

Riemannsche Geometrie

Dirk Ferus

Sommersemester 2004

Version vom 29.07.2008

Inhaltsverzeichnis

0	Literatur	4
1	Riemannsche Metrik	1
2	Die Levi-Civita-Ableitung	7
3	Innere Metrik	14
4	Geodätische	16
5	Geodätische und Kürzeste	21
6	Geodätische Konvexität	26
7	Der Satz von Hopf-Rinow	28
8	Parallelverschiebung	34
9	Der Krümmungstensor	36
10	Beispiele für Krümmungstensor und Schnittkrümmung.	42
11	Krümmung und Jacobifelder	44
12	Räume konstanter Krümmung	46
13	Die zweite Variation und der Satz von Jacobi	50
14	Der Satz von Bonnet-Myers	54
15	Der Satz von Synge	57
16	Der Satz von Hadamard-Cartan	60
17	Riemannsche Submersionen	61
18	Der komplexe projektive Raum	66
19	Vergleich von Jacobifeldern	70
20	Längenvergleich	76
21	Winkelvergleich, Dreiecke, Maximaler Durchmesser	79
22	Der Indexsatz von Morse	84

23 Der Schnittort	90
24 Der Injektivitätsradius I	95
25 Der Sphärensatz	97
26 Der Injektivitätsradius II	101
25 Anhang	108
25.1 Warum heißt der Torsionstensor Torsionstensor?	108
25.2 Elementares über Liegruppen	109

0 Literatur

W. Kühnel: Differentialgeometrie, Vieweg 1999

M do Carmo: Riemannian Geometry, Birkhäuser 1992

J. M. Lee: Riemannian Manifolds – An Introduction to Curvature, Springer 1997

S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine: Riemannian Geometry, Springer 1990

D. Gromoll, W. Klingenberg, W. Meyer: Riemannsche Geometrie im Großen, LNM 55 Springer 1968

B. O’Neill: Semi-Riemannian Geometry, Academic Press 1983

M. Berger: Riemannian Geometry during the second half of the twentieth century, Jahresberichte der DMV 1998

M. Berger: A Panoramic View of Riemannian Geometry, Springer 2003

Mit [VL Mannigfaltigkeiten] zitiere ich die Vorlesung *Mannigfaltigkeiten* aus dem Wintersemester 2003/4

Anmerkung Juli 2008. Ich danke Herrn Schulz-Baldes für umfangreiche Korrekturen von Schreibfehlern.

1 Riemannsche Metrik

Wenn nichts anderes gesagt wird, seien Mannigfaltigkeiten, Abbildungen und Tensorfelder immer von der Klasse C^∞ vorausgesetzt. Mannigfaltigkeiten seien überdies hausdorffsch mit abzählbarer Basis der Topologie. Das ist von selbst erfüllt, wenn Mannigfaltigkeiten per definitionem reguläre Untermannigfaltigkeiten eines \mathbb{R}^N sind. Vergleichen Sie aber das Beispiel 28.

Definition 1. Eine *Riemannsche Mannigfaltigkeit* (M, g) ist eine Mannigfaltigkeit M zusammen mit einem Tensorfeld g , das jedem Punkt $p \in M$ eine Euklidische Metrik g_p von $T_p M$ zuordnet. Das Tensorfeld g heißt eine *Riemannsche Metrik* auf M .

Ist g_p nicht positiv-definit, sondern für jedes p eine nicht-degenerierte symmetrische Bilinearform, so heißt (M, g) eine *Pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit*. Hat g_p in jedem p die Signatur $(-, +, \dots, +)$, so heißt (M, g) auch eine *Lorentzmannigfaltigkeit*.

Beispiel 2. Der Euklidische Raum \mathbb{R}^m ist auf natürliche Weise eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Wir schreiben $\langle \cdot, \cdot \rangle$ gleichermaßen für die Euklidische Metrik und die von ihr induzierte Riemannsche Metrik auf \mathbb{R}^m . □

Beispiel 3. Eine Immersion $M \rightarrow \mathbb{R}^n$ induziert eine 1. Fundamentalform

$$g := f^* \langle \cdot, \cdot \rangle$$

mit

$$g_p(v, w) := \langle d_p f(v), d_p f(w) \rangle, \quad v, w \in T_p M.$$

Damit wird M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Allgemeiner ist jede Untermannigfaltigkeit einer Riemannschen Mannigfaltigkeit auf natürliche Weise eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. □

Beispiel 4. Insbesondere ist die Sphäre

$$S^m := \{x \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \langle x, x \rangle = 1\}$$

mit der vom Euklidischen Raum $(\mathbb{R}^{m+1}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ induzierten Metrik eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Ihre Metrik bezeichnen wir als die *kanonische Metrik* auf S^m . □

Beispiel 5 (Lorentzmodell des hyperbolischen Raums). Den \mathbb{R}^{m+1} mit dem Lorentz-schen Skalarprodukt

$$\langle x, y \rangle = -x_0 y_0 + x_1 y_1 + \dots + x_m y_m$$

bezeichnen wir auch mit $\mathbb{R}^{1,m}$. Betrachten wir darin eine Untermannigfaltigkeit, so ist das auf den Tangentialräumen induzierte Skalarprodukt im allgemeinen degeneriert. Aber für spezielle Untermannigfaltigkeiten kann es natürlich auch nicht-degeneriert vom Typ $(-, +, \dots, +)$ oder sogar positiv-definit sein. Entsprechend erhält man eine Lorentzmannigfaltigkeit oder eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Konkrete Beispiele liefern die Mengen $\{x \mid \langle x, x \rangle = +1\}$ bzw. der *hyperbolische Raum*

$$H^m := \{x \mid \langle x, x \rangle = -1, x_0 > 0\},$$

den Sie aus [VL Mannigfaltigkeiten] kennen. Der Tangentialraum in $x \in H^m$ ist

$$T_x H^m = \{v \mid \langle x, v \rangle = 0\},$$

und nach Linearer Algebra ist das Skalarprodukt darauf positiv-definit. □

Beispiel 6 (Konforme Änderung der Metrik). Ist g eine Riemannsche Metrik auf M und $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, so ist auch $e^{2\lambda}g$ eine Riemannsche Metrik auf M . □

Beispiel 7 (Poincarémodell des hyperbolischen Raums). Auf der offenen Einheitskugel D^m im \mathbb{R}^m erhält man durch spezielle konforme Änderung der Euklidischen Metrik eine neue Riemannsche Metrik

$$g_p(v, w) := \frac{4}{(1 - \|p\|^2)^2} \langle v, w \rangle.$$

(D^m, g) ist ein anderes Modell für den m -dimensionalen hyperbolischen Raum H^m . □

Beispiel 8. Auf jeder Mannigfaltigkeit (Hausdorff mit abzählbarer Basis der Topologie!) gibt es eine Riemannsche Metrik. (Zerlegung der Eins). □

Der Begriff der Riemannschen Metrik und Mannigfaltigkeit schafft sofort eine Vielzahl neuer Begriffe und Strukturen.

Definition 9 (Isometrische Immersion, Isometrie). Seien (M, g) und (N, h) zwei Riemannsche Mannigfaltigkeiten.

- (i) Eine Abbildung $f : N \subset G \rightarrow M$ einer offenen Teilmenge $G \subset N$ heißt eine *isometrische Immersion*, wenn auf G

$$f^*g = h,$$

d.h. wenn für alle $p \in G$ und $v, w \in T_p N$

$$g_{f(p)}(d_p f(v), d_p f(w)) = h_p(v, w).$$

Beachten Sie, daß f dann wirklich eine Immersion ist.

- (ii) Ein Diffeomorphismus $f : N \rightarrow M$ heißt eine *Isometrie*, wenn

$$f^*g = h$$

gilt.

- (iii) Ist (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, so ist

$$\text{Iso}(M, g) := \{f : M \rightarrow M \mid f \text{ Isometrie}\}$$

bezüglich der Komposition eine Gruppe, die sogenannte *Isometriegruppe* von (M, g) .

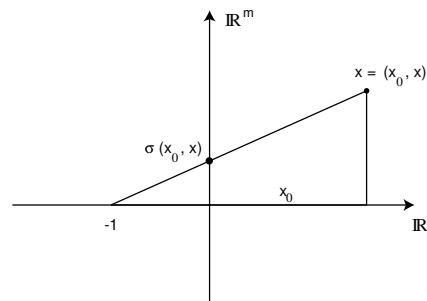
Beispiel 10. Jede Immersion $f : N \rightarrow M$ in eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) ist eine isometrische Immersion, wenn man N mit der Metrik f^*g versieht. □

Beispiel 11. Die stereographische Projektion

$$\sigma : \mathbb{R}^{m+1} \supset \{(x_0, \dots, x_m) \mid x_0 > -1\} \rightarrow \mathbb{R}^m$$

vom Punkt $(-1, 0, \dots, 0)$ aus ist gegeben durch

$$\sigma(x_0, \dots, x_m) = \frac{1}{1 + x_0} (x_1, \dots, x_m).$$



Sie liefert

- im $\mathbb{R}^{1,m}$ eine Isometrie des Lorentzmodells des hyperbolischen Raumes aus Beispiel 5 auf das Poincarémodell aus Beispiel 7 mit der Metrik

$$g_p(v, w) := \frac{4}{(1 - \|p\|^2)^2} \langle v, w \rangle.$$

und ebenso

- im \mathbb{R}^{m+1} eine Isometrie der Einheitssphäre

$$S^m := \{(x_0, \dots, x_m) \mid x_0^2 + \dots + x_m^2 = 1\}$$

ohne den Südpol mit der kanonischen Metrik auf den \mathbb{R}^m mit der konform geänderten Metrik

$$g_p(v, w) := \frac{4}{(1 + \|p\|^2)^2} \langle v, w \rangle.$$

Beweis. Gegeben seien

$$(x_0, x), (v_0, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$$

mit $x_0 \neq -1$ und

$$\begin{aligned} x_0^2 \pm \|x\|^2 &= 1, & \text{d.h. } (x_0, x) &\in S^m \text{ oder } \in H^m, \\ x_0 v_0 \pm \langle x, v \rangle &= 0, & \text{d.h. } (v_0, v) &\text{ im Tangentialraum an } S^m \text{ oder } H^m \text{ in } (x_0, x). \end{aligned}$$

