, \phi) = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{\sqrt{1 - 2r \cos \theta + r^2}}$$

Das sollte sich schreiben lassen als (vermutlich unendliche) Linearkombination von Potentialen $r^k P_k(\cos \theta)$:

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{\sqrt{1 - 2r \cos \theta + r^2}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \sum_{k=0}^{\infty} c_k P_k(\cos \theta) r^k$$

oder, mit $x := \cos \theta$,

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2rx + r^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k P_k(x) r^k$$

Wir betrachten bei festem $x = \cos \theta$ die linke Seite als Funktion von r . Mit Hilfe der binomischen Reihe $[(1+r)^\alpha = \sum \binom{\alpha}{k} r^k$ für $|r| < 1$] kann man zeigen, dass man diese Funktion für $|r| < 1$ in eine Potenzreihe entwickeln kann:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2rx + r^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k. \quad (136)$$

Wir wollen die a_k berechnen und sehen, in welcher Beziehung sie zu den $P_k(x)$ stehen. Dazu differenzieren wir die letzte Gleichung und erhalten

$$\frac{x - r}{1 - 2rx + r^2} \frac{1}{\sqrt{1 - 2rx + r^2}} = \sum k a_k r^{k-1}. \quad (137)$$

Es folgt

$$(x - r) \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k = (1 - 2rx + r^2) \sum k a_k r^{k-1}.$$

Mit $a_{-1} := 0$ schreibt sich das als

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k x - a_{k-1}) r^k = \sum_{k=0}^{\infty} ((k+1)a_{k+1} - 2xka_k + (k-1)a_{k-1}) r^k.$$

Koeffizientenvergleich liefert

$$(k+1)a_{k+1} = (2k+1)xa_k - ka_{k-1}.$$

Das ist gerade die Rekursionsformel (132), und weil man durch Einsetzen von $r = 0$ in (136) und (137) die Anfangswerte $a_0 = 1 = P_0$ und $a_1 = x = P_1(x)$ erhält, folgt $a_k = P_k(x)$. Man bekommt

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{1 - 2rx + r^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(x) r^k.} \quad (138)$$

Die Funktion links nennt man auch *die erzeugende Funktion* der Legendrepolynome und die Entwicklung

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{1 - 2r \cos \theta + r^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\cos \theta) r^k} \quad (139)$$

die *Multipolentwicklung*.

Beispiel 87.*Theoretische Elektrotechnik, Abschnitt 7.5*

Das Potential einer Ladung Q in $(0, 0, a)$ mit positivem oder negativem a im Innern der Kugel vom Radius $|a|$ ist nach dem Vorstehenden gegeben durch

$$\begin{aligned} u(r, \theta, \phi) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{\sqrt{a^2 - 2ar \cos \theta + r^2}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon|a|} \frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{r}{a} \cos \theta + (\frac{r}{a})^2}} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon|a|} \sum P_k(\cos \theta) \left(\frac{r}{a}\right)^k. \end{aligned}$$

Nun ist aber auch

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{\sqrt{a^2 - 2ar \cos \theta + r^2}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r} \frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{a}{r} \cos \theta + (\frac{a}{r})^2}}$$

Darum gilt für das Potential im Außenraum der Kugel, d.h. für $r > |a|$,

$$u(r, \theta, \phi) = \frac{Q}{4\pi\epsilon r} \sum P_k(\cos \theta) \left(\frac{a}{r}\right)^k.$$

Das Potential eines Dipols mit Ladungen $\pm Q$ in $(0, 0, \pm a)$ ist für $r > |a|$ gegeben durch

$$\begin{aligned} u_D(r, \theta, \phi) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon r} \sum P_k(\cos \theta) \left(\frac{a}{r}\right)^k + \frac{-Q}{4\pi\epsilon r} \sum P_k(\cos \theta) \left(\frac{-a}{r}\right)^k \\ &= \frac{2Q}{4\pi\epsilon r} \sum_{k \text{ ungerade}} P_k(\cos \theta) \left(\frac{a}{r}\right)^k \\ &= \frac{2aQ}{4\pi\epsilon r^2} \left(\cos \theta + P_3(\cos \theta) \left(\frac{a}{r}\right)^2 + P_5(\cos \theta) \left(\frac{a}{r}\right)^4 + \dots \right). \end{aligned}$$

5 Anhang

Die Themen des Anhangs ergänzen den Vorlesungsstoff. Sie können allenfalls im Wintersemester in der Vorlesung selbst behandelt werden.

5.1 Die Matrix-Exponential-Lösung

Vergleichen Sie hierzu *Regelung in der Luft- und Raumfahrt, Abschnitt 4.1.2* oder *Regelungstechnik II, Abschnitt 3.2*.

Wir beschreiben eine sehr elegante Methode, um homogene lineare Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten zu lösen, also Systeme der Form

$$\begin{aligned}y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \\y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n \\&\quad \dots \\y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{nm}y_2 + \dots + a_{nn}y_n\end{aligned}$$

oder kurz

$$\vec{y}' = A\vec{y}.$$

Für $n = 1$ ist das einfach

$$y' = ay,$$

und das hat die Lösungen

$$y = e^{ta}b,$$

wobei b eine beliebige Konstante, nämlich $y(0)$ ist.

Im allgemeinen Fall kann man $\vec{y}(t) = e^{xA}b$ versuchen, aber was soll das bedeuten? Nun, (n, n) -Matrizen kann man miteinander multiplizieren und addieren, also kann man

$$\sum_{k=0}^K \frac{x^k}{k!} A^k$$

wenigstens für endliches K bilden. Man erhält wieder eine (n, n) -Matrix mit von x abhängigen Koeffizienten. Und man kann beweisen, dass diese Koeffizienten für $K \rightarrow \infty$ für jedes x konvergieren. Den Grenzwert nennt man e^{xA} . Weiter kann man die entstehende Reihe einfach gliedweise differenzieren und erhält – wie bei $n = 1$ –

$$\frac{d}{dx} e^{xA} = A e^{xA} \quad (\text{Produkt von zwei Matrizen}).$$

Zurück zu unserem Ansatz für die Differentialgleichung. Weil \vec{y} eine vektorwertige Funktion werden soll, muß natürlich b ein Vektor $b = \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ sein. Und tatsächlich ist dann

$$\vec{y}(x) = e^{xA}\vec{v}$$

eine Lösung des Differentialgleichungssystems mit der Anfangsbedingung $\vec{y}(0) = \vec{v}$.

Die kann man also einfach so hinschreiben! Nur ist sie nicht so einfach auszurechnen, weil man alle die Matrixpotenzen bilden und addieren und schließlich den Grenzwert der unendlichen Reihe bilden muß. Wenn allerdings $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ ist, folgt

$$e^{xA}\vec{v} = e^{\lambda x}\vec{v},$$

und man ist wieder bei der Eigenwertmethode angekommen.

Weiter erhalten wir mit

$$e^{\lambda x E} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j x^j}{j!} E^j = e^{\lambda x E}$$

für beliebiges $\lambda \in \mathbb{C}$

$$e^{xA} \vec{v} = e^{\lambda x E + x(A - \lambda E)} \vec{v} = e^{\lambda x E} e^{x(A - \lambda E)} \vec{v} = e^{\lambda x} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} (A - \lambda E)^j \vec{v}.$$

Ist nun \vec{v} ein Hauptvektor, also etwa $(A - \lambda E)^k \vec{v} = 0$, so ergibt sich eine *endliche* Summe

$$e^{xA} \vec{v} = e^{\lambda x} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^j}{j!} (A - \lambda E)^j \vec{v}. \quad (140)$$

Dies liefert den Zusammenhang mit dem Satz 19.

Warnung. Man könnte meinen, wenn $B(x)$ allgemeiner eine matrixwertige Funktion und $B'(x) = A(x)$ ist, dann sei $\vec{y}(x) = e^{B(x)} \vec{v}$ eine Lösung von

$$\vec{y}' = A(x) \vec{y}.$$

Das ist falsch, weil im allgemeinen $\frac{d}{dx} e^{B(x)} \neq B'(x) e^{B(x)}$. Der Grund liegt in der Nicht-Kommutativität der Matrizenmultiplikation. Es gilt

$$\frac{d}{dx} B^2(x) = B'(x)B(x) + B(x)B'(x) \neq 2B'(x)B(x).$$

5.2 Ein Grenzwertproblem

Die Differentialgleichung

$$y'' - 2y' + (1 - \lambda^2)y = 0$$

hat die charakteristische Gleichung

$$\mu^2 - 2\mu + (1 - \lambda^2) = 0$$

mit den Nullstellen

$$\mu_{1,2} = 1 \pm \lambda.$$

Sie hat daher für $\lambda \neq 0$ eine Lösungsbasis

$$y_1(x) = e^{(1+\lambda)x}; \quad y_2(x) = e^{(1-\lambda)x}.$$

Für $\lambda \rightarrow 0$ rücken die beiden Nullstellen zusammen gegen eine doppelte Nullstelle $\mu_{1,2} = 1$, und die Lösungen werden im Grenzfall linear abhängig. Wir wollen nun ein (natürlich von λ abhängiges) Fundamentalsystem angeben, das für $\lambda \rightarrow 0$ stetig in ein Fundamentalsystem übergeht. Wir betrachten für $\lambda > 0$ das Fundamentalsystem

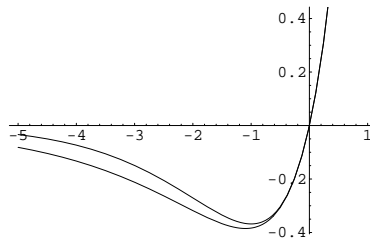
$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^{(1+\lambda)x}, \\ y_2(x) &= \frac{1}{2\lambda}e^{(1+\lambda)x} - \frac{1}{2\lambda}e^{(1-\lambda)x} \\ &= e^x \frac{e^{\lambda x} - e^{-\lambda x}}{2\lambda} = e^x \frac{\sinh \lambda x}{\lambda} \end{aligned}$$

Geht λ gegen 0, so geht die Lösung $y_1(x)$ offensichtlich gegen e^x . Nach der Regel von de l'Hospital ist aber

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\sinh \lambda x}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{x \cosh \lambda x}{1} = x,$$

und daher geht die zweite Lösung gegen xe^x .

Die nebenstehende Abbildung zeigt die Graphen von xe^x und $y_2(x)$ für $\lambda = 0.5$.



5.3 Partialbruchzerlegung

Wir wiederholen die Technik der Partialbruchzerlegung, weil sie für die inversen Integraltransformationen wichtig ist.