Dann ist

$$d_{(x_0, x)} \sigma(v_0, v) = -\frac{v_0}{(1 + x_0)^2} x + \frac{1}{1 + x_0} v.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} & \frac{4}{(1 \pm \|\sigma(x_0, x)\|^2)^2} \|d_{(x_0, x)} \sigma(v_0, v)\|^2 \\ &= \frac{4}{(1 \pm \frac{\|x\|^2}{(1+x_0)^2})^2} \|d_{(x_0, x)} \sigma(v_0, v)\|^2 \\ &= \frac{4(1+x_0)^4}{((1+x_0)^2 \pm \|x\|^2)^2} \|d_{(x_0, x)} \sigma(v_0, v)\|^2 \\ &= \frac{4(1+x_0)^4}{(1+2x_0+x_0^2 \pm \|x\|^2)^2} \|d_{(x_0, x)} \sigma(v_0, v)\|^2 \\ &= (1+x_0)^2 \|d_{(x_0, x)} \sigma(v_0, v)\|^2 \\ &= (1+x_0)^2 \left(\frac{v_0^2}{(1+x_0)^4} \|x\|^2 + \frac{1}{(1+x_0)^2} \|v\|^2 - 2 \frac{v_0}{(1+x_0)^3} \langle x, v \rangle \right) \\ &= \pm \frac{v_0^2}{(1+x_0)^2} (1-x_0^2) + \|v\|^2 \pm 2 \frac{v_0}{1+x_0} x_0 v_0 \\ &= \pm \frac{v_0^2(1-x_0) + 2v_0^2 x_0}{1+x_0} (1-x_0) + \|v\|^2 \\ &= \pm v_0^2 + \|v\|^2 = \langle (v_0, v), (v_0, v) \rangle. \end{aligned}$$

□

Beispiel 12 (Schnitt durch Schwarzschild-Modell eines schwarzen Lochs). Sei $M := \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ und sei $r : M \rightarrow \mathbb{R}$ die Normfunktion. Wir betrachten M mit der Metrik

$$g = \left(1 + \frac{1}{r}\right)^4 \langle \dots, \dots \rangle.$$

Dann ist die Inversion an der Einheitssphäre, also

$$f : M \rightarrow M, \quad x \mapsto \frac{x}{r(x)^2},$$

eine Isometrie.

Beweis. Zunächst ist

$$d_x f(v) = \frac{1}{r(x)^2} v + \frac{-2\langle x, v \rangle}{r(x)^4} x$$

und

$$\langle d_x f(v), d_x f(v) \rangle = \frac{1}{r(x)^4} \langle v, v \rangle + \frac{-4\langle x, v \rangle^2}{r(x)^6} + \frac{4\langle x, v \rangle^2}{r(x)^6} = \frac{\langle v, v \rangle}{r(x)^4}.$$

Es folgt

$$(f^*g)_x(v, v) = \left(1 + \frac{1}{r \circ f(x)}\right)^4 \frac{\langle v, v \rangle}{r(x)^4} = \left(\frac{1}{r(x)} + 1\right)^4 \langle v, v \rangle.$$

□

Beispiel 13. Für die Sphäre S^m mit der kanonischen Metrik ist offenbar

$$\{f|_{S^m} \mid f \in \mathbf{O}(m+1)\} \subset \text{Iso}(S^m).$$

Für den hyperbolischen Raum aus Beispiel 5 ist

$$\{f|_{H^m} \mid f \in \mathbf{O}(1, m)\} \subset \text{Iso}(H^m).$$

Dabei ist $\mathbf{O}(1, m)$ die Gruppe der linearen Automorphismen von $\mathbb{R}^{1, m}$, die das Lorentzprodukt erhalten.¹ Die Gruppe $\mathbf{O}(1, m)$ enthält insbesondere Abbildungen der Form

$$(x_0, x) \mapsto (x_0, Ax)$$

mit $A \in \mathbf{O}(m)$ und Abbildungen mit einer Matrix

$$\left(\begin{array}{cc|c} \cosh t & \sinh t & 0 \\ \sinh t & \cosh t & 0 \\ \hline 0 & 0 & E_{m-1} \end{array} \right).$$

Mit einer Isometrie der ersten Art kann man einen beliebigen Punkt von H^m „drehen“ in einen Punkt der Form $(x_0, x_1, 0, \dots, 0) \in H^m$. Mit einer hyperbolischen Drehung der zweiten Art kann man diesen dann in den Punkt $(1, 0, \dots, 0)$ abbilden. Daher operiert $\text{Iso}(H^m)$ transitiv auf H^m : Man kann jeden Punkt durch eine Isometrie in jeden anderen transportieren.

Für spätere Verwendung halten wir noch fest: Durch Isometrien der ersten Art kann man unter Festhalten von $(1, 0, \dots, 0)$ jeden weiteren Punkt von H^m in einen der Form $(y_0, y_1, 0, \dots, 0)$ mit $-y_0^2 + y_1^2 = -1$ bringen. Dieser Punkt ist dann von der Form $(\cosh t_0, \sinh t_0, 0, \dots, 0)$ für ein $t_0 \in \mathbb{R}$. Wenn man also Punktepaare $p, q \in H^m$ untersuchen will, kann man bis auf eine Isometrie annehmen, daß $p = (1, 0, \dots, 0)$ und $q = (\cosh t_0, \sinh t_0, 0, \dots, 0)$ ist.

Analoges gilt für S^m .

□

¹Wir werden später sehen, daß in beiden Fällen sogar Gleichheit gilt.

Mit einer Riemannschen Metrik kann man Längen und Winkel von Tangentialvektoren messen. Damit kann man auch den Winkel zwischen sich schneidenden Kurven und durch Integration die Länge von Kurven messen:

Definition 14 (Kurvenlänge). Für eine Kurve $c : [a, b] \rightarrow M$ in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) definieren wir ihre *Länge* durch

$$L(c) := \int_a^b \sqrt{g_{c(t)}(\dot{c}(t), \dot{c}(t))} dt.$$

Es ist klar, daß in der Definition C^1 statt C^∞ ausreichend ist und wie man den Längenbegriff ausdehnt auf (stetige) *stückweise- C^1* -Kurven

Es ist auch klar, daß isometrische Immersionen Längen und Winkel erhalten.

Lemma 15 (Parameterinvarianz der Kurvenlänge). *Die Kurvenlänge ist invariant gegenüber Umparametrisierungen: Ist $c : [a, b] \rightarrow M$ eine Kurve in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit und $\phi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ eine bijektive C^∞ -Abbildung, so gilt*

$$L(c \circ \phi) = L(c).$$

Beispiel 16. Im Lorentzmodell des hyperbolischen Raums betrachten wir die Kurve

$$c(t) := (\cosh t, \sinh t, 0, \dots, 0), \quad 0 \leq t \leq t_0$$

von $p = (1, 0, \dots, 0)$ nach $q = (\cosh t_0, \sinh t_0, 0, \dots, 0)$. Ihre Länge ist

$$L(c) = \int_0^{t_0} \underbrace{\sqrt{-\sinh^2 t + \cosh^2 t}}_{=1} dt = t_0 = \cosh^{-1} q_0 = \cosh^{-1}(-\langle p, q \rangle). \quad (1)$$

Nach der Bemerkung am Schluß von Beispiel 13 findet man daher zwischen je zwei beliebigen Punkten p und q in H^m eine Verbindungskurve der Länge $\cosh^{-1}(-\langle p, q \rangle)$.

Ebenso findet man zwischen zwei Punkten in S^m immer eine Verbindungskurve der Länge

$$L(c) = \cos^{-1} \langle p, q \rangle.$$

□

Beispiel 17. Im hyperbolischen Raum betrachten wir zwei Punkte p und q . Wir wollen die Länge von p mit q verbindenden Kurven abschätzen und zeigen, daß sie alle mindestens die Länge $\cosh^{-1}(-\langle p, q \rangle)$ haben.

Wieder können wir ohne Einschränkung annehmen, daß im Lorentzmodell

$$p = (1, 0) \text{ und } q = (q_0, q_1, 0, \dots, 0).$$

Wir betrachten die Abbildung $\pi : \{(x_0, x) \in \mathbb{R}^{m+1} \mid x_0 \geq 1\} \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ mit

$$\pi(x_0, x) = \left(x_0, \sqrt{x_0^2 - 1}, 0, \dots, 0 \right).$$

Dann ist $\pi(H^m) \subset H^m$. Die Abbildung $\pi|_{H^m}$ ist stetig und im Komplement von p differenzierbar.

Für $(x_0, x) \in H^m$ mit $x_0 > 1$ und $(v_0, v) \in T_{(x_0, x)}H^m$, d.h.

$$\langle x, v \rangle = -x_0 v_0 + \langle x, v \rangle_{\text{euklidisch}} = 0 \quad (2)$$

erhalten wir

$$d_{(x_0, x)}\pi(v_0, v) = \left(v_0, \frac{x_0 v_0}{\sqrt{x_0^2 - 1}}, 0, \dots, 0\right).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \|d_{(x_0, x)}\pi(v_0, v)\|_{\text{lorentz}}^2 &= -v_0^2 + \frac{x_0^2 v_0^2}{x_0^2 - 1} = -v_0^2 + \frac{x_0^2 v_0^2}{\|x\|_{\text{euklidisch}}^2} \\ &= -v_0^2 + \frac{\langle x, v \rangle_{\text{euklidisch}}^2}{\|x\|_{\text{euklidisch}}^2} \leq -v_0^2 + \|v\|_{\text{euklidisch}}^2 = \|(v_0, v)\|_{\text{lorentz}}^2. \end{aligned}$$

Die Abbildung π kontrahiert also die Längen von Tangentialvektoren und damit die Länge von Kurven. Ist also $c : [0, t_0] \rightarrow H^m$ eine Kurve² von p nach q , so ist wegen der Voraussetzungen an p und q auch $\pi \circ c$ eine Kurve von p nach q und

$$L(c) \geq L(\pi \circ c).$$

Es gilt

$$\begin{aligned} L(\pi \circ c) &= \int_0^{t_0} \sqrt{-\dot{c}_0^2(t) + \left(\frac{c_0 \dot{c}_0}{\sqrt{c_0^2 - 1}}\right)^2} dt = \int_0^{t_0} \frac{|\dot{c}_0(t)|}{\sqrt{c_0^2(t) - 1}} \\ &\geq \int_0^{t_0} \frac{\dot{c}_0(t)}{\sqrt{c_0^2(t) - 1}} = \int_1^{q_0} \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}} = \cosh^{-1} q_0 = L(\tilde{c}). \end{aligned}$$

Dabei ist $\tilde{c}(t)$ der kanonische Weg von p nach q , vgl. Beispiel 16. Das ist also eine kürzeste Kurve von p nach q .