Wir betrachten eine komplexe rationale Funktion $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ mit

$$\text{Grad } p < \text{Grad } q$$

und nehmen an, dass wir die Nullstellen von q kennen:

$$q(s) = (s - s_1)^{n_1} \dots (s - s_k)^{n_k}$$

mit paarweise verschiedenen Nullstellen s_1, \dots, s_k und mit den positiven Nullstellenordnungen n_1, \dots, n_k .⁸

Der Ansatz für die Partialbruchzerlegung sieht dann so aus:

$$\boxed{\frac{p(s)}{(s - s_1)^{n_1} \dots (s - s_k)^{n_k}} = \sum_{j=1}^k \sum_{l=1}^{n_j} \frac{A_{jl}}{(s - s_j)^l}}. \quad (141)$$

Zu einer n -fachen Nullstelle s_j gehören also n Summanden

$$\frac{A_{j1}}{(s - s_j)^1} + \dots + \frac{A_{jn}}{(s - s_j)^n}.$$

Zur Bestimmung der Koeffizienten A_{jl} kann man die Gleichung (141) mit dem Hauptnenner $(s - s_1)^{n_1} \dots (s - s_k)^{n_k}$ multiplizieren und dann Koeffizientenvergleich machen. Eine effektivere Methode ist die ‐Zuhaltenmethode‐: Man hält der Reihe nach einen der Nennerfaktoren $(s - s_j)^{n_j}$ auf der linken Seite zu und setzt s_j in den verbleibenden Bruch ein. Der Wert ist der höchste Koeffizient A_{jn_j} . Sind die Nullstellen alle einfach, so ist man damit bereits fertig.

Beispiel 88. Wir betrachten

$$f(s) = \frac{s^2 + s + 4}{(s - 3)(s^2 + 1)} = \frac{s^2 + s + 4}{(s - 3)(s - i)(s + i)} = \frac{A}{s - 3} + \frac{B}{s - i} + \frac{C}{s + i}.$$

Nach der Zuhalttemethode ergibt sich:

$$\begin{aligned} A &= \frac{3^2 + 3 + 4}{3^2 + 1} = \frac{8}{5}, \\ B &= \frac{i^2 + i + 4}{(i - 3)(i + i)} = -\frac{3 + i}{2 + 6i} = -\frac{(3 + i)(2 - 6i)}{(2 + 6i)(2 - 6i)} = -\frac{3}{10} + \frac{2}{5}i, \\ C &= \frac{(-i)^2 - i + 4}{(-i - 3)(-i - i)} = -\frac{3 - i}{2 - 6i} = -\frac{3}{10} - \frac{2}{5}i. \end{aligned}$$

Die Partialbruchzerlegung ist also

$$\frac{s^2 + s + 4}{(s - 3)(s^2 + 1)} = \frac{8}{5} \frac{1}{s - 3} + \frac{-\frac{3}{10} + \frac{2}{5}i}{s - i} + \frac{-\frac{3}{10} - \frac{2}{5}i}{s + i}.$$

□

⁸Den Koeffizienten der höchsten Nennerpotenz können wir ‐in den Zähler schieben‐ und ohne Einschränkung annehmen, dass $q(s)$ mit dem Term s^n beginnt.

Hat der Nenner aber auch Nullstellen höherer Ordnung, so bleiben noch weitere A_{j_l} zu bestimmen. Wieder kann man mit dem Hauptnenner durchmultiplizieren und Koeffizientenvergleich machen, wobei es hilfreich ist, die höchsten Koeffizienten schon bestimmt zu haben. Oft ist es aber einfacher, vor oder nach der Multiplikation mit dem Hauptnenner spezielle Werte für s einzusetzen.

Beispiel 89.

$$\frac{5s^2 - 4s + 7}{s^3 + s^2 - 5s + 3} = \frac{5s^2 - 4s + 7}{(s-1)^2(s+3)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{(s-1)^2} + \frac{C}{s+3}.$$

Die Zuhaltmethode liefert

$$B = \frac{5 - 4 + 7}{4} = 2, \quad C = \frac{45 + 12 + 7}{16} = 4.$$

Durch Multiplikation mit dem Hauptnenner finden wir

$$5s^2 - 4s + 7 = A(s-1)(s+3) + 2(s+3) + 4(s+1)^2,$$

und $s = 0$ liefert

$$7 = -3A + 6 + 4.$$

Also ist $A = 1$.

□

5.4 Laplacetransformation versus Variation der Konstanten

Wir wollen die „klassische Lösungsmethode“ für eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung vergleichen mit der Lösung mittels Laplacetransformation.

Beispiel 90. Wir betrachten das folgende Anfangswertproblem:

$$\begin{aligned} y'' + 4y' + 13y &= 2t + 3e^{-2t} \cos 3t, \\ y(0) &= 0, \quad y'(0) = -1. \end{aligned}$$

Klassische Lösung.

1. **Lösen der homogenen Gleichung.** Die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$$

hat die Lösungen

$$\lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4 - 13} = -2 \pm 3i.$$

Das liefert eine Lösungsbasis:

$$y_1(t) = e^{-2t} \cos 3t, \quad y_2(t) = e^{-2t} \sin 3t.$$

2. **Variation der Konstanten.** Aus

$$e^{-2t} \begin{pmatrix} \cos 3t & \sin 3t \\ -2 \cos 3t - 3 \sin 3t & -2 \sin 3t + 3 \cos 3t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2t + 3e^{-2t} \cos 3t \end{pmatrix}$$

folgt

$$\begin{aligned} c_1' &= -\tan 3t c_2' \\ ((2 \cos 3t + 3 \sin 3t) \tan 3t - 2 \sin 3t + 3 \cos 3t) c_2' &= 2te^{2t} + 3 \cos 3t \end{aligned}$$

und

$$((2 \cos 3t + 3 \sin 3t) \sin 3t - 2 \sin 3t \cos 3t + 3 \cos^2 3t) c_2' = 2t \cos 3te^{2t} + 3 \cos^2 3t.$$

Daraus erhält man

$$c_2' = \frac{2}{3}t \cos 3te^{2t} + \cos^2 3t, \quad c_1' = -\frac{2}{3}t \sin 3te^{2t} - \sin 3t \cos 3t.$$

Durch etwas mühsame Integration findet man

$$c_1 = \frac{1}{2028} (-96e^{2t} \cos 3t + 312e^{2t}t \cos 3t + 169 \cos 6t - 40e^{2t} \sin 3t - 208e^{2t}t \sin 3t + a_1)$$

$$c_2 = \frac{1}{2028} (1014t + 40e^{2t} \cos 3t + 208te^{2t} \cos 3t - 96e^{2t} \sin 3t + 312te^{2t} \sin 3t + 169 \sin 6t + a_2)$$

Dabei haben wir Integrationskonstanten a_1, a_2 eingebaut.

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung ist

$$y(t) = c_1(t)e^{-2t} \cos 3t + c_2(t)e^{-2t} \sin 3t.$$

mit den gerade berechneten $c_i(t)$.

3. **Erfüllung der Anfangsbedingungen.** Es soll gelten

$$0 = y(0) = c_1(0) = \frac{1}{2028}(73 + a_1) \implies a_1 = -73$$

$$-1 = y'(0) = c_1'(0) - 2c_1(0) + 3c_2(0) = 3c_2(0) = \frac{1}{676}(40 + a_2) \implies a_2 = -716$$

Einsetzen ergibt schließlich die gesuchte Lösung

$$y(t) = \frac{1}{2028}((-96 + 312t) \cos^2 3t + 169e^{-2t} \cos 6t \cos 3t - 73e^{-2t} \cos 3t$$

$$+ (-96 + 312t) \sin^2 3t + 169e^{-2t} \sin 6t \sin 3t - 716e^{-2t} \sin 3t + 1014te^{-2t} \sin 3t)$$

$$= \frac{1}{2028}((-96 + 312t) + 96e^{-2t} \cos 3t - 716e^{-2t} \sin 3t + 1014te^{-2t} \sin 3t)$$

$$= \frac{2}{13}t - \frac{8}{169} + \frac{e^{-2t}}{2028}(96 \cos 3t - 716 \sin 3t + 1014t \sin 3t).$$

Lösung mit Laplacetransformation. Wir schreiben $Y(s) := \mathcal{L}[y](s)$. Nun wenden wir die Laplacetransformation auf die Differentialgleichung an, wobei wir die oben bewiesenen Sätze und die Anfangsbedingungen benutzen:

$$s^2Y - y'(0) - sy(0) + 4(sY - y(0)) + 13Y = 2\mathcal{L}[t] + 3\mathcal{L}[e^{-2t} \cos 3t]$$

$$s^2Y + 1 + 4sY + 13Y = 2\frac{1}{s^2} + 3\frac{s+2}{(s+2)^2+9}$$

$$Y(s^2 + 4s + 13) = -1 + 2\frac{1}{s^2} + 3\frac{s+2}{(s+2)^2+9}$$

Auflösen nach Y liefert

$$Y(s) = \frac{-1}{s^2 + 4s + 13} + 2\frac{1}{s^2(s^2 + 4s + 13)} + 3\frac{s+2}{(s^2 + 4s + 13)^2}.$$

Nun müssen wir „Rücktransformieren“. Zunächst ist

$$\frac{-1}{s^2 + 4s + 13} = \frac{-1}{3} \frac{3}{(s+2)^2 + 9} = \mathcal{L}\left[-\frac{1}{3}e^{-2t} \sin 3t\right]$$

Auch der dritte Term bietet (mit einem kleinen Trick) keine Schwierigkeit:

$$3\frac{s+2}{(s^2 + 4s + 13)^2} = 3\frac{3(s+2)}{((s+2)^2 + 9)^2} = -\frac{3}{2} \frac{d}{dz} \frac{1}{(s+2)^2 + 9}$$

$$= -\frac{3}{2} \frac{d}{dz} \mathcal{L}\left[\frac{1}{3}e^{-2t} \sin 3t\right] = \mathcal{L}\left[\frac{1}{2}e^{-2t} \sin 3t\right].$$

Mühsamer ist der mittlere Term. Den müssen wir erst in Partialbrüche zerlegen. Die Rechnung unterdrücken wir, so wie oben die Integration der c_i . Man findet

$$\frac{1}{s^2(s^2 + 4s + 13)} = -\frac{8}{169} \frac{1}{s} + \frac{2}{13} \frac{1}{s^2} + \frac{1}{169} \frac{8s+6}{(s+2)^2+9}$$

$$= -\frac{8}{169} \frac{1}{s} + \frac{2}{13} \frac{1}{s^2} + \frac{8}{169} \frac{s+2}{(s+2)^2+9} - \frac{8}{169} \frac{10}{(s+2)^2+9}$$

$$= \mathcal{L}\left[-\frac{8}{169} + \frac{2}{13}t + \frac{8}{169}e^{-2t} \cos 3t - \frac{8}{169} \frac{10}{3}e^{-2t} \sin 3t\right]$$

Insgesamt erhalten wir

$$y(t) = -\frac{1}{3}e^{-2t} \sin 3t + \frac{1}{2}e^{-2t} \sin 3t - \frac{8}{169} + \frac{2}{13}t + \frac{8}{169}e^{-2t} \cos 3t - \frac{8}{169} \frac{10}{3}e^{-2t} \sin 3t$$

$$= \frac{2}{13}t - \frac{8}{169} + \frac{e^{-2t}}{2028}(96 \cos 3t - 716 \sin 3t + 1014t \sin 3t)$$

wie oben. □

Das vorstehende Beispiel zeigt, dass die Laplacemethode einfacher ist als die Variation der Konstanten. Mit Mathematica geht es aber noch viel einfacher:

Beispiel 91. In[1]:=DSolve[{y''[t]+4y'[t]+13==0, y[0]==0, y'[0]==-1},y[t],t]
Out[1]={ { y(t) -> $\frac{e^{-2t}(312e^{2t}t+1014\sin(3t)t-96e^{2t}+96\cos(3t)-716\sin(3t))}{2028}$ } }

□

5.5 Die Laplacetransformierte der Besselfunktionen

Wir zeigen, wie man die Injektivität der Laplacetransformation (Satz 41 von Lerch) benutzen kann, um Laplacetransformierte zu berechnen.