Analoges findet man für die Sphäre.

In Verbindung mit dem Beispiel 13 erhalten wir: Eine kürzeste Verbindungskurve zwischen zwei Punkten p, q im Lorentzmodell des H^m oder in S^m wird gegeben durch einen monoton parametrisierten „Großkreisbogen“ (im Falle der Sphäre von der Länge $\leq \pi$). Ein „Großkreis“ ist dabei die Schnittkurve von H^m bzw. S^m mit einer Ebene durch $0 \in \mathbb{R}^{m+1}$. Die Länge dieser Kürzesten ist

$$\cosh^{-1}(-\langle p, q \rangle) \quad \text{bzw.} \quad \cos^{-1}\langle p, q \rangle.$$

□

²Hier gibt es ein kleines Problem, weil π in p nicht differenzierbar ist. Man kann aber annehmen, daß $c(t) \neq p$ für alle $t > 0$. Mit dem Satz von Bohnenblust (vgl. Analysis I) oder Taylorentwicklung sieht man dann, daß $\pi \circ c$ in 0 wenigstens noch C^1 ist.

2 Die Levi-Civita-Ableitung

Längen- und Winkelmessung geben die Grundlagen für die Geometrie. Ein weiteres wichtiges Element in der Euklidischen Geometrie ist die *Parallelverschiebung*. In Riemannschen Mannigfaltigkeiten hat man – in eingeschränkter Weise – auch diese Struktur. Sie wird gegeben durch die Levi-Civita-Ableitung, die die Parallelverschiebung zwar nicht global, wohl aber längs Kurven gestattet.

Eine *kovariante Ableitung* auf M ist eine Abbildung

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$$

mit den Ihnen aus [VL Mannigfaltigkeiten] geläufigen Eigenschaften (e.g. \mathbb{R} -Bilinearität, Produktregel). Im allgemeinen gibt es auf einer Mannigfaltigkeit viele kovariante Ableitungen, aber keine besonders ausgezeichnete. Im Riemannschen Fall ist das anders: Die Riemannsche Metrik erlaubt die Auswahl einer ausgezeichneten kovarianten Ableitung, der Levi-Civita-Ableitung.

Satz 18 (und Definition: Levi-Civita-Ableitung). *Auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) gibt es genau eine kovariante Ableitung ∇ mit*

$$(\nabla_Z g)(X, Y) := Z \cdot g(X, Y) - g(\nabla_Z X, Y) - g(X, \nabla_Z Y) = 0, \quad (\text{Ricci-Identität}) \quad (3)$$

$$T(X, Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0. \quad (\text{Torsionsfreiheit}) \quad (4)$$

∇ heißt die Levi-Civita-Ableitung von (M, g) . Sie ist gegeben durch

$$2g(X, \nabla_Z Y) = Z \cdot g(X, Y) + Y \cdot g(X, Z) - X \cdot g(Y, Z) + g(Z, [X, Y]) + g(Y, [X, Z]) - g(X, [Y, Z]). \quad (5)$$

Der Beweis ist kanonisch: Zur Eindeutigkeit schreibt man (3) mit zyklischer Vertauschung der Argumente und findet unter Benutzung von (4) die Gleichung (5). Für die Existenz definiert man $\nabla_Z Y$ durch (5) und rechnet die Eigenschaften einer kovarianten Ableitung, die Ricci-Identität und die Torsionsfreiheit nach.

Lokale Beschreibung mit Christoffelsymbolen. Ist $\frac{\partial}{\partial x_i}$ die Gaußbasis eines lokalen Koordinatensystems für M , so wird eine kovariante Ableitung beschrieben durch die Christoffelsymbole Γ_{ij}^k , die definiert sind durch

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^m \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Ist (M, g) eine *Riemannsche* Mannigfaltigkeit und die Metrik im lokalen Koordinatensystem gegeben durch

$$g_{ij} := g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right),$$

so sind die Christoffelsymbole gegeben durch

$$2 \sum_{l=1}^m g_{lk} \Gamma_{ij}^l = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}.$$

Das ist eine unmittelbare Konsequenz von (5).

Beispiel 19. Vergleiche die Beispiele 6 und 7. Ist ∇ die Levi-Civita-Ableitung zur Metrik g , so ist

$$\tilde{\nabla}_Z Y = \nabla_Z Y + (Z \cdot \lambda)Y + (Y \cdot \lambda)Z - g(Y, Z)\text{grad}^g \lambda$$

mit

$$g(\text{grad}^g \lambda, X) := X \cdot \lambda$$

die Levi-Civita-Ableitung zur Metrik

$$\tilde{g} := e^{2\lambda} g.$$

Insbesondere ergibt sich für das Poincarémodell von H^m die Ableitung

$$\nabla_Z Y = D_Z Y + \frac{2}{1 - \|x\|^2} (\langle Z, x \rangle Y + \langle Y, x \rangle Z - \langle Y, Z \rangle x).$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} & 2e^{2\lambda} g(X, \tilde{\nabla}_Z Y) \\ &= 2\tilde{g}(X, \tilde{\nabla}_Z Y) \\ &= Z \cdot \tilde{g}(X, Y) + Y \cdot \tilde{g}(X, Z) - X \cdot \tilde{g}(Y, Z) + \tilde{g}(Z, [X, Y]) + \tilde{g}(Y, [X, Z]) - \tilde{g}(X, [Y, Z]) \\ &= e^{2\lambda} \{2g(X, \nabla_Z Y) + 2(Z \cdot \lambda)g(X, Y) + (Y \cdot \lambda)g(X, Z) - g(X, \text{grad}^g \lambda)g(Y, Z)\} \\ &= 2e^{2\lambda} g(X, \nabla_Z Y + (Z \cdot \lambda)Y + (Y \cdot \lambda)Z - g(Y, Z)\text{grad}^g \lambda) \end{aligned}$$

Insbesondere gilt für den hyperbolischen Raum

$$\begin{aligned} e^{2\lambda} &= \frac{4}{(1 - \|x\|^2)^2} \Rightarrow \lambda = \ln 2 - \ln(1 - \|x\|^2) \\ &\Rightarrow X \cdot \lambda = \frac{2 \langle X, x \rangle}{1 - \|x\|^2} \\ &\Rightarrow \text{grad}_x^g \lambda = \frac{2}{1 - \|x\|^2} x. \end{aligned}$$

□

Beispiel 20 (Biinvariante Metriken auf Liegruppen). Seien G eine Liegruppe und ∇ eine kovariante Ableitung für TG . Sei Z_1, \dots, Z_n eine Basis im Raum $\mathfrak{g} \cong T_e G$ der linksinvarianten Vektorfelder. Dann lassen sich beliebige Vektorfelder $X, Y \in \Gamma(TG)$ schreiben als

$$X = \sum \xi_i Z_i, \quad Y = \sum \eta_j Z_j,$$

mit C^∞ -Koeffizienten ξ_i, η_j , und aus den Rechenregeln für kovariante Ableitungen folgt

$$\nabla_X Y = \sum_{i,j} \xi_i \eta_j \nabla_{Z_i} Z_j + \sum_j (X \cdot \eta_j) Z_j. \quad (6)$$

Die kovariante Ableitung ∇ ist also bestimmt durch ihre Werte auf den linksinvarianten Vektorfeldern einer Basis. Umgekehrt kann man die Vektorfelder $\nabla_{Z_i} Z_j$ beliebig vorgeben, und (6) definiert eine kovariante Ableitung. Wählt man $\nabla_{Z_i} Z_j := c[Z_i, Z_j]$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$, so erhält man für linksinvariante X, Y , also konstante ξ_i, η_j

$$\nabla_X Y = c[X, Y]. \quad (7)$$

Die Gleichung (7) definiert also eine von einer Basiswahl Z_i unabhängige kovariante Ableitung auf G .

Der zugehörige Torsionstensor wird dann auf linksinvarianten Vektorfeldern

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = c[X, Y] - c[Y, X] - [X, Y] = (2c - 1)[X, Y].$$

Für $c = 1/2$ wird der Torsionstensor auf linksinvarianten Vektorfeldern null. Also ist er – als Tensor – auf allen Vektorfeldern null. Durch

$$\nabla_X Y := \frac{1}{2}[X, Y] \quad \text{für } X, Y \in \mathfrak{g} \quad (8)$$

wird also auf jeder Liegruppe ein ausgezeichnete torsionsfreier Zusammenhang definiert.

Sei nun g eine biinvariante Metrik G , d.h. Links- und Rechtstranslationen L_x und R_x seien Isometrien. Dann ist $Ad_x : d(L_x \circ R_{x^{-1}}) : T_e G \rightarrow T_e G$ für alle $x \in G$ eine orthogonale Abbildung von $(T_e G, g_e)$. Daher ist

$$ad_X = d_e Ad(X) : T_e G \rightarrow T_e G, Y \mapsto [X, Y]$$

schiefsymmetrisch bezüglich g_e :

$$g([X, Y], Z) + g(Y, [X, Z]) = 0. \quad (9)$$

Sei ∇ definiert durch (8). Dann ist für linksinvariante Vektorfelder,

$$\begin{aligned} (\nabla_X g)(Y, Z) &:= X \cdot \underbrace{g(Y, Z)}_{=const} - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z) = -\frac{1}{2}(g([X, Y], Z) + g(Y, [X, Z])) \\ &\stackrel{(9)}{=} 0. \end{aligned}$$

Damit verschwindet der (tensorielle!) Ausdruck $(\nabla_X g)(Y, Z)$ aber auch für beliebige Vektorfelder.

Fazit: Die Levi-Civita-Ableitung einer biinvarianten Metrik auf einer Liegruppe ist für linksinvariante(!) Vektorfelder gegeben durch (8). Sie ist für alle biinvarianten Metriken dieselbe, aber „meistens“ sind solche Metriken ohnehin bis auf einen konstanten Faktor eindeutig. □

Eine wichtige Rolle werden in diesem Semester *Vektorfelder längs Abbildungen* und deren kovariante Ableitungen spielen. Deshalb gehen wir hier noch einmal darauf ein. Wir bezeichnen mit $\Gamma(V)$ den Modul der Schnitte im Vektorbündel V , also mit $\Gamma(TM)$ die (tangentialen) Vektorfelder auf der Mannigfaltigkeit M . Ist $f : N \rightarrow M$ eine Abbildung, so ist ein Vektorfeld längs f eine Abbildung $Y : N \rightarrow TM$ mit

$$Y_p \in T_{f(p)}M \quad \text{für alle } p \in N.$$

Typische Beispiele sind das Geschwindigkeitsfeld \dot{c} einer Kurve in M oder ein Einheitsnormalenfeld einer Hyperflächenimmersion.

Die Abbildung f induziert aus dem Tangentialbündel über M ein Bündel f^*TM über N , dessen Faser über $x \in N$ gerade $T_{f(x)}M$ ist. Vektorfelder längs Abbildungen sind also nichts anderes als Schnitte im induzierten Bündel. Wir bezeichnen den Modul der Vektorfelder längs f mit $\Gamma(f^*TM)$.

$$\begin{array}{ccc} & TM & \\ & \nearrow Y & \downarrow \\ TM & \xrightarrow{f} & M \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} f^*TM & \rightarrow & TM \\ Y \uparrow \downarrow & & \downarrow \\ TM & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

Satz 21 (Kovariante Ableitung längs Abbildungen).

Sei ∇ eine kovariante Ableitung auf der Mannigfaltigkeit M (nicht notwendig die Levi-Civita-Ableitung einer Riemannschen Mannigfaltigkeit). Sei $f : N \rightarrow M$ eine Abbildung. Dann gibt es genau eine Abbildung

$$f^*\nabla : \Gamma(TN) \times \Gamma(f^*TM) \rightarrow \Gamma(f^*TM)$$

mit folgenden Eigenschaften:

$$f^*\nabla \text{ ist eine kovariante Ableitung im induzierten Bündel } f^*TM \quad (10)$$

und für $X \in \Gamma(TN)$ und $Z \in \Gamma(TM)$ gilt

$$(f^*\nabla)_X(Z \circ f) = \nabla_{df(X)}Z. \quad (11)$$

Dabei sind $Z \circ f$ und $\nabla_{df(X)}Z : p \mapsto \nabla_{d_p f(X_p)}Z$ offenbar Vektorfelder längs f . Statt $f^*\nabla$ schreibt man meistens einfach wieder ∇ .

Beweis. Zur Einzigkeit. Bezüglich einer Karte von M schreiben wir für $Y \in \Gamma(f^*TM)$

$$Y = \sum Y^j \frac{\partial}{\partial x_j} \circ f. \quad (12)$$

Dann erhalten wir mit den vorausgesetzten Eigenschaften

$$\begin{aligned} (f^*\nabla)_X Y &= \sum_k (X \cdot Y^k) \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \circ f \right) + \sum_k Y^k (f^*\nabla)_X \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \circ f \right) \\ &= \sum_k (X \cdot Y^k) \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \circ f \right) + \sum_k Y^k \nabla_{df(X)} \frac{\partial}{\partial x_k}. \end{aligned} \quad (13)$$

Daraus folgt die Eindeutigkeit.

Zur Existenz benutzt man (13) zur lokalen Definition von $f^*\nabla$ und rechnet die Eigenschaften (10) und (11) nach. Aus der Eindeutigkeit folgt, daß die auf diese Weise lokal definierten Ableitungen nicht von der Kartenwahl abhängen und sich deshalb zu einer global definierten Ableitung zusammenfügen. \square

Lokale Darstellung mit Christoffelsymbolen. In einer Karte x für M sei

$$Y = \sum_j Y^j \frac{\partial}{\partial x_j} \circ f, \quad df(X) = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x_i} \circ f.$$

Weiter seien Γ_{ij}^k die Christoffelsymbole von ∇ in dieser Karte. Dann gilt

$$(f^*\nabla)_X Y = \sum_k \left(X \cdot Y^k + \sum_{i,j} X^i Y^j (\Gamma_{ij}^k \circ f) \right) \frac{\partial}{\partial x_k} \circ f. \quad (14)$$

Beispiel 22. Wir betrachten die Kurve $c(t) := tv$ im Poincarémodell von H^m mit Levi-Civita-Ableitung ∇ , vergleiche Beispiel 19. Dabei seien $v \in \mathbb{R}^m$ ein Einheitsvektor und $t \in N :=]-1, 1[$.

Dann ist $\dot{c} \in \Gamma(c^*TH^m)$ und $\frac{d}{dt} \in \Gamma(TN)$. Es gilt

$$\dot{c} = v = v \circ c,$$

wenn wir v als konstantes Vektorfeld auf D^m betrachten. Dann wird

$$(c^*\nabla)_{\frac{d}{dt}}\dot{c} = \nabla_{dc(\frac{d}{dt})}v = \nabla_{v \circ c}v = (\nabla_v v) \circ c$$

Mit Beispiel 19 und $c(t) = tv$ finden wir

$$(c^*\nabla)_{\frac{d}{dt}}\dot{c} = \underbrace{D_v v \circ c}_{=0} + \frac{2}{1 - \|tv\|^2}(2\langle v, c \rangle v - \langle v, v \rangle c) = \frac{2t}{1 - t^2} v.$$

□

Lemma 23. Die definierende Formel (11) gestattet folgende Verallgemeinerung: Sind M, N, K Mannigfaltigkeiten, ist ∇ eine kovariante Ableitung für M und sind $f : N \rightarrow M$ und $g : K \rightarrow N$ Abbildungen, so gilt für $X \in \Gamma(TK)$ und $Y \in \Gamma(f^*TM)$

$$((f \circ g)^*\nabla)_X(Y \circ g) = (f^*\nabla)_{dg(X)}Y. \quad (15)$$

Beweis. Betrachte zunächst den Spezialfall $Y = Z \circ f$ für $Z \in \Gamma(TM)$. Schreibe dann ein allgemeines Y wie in (12). □

Die Ricci-Identität und die Torsionsfreiheit gelten auch für Vektorfelder längs Abbildungen. Genauer:

Satz 24. Sei $f : N \rightarrow M$ eine Abbildung in eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) mit Levi-Civita-Ableitung ∇ .

(i) Für $X \in \Gamma(TN)$ und $Y_1, Y_2 \in \Gamma(f^*TM)$ gilt:

$$X \cdot g(Y_1, Y_2) = g((f^*\nabla)_X Y_1, Y_2) + g(Y_1, (f^*\nabla)_X Y_2).$$

(ii) Für $X, Y \in \Gamma(TN)$ gilt

$$(f^*\nabla)_X df(Y) - (f^*\nabla)_Y df(X) = df([X, Y]).$$

Beweis. Zu (i). Selbst.

Zu (ii). Wir schreiben bezüglich einer Karte für M

$$df(X) = \sum X_j \frac{\partial}{\partial x_j} \circ f$$

und entsprechend für Y . Dann ist

$$\begin{aligned} (f^*\nabla)_X df(Y) - (f^*\nabla)_Y df(X) &= \sum (X \cdot Y_j) \frac{\partial}{\partial x_j} \circ f + \sum X_i Y_j (\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}) \circ f \\ &\quad - \sum (Y \cdot X_j) \frac{\partial}{\partial x_j} \circ f - \sum Y_i X_j (\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}) \circ f \\ &= \sum (X \cdot Y_j) \frac{\partial}{\partial x_j} \circ f - \sum (Y \cdot X_j) \frac{\partial}{\partial x_j} \circ f. \end{aligned}$$

Andrerseits ist für eine Funktion ϕ

$$\begin{aligned}
df([X, Y]) \cdot \phi &= [X, Y] \cdot (\phi \circ f) \\
&= X \cdot (Y \cdot (\phi \circ f)) - Y \cdot (X \cdot (\phi \circ f)) \\
&= X \cdot \left(\sum_k Y^k \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_k} \circ f \right) \right) - \dots \\
&= \sum_k (X \cdot Y^k) \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_k} \circ f \right) + \sum_{j,k} Y^k X^j \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_k} \circ f - \dots \\
&= \sum_k (X \cdot Y^k - Y \cdot X^k) \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_k} \circ f \right)
\end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. \square

Satz 25 (Levi-Civita). Sei $f : (N, h) \rightarrow (M, g)$ eine isometrische Immersion zwischen Riemannschen Mannigfaltigkeiten. Sei $\pi : f^*TM \rightarrow TN$ die orthogonale Projektion. Mit $\overset{N}{\nabla}$ und $\overset{M}{\nabla}$ bezeichnen wir die Levi-Civita-Zusammenhänge. Dann gilt für $X, Y \in \Gamma(TN)$

$$\overset{N}{\nabla}_X Y = \pi \left((f^* \overset{M}{\nabla})_X df(Y) \right). \quad (16)$$

Bemerkungen:

1. Die Tangentialprojektion ist die Standardmethode zur Gewinnung einer kovarianten Ableitung auf Flächen im \mathbb{R}^3 und in analogen höher-dimensionalen Situationen.
2. Eine leicht zu beweisende Verallgemeinerung des Satzes zeigt, daß auch die Levi-Civita-Ableitung des hyperbolischen Raumes im Lorentzmodell einfach die lorentz-orthogonale Projektion der Euklidischen Ableitung auf den Tangentialraum ist.