Beispiel 92. Wenn wir $Y = \mathcal{L}[y]$ schreiben, ergibt das Anfangswertproblem

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

nach Laplacetransformation

$$s^2 Y - s \cdot 0 - 1 + Y = 0$$

oder

$$Y = \frac{1}{1 + s^2}.$$

Andererseits kennen wir natürlich die Lösung y des obigen Anfangswertproblems: Sie ist $y(t) = \sin t$. Daher ist nach dem Satz von Lerch:

$$\mathcal{L}[\sin t] = \frac{1}{1 + s^2}.$$

□

Dies Beispiel zeigt eine Methode zum Berechnen der Laplacetransformation, die allerdings für die Sinusfunktion nichts neues liefert. In nächsten Beispiel wenden wir dieselbe Methode auf eine etwas kompliziertere Differentialgleichung an:

Beispiel 93 (Besselfunktionen). Die Besselgleichung 0. Ordnung

$$t^2 y'' + t y' + (t^2 - 0)y = 0$$

hat genau eine Lösung y mit

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0,$$

nämlich die Besselfunktion J_0 . Sowohl J_0 wie seine Ableitung J_0' sind von exponentieller Ordnung. Wir betrachten die gleichwertige Gleichung

$$t(y'' + y) + y' = 0. \tag{142}$$

Laplacetransformation liefert

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{d}{ds} \mathcal{L}[y'' + y] + \mathcal{L}[y'] \\ &= -\frac{d}{ds} (s^2 Y - s y(0) - y'(0) + Y) + s Y - y(0) \\ &= -Y'(1 + s^2) - s Y. \end{aligned}$$

Die Differentialgleichung $Y' = -\frac{s}{1+s^2} Y$ hat die Lösungen $Y(s) = \frac{c}{\sqrt{1+s^2}}$ mit einer Konstanten c , wie man sofort durch Differenzieren bestätigt. Also gilt

$$\mathcal{L}[J_0] = \frac{c}{\sqrt{1 + s^2}}$$

für eine geeignete Konstante c . Diese berechnet sich, weil J_0' von exponentieller Ordnung ist, nach dem zweiten Teil von Satz 35 wie folgt:

$$0 = \lim_{x \rightarrow \infty} \mathcal{L}[J_0'](x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x \mathcal{L}[J_0](x) - J_0(0)) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{xc}{\sqrt{1+x^2}} - 1 \right) = c - 1.$$

Also ist $c = 1$ und

$$\mathcal{L}[J_0] = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}.$$

Mit Hilfe der Rekursionsformel (121)

$$2J'_k = J_{k-1} - J_{k+1}$$

findet man auch die Laplacetransformierten der höheren Besselfunktionen. Wir erhalten

$$2s\mathcal{L}[J_k] - 2J_k(0) = \mathcal{L}[J_{k-1}] - \mathcal{L}[J_{k+1}],$$

also

$$\mathcal{L}[J_{k+1}] = \mathcal{L}[J_{k-1}] - 2s\mathcal{L}[J_k] + 2J_k(0). \quad (143)$$

Wegen $J_{-1} = -J_1$ ergibt sich daraus

$$2\mathcal{L}[J_1] = -2s\mathcal{L}[J_0] + 2J_0(0) = 2 - 2\frac{2}{\sqrt{1+s^2}}$$

oder

$$\mathcal{L}[J_1] = \frac{\sqrt{1+s^2} - s}{\sqrt{1+s^2}}.$$

Für $k \geq 1$ ist der Anfangswert in (143) null und durch Induktion erhält man

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[J_{k+1}] &= \mathcal{L}[J_{k-1}] - 2s\mathcal{L}[J_k] = \frac{(\sqrt{1+s^2} - s)^{k-1}}{\sqrt{1+s^2}} - 2s \frac{(\sqrt{1+s^2} - s)^k}{\sqrt{1+s^2}} \\ &= \frac{(\sqrt{1+s^2} - s)^{k-1}(1 - 2s\sqrt{1+s^2} + 2s^2)}{\sqrt{1+s^2}} = \frac{(\sqrt{1+s^2} - s)^{k-1}(\sqrt{1+s^2} - s)^2}{\sqrt{1+s^2}} \\ &= \frac{(\sqrt{1+s^2} - s)^{k+1}}{\sqrt{1+s^2}}. \end{aligned}$$

Daher gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{L}[J_k] = \frac{(\sqrt{1+s^2} - s)^k}{\sqrt{1+s^2}}.$$

□

5.6 Die Parsevalsche Gleichung für die Fouriertransformation

Vergleichen Sie hierzu auch *Abschnitt 4.9 Energie- und Leistungsdichtespektren in Signale und Systeme*.

Nach der Parsevalschen Gleichung für Fourierreihen ist die Energie einer T -periodischen Schwingung f gegeben durch

$$\frac{2}{T} \int_0^T f(t)^2 dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2),$$

also im wesentlichen durch die Quadratsumme der Fourierkoeffizienten. Eine entsprechende Identität gilt für aperiodische Schwingungen, wobei an die Stelle der unendlichen Reihe wieder ein Integral und an die Stelle der Fourierkoeffizienten die Fouriertransformierte tritt.

Wir geben eine etwas allgemeinere Version dieses Sachverhalts: Seien $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ zwei S -Funktionen mit Fouriertransformierten $F(\omega), G(\omega)$, und sei \bar{g} die komplex-konjugierte Funktion zu $g(t)$. Aus der Definition der Fouriertransformation sieht man leicht, dass die Fouriertransformierte zu \bar{g} dann gegeben ist durch $\mathcal{F}[\bar{g}](-\omega) = \bar{G}(\omega)$. Damit gilt nach dem Faltungssatz

$$\mathcal{F}[f\bar{g}](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\bar{g}(t)e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau)\bar{G}(\tau - \omega) d\tau.$$

Für $\omega = 0$ erhält man (wenn man nachträglich die Integrationsvariable τ wieder durch ω ersetzt)

Satz 94 (Parsevalsche Gleichung). Für S -Funktionen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit Fouriertransformierten $F(\omega)$ und $G(\omega)$ gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\bar{g}(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\bar{G}(\omega) d\omega$$

und speziell mit $f = g$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega.$$

5.7 Die Γ -Funktion

Für $x > 0$ definieren wir

$$\Gamma(x) := \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

Weil die Exponentialfunktion schnell fällt, existiert das uneigentliche Integral von 1 bis ∞ . Weil $\int_0^1 t^\alpha dt$ für $\alpha > -1$ existiert, existiert auch $\int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt$. Also ist $\Gamma(x)$ wirklich für alle $x > 0$ definiert.

Zum Beispiel ist $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1$.

Durch partielle Integration erhält man

$$\int_a^b e^{-t} t^x dt = -e^{-t} t^x \Big|_a^b + x \int_a^b e^{-t} t^{x-1} dt.$$

Für $a \searrow 0$ und $b \rightarrow \infty$ verschwindet der erste Term rechts und es folgt

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

Das ist ein verblüffendes Ergebnis:

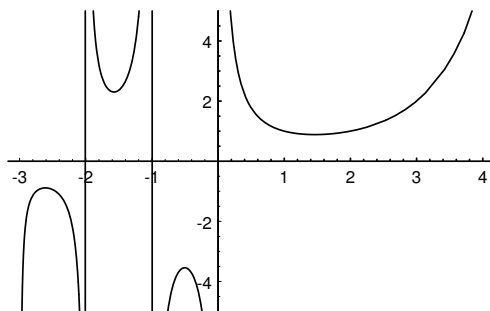
$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \dots = n!\Gamma(1) = n!.$$

Die Gammafunktion extrapoliert also die für natürliche Zahlen definierte Fakultät $n!$. Für negative, nicht-ganze Zahlen setzt man Γ so fort, dass die Funktionalgleichung

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

erhalten bleibt, also etwa $\Gamma(-\frac{1}{4}) = (-\frac{1}{4})^{-1}\Gamma(-\frac{1}{4}+1)$.

Mit `Plot[Gamma[x], {x, -3, 4}, PlotRange -> {-6, 6}]` liefert Mathematica:



5.8 Orthogonalität der Besselfunktionen

Ist y eine Lösung der Besselgleichung zum Index λ , ist $\mu \in \mathbb{R}$ und setzt man $z(x) := y(\mu x)$, so folgt aus der Besselgleichung

$$x^2 z''(x) + x z'(x) + (\mu^2 x^2 - \lambda^2) z(x) = 0$$

oder, für $x > 0$

$$x z'' + z' + \left(\mu^2 x - \frac{\lambda^2}{x}\right) z = 0.$$

Das kann man auch so schreiben:

$$(x z')' + \left(\mu^2 x - \frac{\lambda^2}{x}\right) z = 0.$$

Das ist die sogenannte *selbst-adjungierte Form* der Besselgleichung, über die Sie in der *Analysis III für Ingenieure* Genaueres erfahren können.

Bildet man

$$z_1 := y(\mu x), \quad z_2(x) := y(\nu x)$$

mit positiven Zahlen $\mu \neq \nu$, so hat man also

$$\begin{aligned} (x z_1')' + \left(\mu^2 x - \frac{\lambda^2}{x}\right) z_1 &= 0, \\ (x z_2')' + \left(\nu^2 x - \frac{\lambda^2}{x}\right) z_2 &= 0. \end{aligned}$$

Multipliziert man die erste Gleichung mit z_2 , die zweite mit z_1 und subtrahiert, so findet man

$$z_2 (x z_1')' - z_1 (x z_2')' + (\mu^2 - \nu^2) z_1 z_2 x = 0$$

oder

$$z_1 z_2 x = \frac{z_1 (x z_2')' - z_2 (x z_1')'}{\mu^2 - \nu^2}$$

Durch Integration ergibt sich mit der Produktregel

$$\int_0^1 z_1(x) z_2(x) x dx = \frac{z_1(x) z_2'(x) x - z_2(x) z_1'(x) x}{\mu^2 - \nu^2} \Big|_0^1 = \frac{\nu y(\mu) y'(\nu) - \mu y'(\mu) y(\nu)}{\mu^2 - \nu^2}.$$

Das bei der Rechnung auftretende Integral $\int z_1'(x) z_2'(x) x dx$ hebt sich heraus. Sind nun μ und ν zwei verschiedene Nullstellen von y , so folgt

$$\boxed{\int_0^1 y(\mu x) y(\nu x) x dx = 0.}$$

Insbesondere ergibt sich für $m \neq n$

$$\boxed{\int_0^1 J_k(j_{k,m} x) J_k(j_{k,n} x) x dx = 0.}$$

Ist nur ν eine Nullstelle, so folgt

$$\int_0^1 y(\mu x) y(\nu x) x dx = \frac{\nu y(\mu) y'(\nu)}{\mu^2 - \nu^2} = \nu \frac{y(\mu) - \overbrace{y(\nu)}^{=0}}{\mu - \nu} \frac{y'(\nu)}{(\mu + \nu)}.$$