Beweis. Wir definieren für $X, Y \in \Gamma(TN)$

$$\nabla_X Y := \pi \left((f^* \overset{M}{\nabla})_X df(Y) \right).$$

Dann ist ∇ offenbar \mathbb{R} -linear im zweiten und $C^\infty(N)$ -linear im ersten Argument. Für $\phi : N \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\nabla_X(\phi Y) = \pi \left((X \cdot \phi) df(Y) + \phi (f^* \overset{M}{\nabla})_X df(Y) \right) = (X \cdot \phi) Y + \phi \nabla_X Y.$$

Also ist ∇ eine kovariante Ableitung auf N . Wir zeigen nun die Ricci-Identität und die Torsionsfreiheit von ∇ . Für $X, Y, Z \in \Gamma(TN)$ ist

$$h(\nabla_X Y, Z) = g(df(\pi((f^* \overset{M}{\nabla})_X df(Y))), df(Z)) = g((f^* \overset{M}{\nabla})_X df(Y), df(Z)). \quad (17)$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
h(\nabla_X Y, Z) + h(Y, \nabla_X Z) &= g((f^* \overset{M}{\nabla})_X df(Y), df(Z)) + g(df(Y), (f^* \overset{M}{\nabla})_X df(Z)) \\
&\stackrel{\text{Satz 24}}{=} X \cdot g(df(Y), df(Z)) \\
&= X \cdot h(Y, Z)
\end{aligned}$$

Also gilt für ∇ die Ricci-Identität. Schließlich ist nach Satz 24

$$(f^*\overset{M}{\nabla})_X df(Y) - (f^*\overset{M}{\nabla})_Y df(X) = df([X, Y])$$

Anwendung von π liefert

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = \pi df([X, Y]) = [X, Y].$$

Damit ist ∇ auch torsionsfrei, also der Levi-Civita-Zusammenhang. □

Beispiel 26. Ein extremes Beispiel ist der Fall einer Isometrie $f : (N, h) \rightarrow (M, g)$. In diesem Fall folgt aus (16)

$$df(\overset{N}{\nabla}_X Y) = df(\pi((f^*\overset{M}{\nabla})_X df(Y))) = (f^*\overset{M}{\nabla})_X df(Y).$$

Isometrien erhalten die Levi-Civita-Ableitung. □

Beispiel 27. Bezeichnet $\tilde{\nabla}$ die kanonische Ableitung im \mathbb{R}^{m+1} bzw. im $\mathbb{R}^{(1,m)}$ (die beiden sind gleich!), so sind die Levi-Civita-Ableitungen der Sphäre bzw. des hyperbolischen Raumes für tangentielle Vektorfelder X, Y an der Stelle x gegeben durch

$$\overset{S^m}{\nabla}_X Y = \tilde{\nabla}_X Y + \langle X, Y \rangle x, \quad \overset{H^m}{\nabla}_X Y = \tilde{\nabla}_X Y - \langle X, Y \rangle x.$$

□

3 Innere Metrik

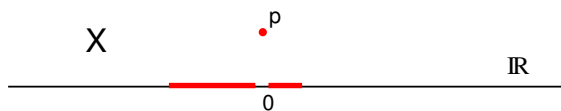
In diesem Abschnitt machen wir Gebrauch von unserer Voraussetzung, daß Mannigfaltigkeiten hausdorffsch sind, genauer von der Implikation

$$\text{kompakt} \implies \text{abgeschlossen.}$$

Wir geben hier ein Beispiel einer nicht-hausdorffschen Mannigfaltigkeit, in der das nicht wahr ist.

Beispiel 28. Sei $X := \mathbb{R} \cup \{p\}$, wobei $p \notin \mathbb{R}$. Offene Teilmengen von X seien die offenen Teilmengen von \mathbb{R} und alle Mengen der Form $Y \cup \{p\}$, für die $Y \cup \{0\}$ offen in \mathbb{R} ist. Das definiert eine Topologie für X .

Die nebenstehende Abbildung zeigt X und eine typische offene Umgebung von p .



Die Menge $[-1, +1]$ ist kompakt, aber ihr Komplement in X ist nicht offen.

□

Satz 29. Sei (M, g) eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit. Definiere für $p, q \in M$

$$d(p, q) := \inf\{L(c) \mid c \text{ ist eine stückweise } C^\infty\text{-Kurve von } p \text{ nach } q\}.$$

Dann ist (M, d) ein metrischer Raum, und die induzierte Topologie ist die Mannigfaltigkeitstopologie.

Beweis. Weil M lokal diffeomorph zum \mathbb{R}^m ist, ist die Menge der Punkte, die sich mit einem festen $p \in M$ durch einen stückweise C^∞ -Weg verbinden lassen, offen. Dasselbe gilt für die Menge der Punkte, die sich *nicht* mit p durch einen stückweise C^∞ -Weg verbinden lassen. Weil M zusammenhängend ist, lassen sich alle Punkte mit p verbinden und d ist wohldefiniert und reellwertig.

Die Eigenschaften

$$\begin{aligned} d(p, p) &= 0, \\ d(p, q) &= d(q, p), \\ d(p, r) &\leq d(p, q) + d(q, r) \end{aligned}$$

einer Metrik sind evident. Als nächstes wollen wir zeigen, daß

$$d(p, q) = 0 \implies p = q. \tag{18}$$

Zwischenbetrachtung. Sei $p \in M$. Wir wählen eine Karte $u : M \supset U \rightarrow \mathbb{R}^m$ um p mit $u(p) = 0$ und ein $\rho > 0$, so daß die abgeschlossene Kugel B_ρ vom Radius ρ um 0 im \mathbb{R}^m ganz in $u(U)$ liegt. Dann ist $B := u^{-1}(B_\rho)$ eine kompakte Umgebung von p in M . Wir wollen die Länge von Kurven $c : J \rightarrow B$ vergleichen mit der Euklidischen Länge der Bildkurven $u \circ c$ im \mathbb{R}^m . Wir schreiben $\phi := u^{-1}$.

Die Abbildung

$$B_\rho \times S^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, v) \mapsto \sqrt{g_{\phi(x)}(d_x\phi(v), d_x\phi(v))}$$

ist positiv und stetig auf einem Kompaktum und nimmt deshalb ihr Minimum $\delta > 0$ und Maximum Δ an. Für jedes $(x, v) \in B_\rho \times \mathbb{R}^m$ folgt

$$\delta \|v\|_{eukl} \leq \|d_x\phi(v)\|_g \leq \Delta \|v\|_{eukl}.$$

Daraus folgt

$$\delta L_{eukl}(u \circ c) \leq L(c) \leq \Delta L_{eukl}(u \circ c) \text{ für jedes } c \text{ in } \phi(B_\rho). \quad (19)$$

Sei nun $q \neq p$. Zu p wählen wir $u : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $\rho > 0$ wie oben. Weil M hausdorffsch ist, können wir annehmen daß $q \notin U$. Die Menge $\phi(B_\rho)$ ist kompakt, also $M \setminus \phi(B_\rho)$ offen. Weil ϕ ein Diffeomorphismus ist, ist $\phi(\{x \mid \|x\| < \rho\})$ offen. Also teilt $\phi(\{x \mid \|x\| = \rho\})$ die Mannigfaltigkeit in zwei disjunkte offene Mengen, die jeweils einen der Punkte p und q enthalten. Jede Kurve von p nach q trifft also $\phi(\{x \mid \|x\| = \rho\})$ und die Kurvenlänge bis zum ersten Treffen ist $\geq \rho\delta$. Daher ist $d(p, q) \geq \rho\delta$ und (18) bewiesen.³

Es bleibt zu zeigen, daß die Topologien übereinstimmen, d.h. die Gleichheit

$$M\text{-offen} = d\text{-offen}.$$

Ist $q \in M$ mit $d(p, q) < \rho\delta$, so liefert das vorstehende Argument $q \in U$. Also enthält jede Kartenumgebung U von p eine offene d -Kugel um p , und daher sind die M -offenen Teilmengen d -offen.

Für die Umkehrung bleiben wir bei den vorstehenden Bezeichnungen. Sei

$$U_\epsilon(p) := \{q \mid d(p, q) < \epsilon\}$$

eine offene Kugel vom Radius ϵ um p . Ggf. nach Verkleinerung von ρ können wir annehmen, daß $\rho\Delta < \epsilon$. Jedes q in der M -offenen Menge $V := \phi(\{x \mid \|x\| < \rho\})$ läßt sich mit p durch eine Kurve der Länge $\leq \rho\Delta$ verbinden, d.h. $V \subset U_{\rho\Delta}(p) \subset U_\epsilon(p)$. Offene d -Kugeln sind daher M -offen.

Damit stimmen beide Topologien überein. □

Beispiel 30. Im Euklidischen Raum erzeugt die kanonische Riemannsche Metrik gerade die übliche Euklidische Metrik. (Beweis?) □

Beispiel 31. Im ersten Abschnitt haben wir gesehen, daß

- auf der Sphäre S^m

$$d(p, q) = \cos^{-1}\langle p, q \rangle,$$

- auf dem hyperbolischen Raum H^m

$$d(p, q) = \cosh^{-1}(-\langle p, q \rangle).$$

□

³Um diese Argumentation zu genießen, betrachten Sie noch einmal das Beispiel 28 mit der offensichtlichen Riemannschen Metrik. Dort können Sie von p nach 0 auf beliebig kurzem Weg kommen, ohne den Rand einer ρ -Umgebung von 0 zu überqueren.

4 Geodätische

Definition 32 (Beschleunigung). Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Levi-Civita-Ableitung ∇ und $c : \mathbb{R} \supset J \rightarrow M$ eine Kurve in M , definiert auf einem Intervall $J \subset \mathbb{R}$. Dann ist $\dot{c} \in \Gamma(c^*TM)$ das Geschwindigkeitsfeld dieser Kurve. Bezeichnen wir mit $D = \frac{d}{dt}$ das kanonische Vektorfeld auf \mathbb{R} , so ist also $\nabla_D \dot{c} \in \Gamma(c^*TM)$ wieder ein Vektorfeld längs c , das *Beschleunigungsfeld* von c .

Lemma 33 (Beschleunigung unter Umparametrisierung). Gegeben seien die Daten aus der Definition und eine C^∞ Abbildung $\phi : I \rightarrow J$ zwischen Intervallen. Dann gilt

$$\nabla_D(c \circ \phi)' = \ddot{\phi}(\dot{c} \circ \phi) + \dot{\phi}^2 (\nabla_D \dot{c}) \circ \phi. \quad (20)$$

Beachten Sie: Das ist die offensichtliche Verallgemeinerung der Identität

$$(f \circ g)'' = (f' \circ g)g'' + (f'' \circ g)(g')^2.$$

Beweis. Nach (15) gilt

$$\nabla_D(c \circ \phi)' = \nabla_D(\dot{\phi}(\dot{c} \circ \phi)) = \ddot{\phi}(\dot{c} \circ \phi) + \dot{\phi} \nabla_D(\dot{c} \circ \phi) = \ddot{\phi}(\dot{c} \circ \phi) + \dot{\phi} \underbrace{\nabla_{d\phi(D)} \dot{c}}_{= \dot{\phi} \nabla_D \dot{c}} = \ddot{\phi}(\dot{c} \circ \phi) + \dot{\phi}^2 (\nabla_D \dot{c}) \circ \phi$$

□

Definition 34. Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Levi-Civita-Ableitung ∇ .

(i) Eine *Geodätische* ist eine Kurve $c : \mathbb{R} \supset J \rightarrow M$ mit Beschleunigung 0:

$$\nabla_D \dot{c} = 0.$$

(ii) Eine *Prägeodätische* ist eine Kurve $c : \mathbb{R} \supset J \rightarrow M$ mit

$$\nabla_D \dot{c} = \lambda \dot{c}$$

für eine Funktion $\lambda : J \rightarrow \mathbb{R}$.

Bemerkungen. 1. Aus der Ricci-Identität folgt für Geodätische c

$$D \cdot g(\dot{c}, \dot{c}) = 2g(\nabla_D \dot{c}, \dot{c}) = 0.$$

Geodätische sind also mit konstanter Geschwindigkeit parametrisiert.

2. Parametrisiert man eine Prägeodätische c nach der Bogenlänge um⁴, so ist also

$$D \cdot g((c \circ \phi)', (c \circ \phi)') = 0$$

und daher nach der Ricci-Identität

$$g(\nabla_D(c \circ \phi)', (c \circ \phi)') = 0.$$

Andrerseits ist $\nabla_D(c \circ \phi)'$ nach (20) proportional zu $(c \circ \phi)'$ und daher = 0. Prägeodätische werden also bei geeigneter Umparametrisierung zu Geodätischen.

3. Isometrien erhalten die Levi-Civita-Ableitung, vgl. Beispiel 26. Es gilt daher

$$d_c f(\nabla_D \dot{c}) = \nabla_D df(\dot{c}) = \nabla_D(f \circ c)', \quad (21)$$

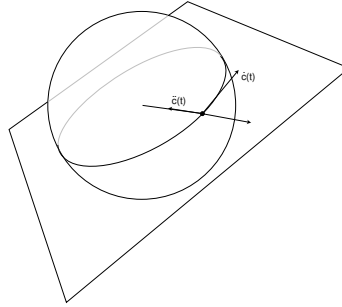
Deshalb ist mit c auch $f \circ c$ eine Geodätische.

Verschiedene Beispiele von Geodätischen und Prägeodätischen sind Ihnen bereits bekannt.

⁴Das ist möglich, wenn c regulär, also eine Immersion ist.

Beispiel 35 (Großkreise). Parametrisiert man die Schnittkurve von S^m oder vom Lorentz- H^m mit einer Ebene durch $0 \in \mathbb{R}^{m+1}$ so liegt die (Euklidische) zweite Ableitung in dieser Ebene.

Weil letztere aber den Normalenvektor von S^m bzw. H^m enthält, ist die Tangentialprojektion der zweiten Ableitung linear abhängig von der ersten Ableitung: die Kurven sind Prägeodätische, vgl. Satz 25.



□

Beispiel 36 (Poincarémodell). Wir haben in Beispiel 22 für die Kurve

$$\tilde{c} : [0, 1] \rightarrow H^m, t \mapsto tv \quad \text{mit } \|v\| = 1$$

die Levi-Civita-Ableitung des H^m ausgerechnet:

$$\nabla_D \dot{\tilde{c}} = \frac{2t}{1-t^2} \dot{\tilde{c}}.$$

Sie ist also eine Prägeodätische.

Die Kurve $c(t) = \tilde{c}(\psi(t))$ hat die Geschwindigkeit

$$g(\dot{c}, \dot{c}) = \frac{4}{(1-|c(t)|^2)^2} \langle \dot{\psi}(t)v, \dot{\psi}(t)v \rangle = \frac{4\dot{\psi}(t)^2}{(1-\psi(t)^2)^2}$$

Daher ist

$$c(t) = \left(\tanh \frac{t}{2} \right) v$$

eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve, denn $(\tanh)' = 1 - \tanh^2$.

□

Beispiel 37 (Fixkurven von Isometrien). Seien $c : \mathbb{R} \supset J \rightarrow M$ eine mit konstanter Geschwindigkeit parametrisierte Kurve und $f : M \rightarrow M$ eine Isometrie, die c fest läßt: $f \circ c = c$. Weiter gelte

$$\ker(\text{Id} - d_{c(t)}f) = \mathbb{R}\dot{c}$$

für alle t . Dann ist c eine Geodätische. Insbesondere gilt das für Meridiankurven von Rotationsflächen. Das gibt einen neuen Beweis für die Aussage von Beispiel 35.

Beweis. Aus (21) folgt wegen $f \circ c = c$, daß $d_c f(\nabla_D \dot{c}) = \nabla_D \dot{c}$. Also ist

$$\nabla_D \dot{c} \in \mathbb{R}\dot{c}.$$

Andrerseits folgt aus $g(\dot{c}, \dot{c}) = \text{const.}$ durch Differenzieren

$$0 = Dg(\dot{c}, \dot{c}) = 2g(\nabla_D \dot{c}, \dot{c}),$$

und deshalb ist $\nabla_D \dot{c} = 0$.

□

Beispiel 38 (Bilinvariante Metriken auf Liegruppen). Für eine bilinvariante Metrik g auf einer Liegruppe G , war die Levi-Civita-Ableitung

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y], \quad X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Vgl. Beispiel 20.

Ist $X \in \mathfrak{g}$ ein linksinvariantes Vektorfeld, so folgt für seine Integralkurve $c(t) = \exp(tX)$

$$\nabla_D \dot{c} = (\nabla_X X) \circ c = \frac{1}{2}[X, X] \circ c = 0.$$

Die Integralkurven von linksinvarianten Vektorfeldern sind also Geodätische der bilinvarianten Metrik.

Die spezielle orthogonale Gruppe $\mathbf{SO}(3)$ gestattet bilinvariante Metriken. Eine solche ist zum Beispiel gegeben durch

$$\langle X, Y \rangle := \text{Spur}(XY^t) \quad \text{für } X, Y \in \mathfrak{so}(3).$$

Die Integralkurve von

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{so}(3)$$

ist gegeben durch die Drehung um die z -Achse:

$$c(t) := e^{tX} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Das ist also eine Geodätische in $\mathbf{SO}(3)$. □

Geodätischengleichung in lokalen Koordinaten. Sei (u, U) eine Karte für M . Dann ist ∇ gegeben durch die Christoffelsymbole

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial u_i}} \frac{\partial}{\partial u_j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial u_k}.$$

Beschreibt man die Kurve c in U durch die Komponentenfunktionen in der Karte, d.h. setzt man $c_i := u_i \circ c$, so lautet die Bedingung dafür, daß c eine Geodätische ist

$$\ddot{c}_k + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k(c) \dot{c}_i \dot{c}_j = 0.$$

Vergleichen Sie dazu die Rechnung im Beweis von Lemma 33.

Das ist eine (nichtlineare) gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung. Als gibt es zu gegebenen Anfangswerten $c(a), \dot{c}(a)$ lokal genau eine Geodätische $c :]a - \epsilon, a + \epsilon[\rightarrow M$.

Satz 39 (Exponentialabbildung). Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann gibt es genau eine C^∞ -Abbildung $\exp : W \rightarrow M$ einer offenen Teilmenge $W \subset TM$ mit folgender Eigenschaften:

Für alle $p \in M, v \in T_p M$ ist $J_v := \{t \mid tv \in W\}$ ein offenes Intervall um 0, und

$$c_v : J_v \rightarrow M, t \mapsto \exp tv$$

ist die eindeutig bestimmte maximale Geodätische mit $\dot{c}_v(0) = v$.

$W_p := W \cap T_p M$ ist eine offene sternförmige Umgebung von $0 \in T_p M$ und es gilt

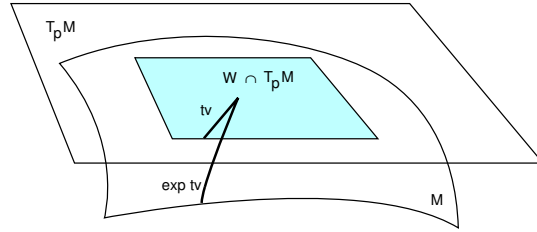
$$d_0(\exp|_{T_p M}) = \text{Id}_{T_p M}.$$

Insbesondere bildet \exp eine Umgebung von 0 in $T_p M$ diffeomorph auf eine Umgebung von p in M ab. (Geodätische Koordinaten).

Die Abbildung \exp heißt die Exponentialabbildung von (M, g) .

Beweis.

Wir formulieren die Geodätischengleichung um als Differentialgleichung 1. Ordnung auf TM und wenden dann den Satz über den maximalen Fluß eines Vektorfeldes an.



0. Vorbemerkung. Wir notieren eine Geodätische mit Anfangsvektor v als c_v . Dann gilt

- Ist c eine Geodätische, so ist auch $\gamma(t) = c(t_0 + t)$ wieder eine Geodätische und $\dot{\gamma}(0) = \dot{c}(t_0)$. Also gilt

$$c_{\dot{c}(t_0)}(t) = c_{\dot{c}(0)}(t_0 + t). \quad (22)$$

- Ist c eine Geodätische, so ist auch $\delta(t) = c_v(\tau t)$ wieder eine Geodätische und es gilt $\dot{\delta}(0) = \tau \dot{c}(0)$. Also gilt

$$c_{\dot{\delta}(0)}(\tau t) = c_{\tau \dot{c}(0)}(t) \quad (23)$$

und insbesondere (mit $t = 1$ und t statt τ)

$$c_{\dot{\delta}(0)}(t) = c_{t \dot{c}(0)}(1). \quad (24)$$

1. Der geodätische Spray Sei $\pi : TM \rightarrow M$ das Tangentialbündel von M . Jede Karte $u(U)$ induziert eine Karte $(\tilde{u}, \tilde{U} = u^{-1}(U))$ für TM wie folgt:

$$\tilde{u}(v) := (u_1(\pi(v)), \dots, u_m(\pi(v)), du_1(v), \dots, du_m(v)). \quad (25)$$