Für $\mu \rightarrow \nu$ geht der mittlere Term gegen $y'(\nu)$ und man erhält

$$\boxed{\int_0^1 y(\mu x)^2 x dx = \frac{(y'(\nu))^2}{2}.}$$

Für die Besselfunktionen folgt aus (121) und (122), dass

$$\frac{J'_k(j_{k;n})^2}{2} = \frac{J_{k+1}(j_{k;n})^2}{2} = \frac{J_{k-1}(j_{k;n})^2}{2},$$

also

$$\boxed{\int_0^1 J_k(j_{k;n}x)^2 x dx = \frac{J_{k\pm 1}(j_{k;n})^2}{2}.}$$

5.9 Komplexe Zylinder- und verwandte Funktionen

Die Reihendarstellung für J_λ ist für ganzzahliges $\lambda > 0$ eine Potenzreihe. Diese konvergiert dann auch für komplexes Argument z anstelle von x . Daher kann man die (ganzzahligen) Besselfunktionen und Neumannfunktionen auch mit komplexem Argument betrachten, so wie man etwa auch den Sinus mit komplexem Argument betrachten kann:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Und so wie diese Sinusfunktion sich etwa für betragsmäßig großes $z = iy$ völlig anders verhält als für großes $x \in \mathbb{R}$, weil ja

$$\sin(iy) = \frac{e^{-y} - e^y}{2i} = i \sinh y$$

zum Beispiel alles andere als periodisch ist, so verhalten sich auch die Besselfunktionen $J_\lambda(z)$ mit komplexem Argument anders als mit reellem Argument.

Die Funktionen

$$I_k(x) := i^{-k} J_k(ix)$$

heißen (in Anlehnung an die trigonometrischen Hyperbelfunktionen) auch *hyperbolische* oder *modifizierte Besselfunktionen 1. Art*. Neben ihnen spielen auch die *Bassetfunktionen* oder *modifizierten Besselfunktionen 2. Art*

$$K_k(x) = \frac{\pi i^{k+1}}{2} (J_k(ix) + iN_k(ix))$$

in den Anwendungen eine Rolle.

Neben dem Fundamentalsystem J_λ, N_λ kommt auch das System der *Hankelfunktionen*

$$\begin{aligned} H_\lambda^{(1)}(x) &= J_\lambda(x) + iN_\lambda(x), \\ H_\lambda^{(2)}(x) &= J_\lambda(x) - iN_\lambda(x) \end{aligned}$$

vor.

5.10 Die Nullstellen der Legendrepolynome

Wir nehmen an, dass $P_k(x)$ im Intervall $] - 1, +1[$ mindestens k Nullstellen $x_1 < \dots < x_k$ hat. Für $P_0 = 1$ ist das jedenfalls richtig. Weil P_k vom Grad k ist, sind das alle Nullstellen, und diese sind einfach: $P'_k(x_j) \neq 0$. Dann hat P'_k in benachbarten Nullstellen x_j und x_{j+1} verschiedenes Vorzeichen. Nach der Rekursionsformel

$$P_{k+1}(x) = \underbrace{\frac{x^2 - 1}{k + 1}}_{<0} P'_k(x) + xP_k(x)$$

hat dann auch P_{k+1} in benachbarten Nullstellen x_j und x_{j+1} verschiedenes Vorzeichen, nämlich gerade das Negative von P'_k .

Aus $P_k(1) = 1$ folgt $P'_k(x_k) > 0$, also ist $P_{k+1}(x_k) < 0$. Weil aber $P_{k+1}(1) = 1 > 0$ ist, hat P_{k+1} eine weitere Nullstelle in $]x_k, 1[$. Weil aber $P_k(-x) = (-1)^k P_k(x)$ ist $x_1 = -x_k$ und P_{k+1} hat eine weitere Nullstelle in $] - 1, x_1[$. Damit hat P_{k+1} mindestens (also genau) $k + 1$ Nullstellen in $] - 1, +1[$, und die Nullstellen von P_k und P_{k+1} trennen sich.

5.11 Orthogonalität der Legendrefunktionen

Wir schreiben die Legendregleichung in der Form

$$((x^2 - 1)y')' = k(k + 1)y.$$

Hat man zwei Lösungen y_1 bzw. y_2 zu den Parametern k bzw. $l \neq k$, so folgt wie bei den Besselfunktionen

$$\begin{aligned} k(k + 1) \int_{-1}^{+1} y_1(x)y_2(x)dx &= \int_{-1}^{+1} ((x^2 - 1)y_1'(x))'y_2(x)dx \\ &= (x^2 - 1)y_1'(x)y_2(x)|_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} (x^2 - 1)y_1'(x)y_2'(x)dx \\ &= - \int_{-1}^{+1} (x^2 - 1)y_1'(x)y_2'(x)dx \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist symmetrisch in y_1 und y_2 , also folgt

$$k(k + 1) \int_{-1}^{+1} y_1(x)y_2(x)dx = l(l + 1) \int_{-1}^{+1} y_1(x)y_2(x)dx.$$

Wegen $k \neq l$ sind die Integrale = 0. Insbesondere erhalten wir $\int_{-1}^{+1} P_k(x)P_l(x)dx = 0$ für $k \neq l$.

Wir berechnen noch $\int_{-1}^{+1} P_k^2(x)dx$. Aus der Rekursion (132) folgt

$$\begin{aligned} kP_k(x) &= (2k - 1)xP_{k-1} - (k - 1)P_{k-2}(x) \\ (k + 1)P_{k+1} &= (2k + 1)xP_k - kP_{k-1} \end{aligned}$$

Wir multiplizieren die erste Gleichung mit $\frac{1}{2k-1}P_k(x)$, die zweite mit $\frac{1}{2k+1}P_{k-1}(x)$ und subtrahieren:

$$\frac{k}{2k-1} \int_{-1}^{+1} P_k^2(x)dx = \frac{k}{2k+1} \int_{-1}^{+1} P_{k-1}^2(x)dx.$$

Daraus folgt

$$\int_{-1}^{+1} P_k^2(x)dx = \frac{2k-1}{2k+1} \int_{-1}^{+1} P_{k-1}^2(x)dx = \frac{(2k-1)(2k-3)\dots 1}{(2k+1)(2k-1)\dots 3} \int_{-1}^{+1} P_0^2(x)dx = \frac{2}{2k+1}.$$

Damit erhalten wir die Orthogonalitätsrelationen

$$\boxed{\int_{-1}^{+1} P_k(x)P_l(x)dx = \begin{cases} \frac{2}{2k+1} & \text{für } k = l, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}}$$

Durch Substitution $x = \cos \theta$ erhält man eine Version, die zur Verwendung mit Kugelkoordinaten besser ist:

$$\boxed{\int_0^\pi P_k(\cos \theta)P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \begin{cases} \frac{2}{2k+1} & \text{für } k = l, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}}$$

5.12 Zugeordnete Legendrefunktionen

Durch m -maliges Differenzieren der Legendregleichung

$$0 = (1 - x^2)y'' - 2xy' + k(k+1)y \quad (144)$$

erhalten wir

$$(1 - x^2)y^{(m+2)} - 2(m+1)xy^{(m+1)} - [m(m+1) - k(k+1)]y^{(m)} = 0. \quad (145)$$

Das ist eine Differentialgleichung 2. Ordnung für die m -te Ableitung einer jeden Lösung $y(x)$ der Legendregleichung.

Machen wir andererseits für die zugeordnete Legendregleichung

$$((1 - x^2)y')' - \left(\frac{m^2}{1 - x^2} - k(k+1) \right) y = 0 \quad (146)$$

den Ansatz $y(x) = (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} u(x)$, so folgt aus

$$\begin{aligned} y' &= (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} u' - (1 - x^2)^{\frac{m}{2}-1} mxu \\ &= (1 - x^2)^{\frac{m}{2}-1} ((1 - x^2)u' - mxu) \\ (1 - x^2)y' &= (1 - x^2)^{m/2} ((1 - x^2)u' - mxu) \\ ((1 - x^2)y')' &= -mx(1 - x^2)^{\frac{m}{2}-1} ((1 - x^2)u' - mxu) + (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} (-2xu' + (1 - x^2)u'' - mu - mxu') \\ &= (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \left((1 - x^2)u'' - 2(m+1)xu' + \frac{m^2 x^2}{1 - x^2} u - mu \right) \end{aligned}$$

Damit

$$\begin{aligned} ((1 - x^2)y')' - \left(\frac{m^2}{1 - x^2} - k(k+1) \right) y &= (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \left((1 - x^2)u'' - 2(m+1)xu' + \frac{m^2 x^2 - m^2}{1 - x^2} u - mu + k(k+1)u \right) \\ &= (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} ((1 - x^2)u'' - 2(m+1)xu' - (m(m+1) - k(k+1))u) \end{aligned}$$

Der Ansatz ist also genau dann erfolgreich, wenn u die Differentialgleichung (145) erfüllt. Ist also y eine Lösung der Legendregleichung (144), so erfüllt

$$\left(\sqrt{1 - x^2} \right)^m y^{(m)}$$

die zugeordnete Legendregleichung (146).

5.13 Eine Schranke für die Legendrepolynome

Wir wollen zeigen, dass

$$|P_k(\cos \theta)| < 1 \quad \text{für alle } \theta.$$

Die Rekursionsformel (130) liefert

$$P_{k+1}(\cos \theta) = \frac{-\sin^2 \theta}{k+1} P_k'(\cos \theta) + \cos \theta P_k(\cos \theta) = \frac{\sin \theta}{k+1} \frac{dP_k(\cos \theta)}{d\theta} + \cos \theta P_k(\cos \theta).$$

Die Funktion $P_k(\cos \theta)$ ist gerade, und hat deshalb eine Fourierreentwicklung

$$P_k(\cos \theta) = \sum_{l=0}^k a_{kl} \cos(l\theta).$$

Die Summe geht dabei nur bis k , weil $P_k(\cos \theta)$ ein Polynom in $\cos \theta$ vom Grad k ist.⁹

Wir setzen das in die obige Rekursion ein:

$$\begin{aligned} P_{k+1}(\cos \theta) &= \sum_{l=0}^k \frac{la_{kl}}{k+1} (-\sin(l\theta) \sin \theta) + \sum_{l=0}^k a_{kl} \cos(l\theta) \cos \theta \\ &= \sum_{l=0}^k \frac{la_{kl}}{k+1} (\cos(l+1)\theta - \cos(l\theta) \cos \theta) + \sum_{l=0}^k a_{kl} \cos(l\theta) \cos \theta \\ &= \sum_{l=0}^k \frac{la_{kl}}{k+1} \cos(l+1)\theta + \sum_{l=0}^k a_{kl} \left(1 - \frac{l}{k+1}\right) \cos(l\theta) \cos \theta \\ &= \sum_{l=0}^k \frac{la_{kl}}{k+1} \cos(l+1)\theta + \sum_{l=0}^k a_{kl} \left(1 - \frac{l}{k+1}\right) \frac{1}{2} (\cos(l+1)\theta + \cos(l-1)\theta). \end{aligned}$$

Falls also die a_{kl} alle nicht-negativ sind, sind auch die a_{k+1l} alle nicht-negativ. Weil das aber für $P_0(\cos \theta) = 1$ der Fall ist, folgt $a_{kl} \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $l \leq k$. Dann ist aber

$$|P_k(\cos \theta)| \leq \sum_{l=0}^k |a_{kl} \cos(l\theta)| \leq \sum_{l=0}^k a_{kl} = P_k(1) = 1.$$

⁹Das sieht man am einfachsten, wenn man $\cos^m x$ durch Potenzen von e^{ix} ausdrückt.