Zu $v \in TM$ sei $c_v : J \rightarrow M$ eine Geodätische mit $\dot{c}_v(0) = v$. Dann hat man $\dot{c}_v : J \rightarrow TM$ und wir setzen

$$\tilde{X}_v := \dot{c}_v(0) \in T_v TM. \quad (26)$$

Da c_v bis auf den Definitionsbereich eindeutig ist, ist \tilde{X} ein wohldefiniertes Vektorfeld auf TM , der sogenannte *geodätische Spray* von (M, g) . Wir wollen zeigen, daß es differenzierbar

ist. Dazu reicht der Nachweis, daß $\tilde{X}\tilde{u}$ für die in (1) definierten Karten differenzierbar ist. Dann sind die Koeffizienten von \tilde{X} in der Karte \tilde{u} differenzierbar. Für $1 \leq k \leq m$ ist

$$\begin{aligned}\tilde{X}_v \tilde{u}_k &= \ddot{c}_v(0) \tilde{u}_k = \frac{d}{dt}(\tilde{u}_k \circ \dot{c}_v)(0) = \frac{d}{dt}(u_k(\pi(\dot{c}_v)))(0) = \frac{d}{dt}(u_k \circ c_v)(0) \\ &= du_k(\dot{c}_v(0)) = du_k(v) = \tilde{u}_{m+k}(v).\end{aligned}$$

Ebenso

$$\begin{aligned}\tilde{X}_v \tilde{u}_{m+k} &= \frac{d}{dt}(\tilde{u}_{m+k} \circ \dot{c}_v)(0) = \frac{d}{dt}(du_k(\dot{c}_v)) = \ddot{c}_{vk} \\ &= -\sum \Gamma_{ij}^k(c_v(0)) \dot{c}_{vi}(0) \dot{c}_{vj}(0) = -\left(\sum \Gamma_{ij}^k \circ \pi\right) \tilde{u}_{m+i} \tilde{u}_{m+j}(v).\end{aligned}$$

2. Integralkurven von \tilde{X} und Geodätische. Ist c eine Geodätische, so ist $c_{\dot{c}(t_0)}(t) = c(t + t_0)$. Also ist

$$\tilde{X}_{\dot{c}(t_0)} = \frac{d}{dt} \dot{c}(t + t_0)(0) = \frac{d}{dt} \dot{c}(t_0).$$

Also ist \dot{c} eine Integralkurve von \tilde{X} .

Sei umgekehrt \tilde{c} eine Integralkurve von \tilde{X} . Sei c eine Geodätische mit $\dot{c}(t_0) = \tilde{c}(t_0)$. Dann ist auch \dot{c} eine Integralkurve von \tilde{X} , also stimmen \tilde{c} und \dot{c} auf einer Umgebung von t_0 überein. Es folgt, daß $\pi \circ \tilde{c} = \pi \circ \dot{c} = c$ eine Geodätische ist.

3. Die Exponentialabbildung. Sei $\tilde{\Phi} : \mathbb{R} \times TM \supset \tilde{W} \rightarrow TM$ der maximale Fluß von \tilde{X} . Wir setzen

$$\begin{aligned}W &:= \{v \mid (1, v) \in \tilde{W}\} \\ \exp : W &\rightarrow M, v \mapsto \pi \circ \tilde{\Phi}(1, v).\end{aligned}$$

Offenbar sind W mit \tilde{W} offen und \exp differenzierbar. Weiter gilt

$$\exp(tv) = \pi \circ \tilde{\Phi}(1, tv) = c_{tv}(1) = c_v(t) = \pi \circ \tilde{\Phi}(t, v).$$

Deshalb ist $J_v \rightarrow M, t \mapsto \exp(tv)$ die maximale Geodätische mit $\dot{c} = v$.

Offenbar ist W_p offen und sternförmig bezüglich 0 in T_pM . Schließlich ist

$$d_0 \exp(v) = D \exp(tv)|_0 = Dc_v(0) = v.$$

Beispiel 40. Für Liegruppen mit biinvarianter Metrik haben wir schon gesehen, daß die Integralkurven linksinvarianter Vektorfelder Geodätische sind. Sie sind auf ganz \mathbb{R} definiert und werden in der Liegruppentheorie ebenfalls mit

$$t \mapsto \exp tX, \quad X \in \mathfrak{g}$$

bezeichnet. In diesem Fall ist also $W = TM$.

□

5 Geodätische und Kürzeste

Im Euklidischen Raum sind *Strecken* durch zwei wichtige Eigenschaften ausgezeichnet: Sie sind *gerade*, d.h. sie haben keine Krümmung, und sie sind *kürzeste* Verbindungen ihrer Endpunkte. Die Geradheit bedeutet bei Parametrisierung mit konstanter Geschwindigkeit gerade die Beschleunigungsfreiheit, Strecken sind Geodätische. Wir wollen nun klären, wieweit Geodätische in Riemannschen Mannigfaltigkeiten auch die Kürzesteneigenschaft haben.

Definition 41. Seien (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $c : [a, b] \rightarrow M$ eine Kurve.

- (i) Sei $J \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall um 0.

$$V : [a, b] \times J \rightarrow M, (t, \tau) \mapsto V(t, \tau) = c_\tau(t)$$

heißt eine *Variation* von c , wenn $c = c_0$. Gilt überdies

$$c_\tau(a) = c(a), \quad c_\tau(b) = c(b) \quad \text{für alle } \tau,$$

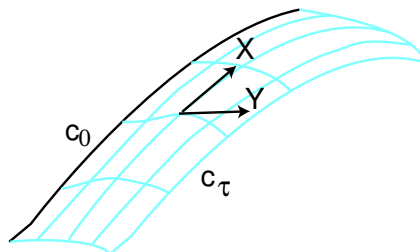
so heißt V eine *Variation mit festen Endpunkten*.

- (ii) Sei V eine Variation von c . Seien $\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \tau}$ die beiden konstanten Einheitsvektorfelder in Richtung der kanonischen Basis auf \mathbb{R}^2 . Wir definieren Vektorfelder längs V durch

$$X_{(t,\tau)} := d_{(t,\tau)}V\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}V_{(t,\tau)} = \dot{c}_\tau(t)$$

$$Y_{(t,\tau)} := d_{(t,\tau)}V\left(\frac{\partial}{\partial \tau}\right) = \frac{\partial}{\partial \tau}V_{(t,\tau)}$$

Y heißt das *Variationsvektorfeld* von V .



Satz 42 (Erste Variation der Bogenlänge). Sei V eine Variation der nicht-konstanten Geodätischen $c : [a, b] \rightarrow M$, und sei

$$L(\tau) := L(c_\tau) = \int_a^b \sqrt{g_{c_\tau(t)}(\dot{c}_\tau(t), \dot{c}_\tau(t))} dt.$$

Dann gilt für X und Y wie oben

$$\frac{\partial}{\partial \tau} L(0) = g\left(Y, \frac{X}{\|X\|}\right)\Big|_{(a,0)}^{(b,0)}.$$

Dabei ist $\|X_{(t,0)}\|$ gerade die (konstante) Geschwindigkeit der Geodätischen, also

$$\frac{\partial}{\partial \tau} L(0) = g(Y, X)\Big|_{(a,0)}^{(b,0)},$$

falls c nach der Bogenlänge parametrisiert ist.

Insbesondere ist für Variationen mit festen Endpunkten wegen $Y_{(a,0)} = 0, Y_{(b,0)} = 0$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} L(0) = 0.$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \tau} L(\tau) &= \frac{\partial}{\partial \tau} \int_a^b \sqrt{g_{c_\tau(t)}(\dot{c}_\tau(t), \dot{c}_\tau(t))} dt \\
&= \int_a^b \frac{1}{2\|\dot{c}_\tau(t)\|} \frac{\partial}{\partial \tau} g_{c_\tau(t)}(\dot{c}_\tau(t), \dot{c}_\tau(t)) dt \\
&= \int_a^b \frac{1}{2\|X_{(t,\tau)}\|} \frac{\partial}{\partial \tau} g(X, X)_{(t,\tau)} dt \\
&= \int_a^b \frac{1}{\|X_{(t,\tau)}\|} g(\nabla_{\frac{\partial}{\partial \tau}} X, X)_{(t,\tau)} dt
\end{aligned}$$

Aber nach Satz 24 hat man

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial \tau}} X - \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} Y = \nabla_{\frac{\partial}{\partial \tau}} dV\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} dV\left(\frac{\partial}{\partial \tau}\right) = dV\left(\left[\frac{\partial}{\partial \tau}, \frac{\partial}{\partial t}\right]\right) = 0.$$

Es folgt

$$\frac{d}{d\tau} L(\tau) = \int_a^b \frac{1}{\|X_{(t,\tau)}\|} g(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} Y, X)_{(t,\tau)} dt$$

und wegen der Konstanz von $\|X_{(t,0)}\| =: \lambda$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau} L(0) &= \frac{1}{\lambda} \int_a^b g(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} Y, X)_{(t,0)} dt \\
&= \frac{1}{\lambda} \int_a^b \left(\frac{\partial}{\partial t} g(Y, X)_{(t,0)} - g(Y, \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} X)_{(t,0)} \right) dt \\
&= \frac{1}{\lambda} \int_a^b \left(\frac{\partial}{\partial t} g(Y, X)_{(t,0)} - g(Y_{(t,0)}, (\nabla_D \dot{c})_t) \right) dt \\
&= \frac{1}{\lambda} \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} g(Y, X)_{(t,0)} dt \\
&= g\left(Y, \frac{X}{\|X\|}\right)\Big|_{(a,0)}^{(b,0)}.
\end{aligned}$$

□

Im folgenden Satz betrachten wir die Einschränkung der Exponentialabbildung auf einen Tangentialraum $T_p M$, genauer auf die offene Teilmenge $W_p = W \cap T_p M$ davon. Dann ist für $x \in W_p$

$$T_p M \cong T_x(T_p M) \subset T_x(TM),$$

und in diesem Sinne $d_x \exp : T_p M \rightarrow T_{\exp(x)} M$.

Satz 43 (Gauß-Lemma). *Die Exponentialabbildung der Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) ist in jedem Punkt radialisometrisch: Ist W_p der Definitionsbereich von $\exp|_{T_p M}$, so gilt für alle $x \in W_p$ und $v, w \in T_p M$ mit $v \in \mathbb{R}x$:*

$$g_{\exp x}(d_x \exp(v), d_x \exp(w)) = g_p(v, w).$$

Für hinreichend kleines $\delta > 0$ werden also die Sphären $\{x \in T_p M \mid g_p(x, x) = \delta^2\}$ durch \exp diffeomorph auf Untermannigfaltigkeiten von M abgebildet, die die von p ausgehenden Geodätischen senkrecht schneiden.

Beweis. Trivial für $x = 0$, weil $d_0 \exp|_{T_p M} = \text{Id}$.

Sei also $x \neq 0$ und o.E. $v = x$. Wir betrachten die Variation

$$V(t, \tau) := \exp(t(x \cos \tau + w \sin \tau))$$

von $t \mapsto \exp tx$. Dafür ist

$$\begin{aligned} X_{(t,0)} &= d_{tx} \exp(x) \\ Y_{(t,0)} &= d_{tx} \exp(tw). \end{aligned}$$

Es gilt

$$L(\tau) = \|x \cos \tau + w \sin \tau\|$$

und deshalb

$$\frac{\partial L}{\partial \tau}(0) = \frac{2g(x, w)}{2\|x\|} = g\left(w, \frac{x}{\|x\|}\right).$$

Einsetzen dieser Größen in die Variationsformel liefert wegen $Y_{(0,0)} = 0$

$$g\left(w, \frac{x}{\|x\|}\right) = g_{\exp x}(d_x \exp(w), \frac{d_x \exp(x)}{\|x\|})$$

und damit die Behauptung. □

Satz 44 (Geodätische sind lokal Kürzeste I). *Sei (M, g) eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit. Seien $p \in M$ und $\epsilon > 0$. Die Menge*

$$W_\epsilon := \{x \in T_p M \mid \|x\| < \epsilon\}$$

werde durch \exp diffeomorph in M abgebildet. Dann ist für alle $x \in W_\epsilon$

$$d(p, \exp x) = \|x\|$$

und

$$\exp(W_\epsilon) = \{q \in M; d(p, q) < \epsilon\}.$$

Die Kurve $c : [0, 1] \rightarrow M, t \mapsto \exp(tx)$ ist die (bis auf monotone Umparametrisierung) eindeutig bestimmte kürzeste Kurve von p nach $\exp x$.

Beweis. Wir wissen bereits, daß $c : [0, 1] \rightarrow M$ eine Kurve der Länge $\|x\|$ von p nach $\exp x$ ist. Wir zeigen: Ist $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ eine Kurve von p nach $\exp x$, so ist

$$L(\gamma) \geq \|x\|.$$

Wir nehmen zunächst an, daß $\gamma = \exp \tilde{\gamma}$ für eine Kurve $\tilde{\gamma}$ in W_ϵ . Wir können weiter annehmen, daß $\tilde{\gamma}(t) \neq 0$ für $t > a$. Wir bezeichnen mit $\tilde{R} : y \mapsto \frac{y}{\|y\|}$ das radiale Einheitsvektorfeld auf $W_\epsilon \setminus \{0\}$ und mit R das dazu unter dem Diffeomorphismus \exp korrespondierende Feld auf $\exp(W_\epsilon \setminus \{0\})$. Beachte, daß R nach dem Gauß-Lemma ein Einheitsfeld ist. Dann gilt

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_a^b \sqrt{g_\gamma(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})} dt \geq \int_a^b g_\gamma(\dot{\gamma}, R_\gamma) dt \\ &= \int_a^b g_p(\dot{\tilde{\gamma}}, \tilde{R}_{\tilde{\gamma}}) dt = \int_a^b g_p(\dot{\tilde{\gamma}}, \frac{\tilde{\gamma}}{\|\tilde{\gamma}\|}) dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} \|\tilde{\gamma}\| dt = \|\tilde{\gamma}(b)\| = \|x\|. \end{aligned}$$

Gleichheit erhält man nur, wenn $\dot{\gamma}$ stets ein positives Vielfaches von $R \circ \gamma$ ist, d.h. wenn $\gamma = c$ bis auf monotone Umparametrisierung.

Verläßt die Kurve γ die Menge $\exp(W_\epsilon)$, so „verläßt ihr $(\exp|_{W_\epsilon})$ -Urbild“ die Kugel W_ϵ , und nach der vorstehenden Rechnung ist ihre Länge $\geq \epsilon$.

Damit ist der Satz vollständig bewiesen. \square

Beispiel 45. Mit dem Gaußlemma erhält man einen neuen Beweis für die Kürzesten-Eigenschaft der „Großkreisbögen“ aus Beispiel 17. \square

Lemma 46. Seien (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Dann gibt es $\epsilon > 0$ und eine Umgebung U von p in M , so daß für alle $q \in U$ die Menge

$$W_\epsilon(q) := \{v \in T_q M \mid \|v\| < \epsilon\}$$

durch \exp diffeomorph in M abgebildet wird.

Beweis. Wir schreiben in diesem Beweis 0_q für den Nullvektor in $T_q M$ und bezeichnen mit $\exp : TM \supset W \rightarrow M$ die Exponentialabbildung von (M, g) . Definiere

$$E : TM \supset W \rightarrow M \times M, v \mapsto E(v) = (\pi(v), \exp v).$$

Dann gilt für alle $q \in M$

$$E(0_q) = (q, q), \tag{27}$$

$$d_{0_q} E = (d_{0_q} \pi, d_{0_q} \exp) \quad \text{ist ein Isomorphismus.} \tag{28}$$

Zum Beweis von (28) betrachte für $v \in T_q M$ die Kurven $a : t \mapsto 0_{\exp(tv)}$ und $b : t \mapsto tv$ in TM . Dann gilt

$$E(a(t)) = (\exp(tv), \exp(tv)) \quad \implies \quad d_0 E(\dot{a}(0)) = (v, v)$$

$$E(b(t)) = (q, \exp(tv)) \quad \implies \quad d_0 E(\dot{b}(0)) = (0, v).$$

Daher ist E in allen Punkten 0_q ein lokaler Diffeomorphismus, und es gibt eine offene Umgebung \tilde{W} von 0_p , die durch E diffeomorph abgebildet wird. Dazu gibt es eine Umgebung U in M und ein $\epsilon > 0$, so daß

$$\{v \in TM \mid \pi(v) \in U \wedge \|v\| < \epsilon\} \subset \tilde{W}.$$

Dann ist $E|_{W_\epsilon(q)}$ für alle q ein Diffeomorphismus auf

$$E(W_\epsilon(q)) = \{q\} \times \exp(W_\epsilon(q))$$

Also ist auch $\exp|_{W_\epsilon(q)}$ ein Diffeomorphismus. \square

Satz 47 (Geodätische sind lokal Kürzeste II). Sei $c : [a, b] \rightarrow M$ eine Geodätische in der zusammenhängenden Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) . Dann gibt es eine Zerlegung $a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = b$, so daß $c|_{[t_{i-1}, t_i]}$ für jedes i die (bis auf Parametrisierung eindeutig bestimmte) Kürzeste zwischen den Endpunkten ist.

Beweis. Wähle zu t eine Umgebung U von $p = c(t)$ und ein ϵ_t wie im Lemma. Wegen der Kompaktheit von $[a, b]$ gibt es dann ein $\epsilon > 0$, so daß $W_\epsilon(c(t))$ für alle t diffeomorph

abgebildet wird. Wähle die Zerlegung von $[a, b]$ so fein, daß $d(c(t_{i-1}), c(t_i)) < \epsilon$ für alle i . Dann ist $c(t_i) \in \exp(W_\epsilon(c(t_{i-1})))$ und deshalb $c|_{[t_{i-1}, t_i]}$ die bis auf Parametrisierung eindeutig bestimmte Kürzeste zwischen $c(t_{i-1})$ und $c(t_i)$. \square

Wir kommen jetzt zur umgekehrten Frage: Sind Kürzeste in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit auch Geodätische?

Satz 48 (Kürzeste sind Prägeodätische). Seien (M, g) eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit und $p, q \in M$. Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ eine stückweise- C^∞ -Kurve von p nach q mit $d(p, q) = L(\gamma)$. Dann gibt es eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodätische $c : [0, L(\gamma)] \rightarrow M$ und eine stückweise- C^∞ -Funktion $\phi : [a, b] \rightarrow [0, L(\gamma)]$ mit

$$\gamma = c \circ \phi.$$

Beweis. Weil $\gamma([a, b])$ kompakt ist, gibt es nach dem Lemma 46 ein $\epsilon > 0$, so daß jedes $W_\epsilon(\gamma(t))$ durch \exp diffeomorph abgebildet wird. Wähle eine Zerlegung

$$a = t_0 \leq \dots \leq t_k = b,$$

so daß $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$ differenzierbar und

$$d(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_{i+1})) < \epsilon. \quad (29)$$

Weil γ Kürzeste ist, gilt nach der Dreiecksungleichung für $s < t$

$$L(\gamma|_{[s, t]}) = d(\gamma(s), \gamma(t)). \quad (30)$$

Aus (29), (30) folgt nach dem Satz 44

$$\gamma([t_{i-1}, t_{i+1}]) \subset \exp(W_\epsilon(\gamma(t_{i-1})))$$

und $\gamma|_{[t_{i-1}, t_{i+1}]}$ ist eine monoton umparametrisierte Geodätische:

$$\begin{aligned} \gamma|_{[t_{i-1}, t_{i+1}]} &= c_{i-1} \circ \phi_{i-1}, \\ \phi_{i-1} : [t_{i-1}, t_{i+1}] &\rightarrow \mathbb{R} \text{ stückweise } C^\infty. \end{aligned}$$

Insbesondere hat γ an der Stelle t_i keinen echten Knick! Wir nehmen o.E. an, daß c_{i-1} nach der Bogenlänge parametrisiert ist: $\|\dot{c}_{i-1}\| = 1$. Dann hat das Definitionsintervall von c_{i-1} die Länge $L(\gamma|_{[t_{i-1}, t_{i+1}]}) = L(\gamma|_{[t_0, t_{i+1}]} - L(\gamma|_{[t_0, t_{i-1}]})$. Wir können deshalb annehmen, daß

$$c_{i-1} : [L(\gamma|_{[t_0, t_{i-1}]}), L(\gamma|_{[t_0, t_{i+1}]})] \rightarrow M.$$

Auf $[L(\gamma|_{[t_0, t_i]}), L(\gamma|_{[t_0, t_{i+1}]})]$ sind dann sowohl c_{i-1} als auch c_i definierte, nach der Bogenlänge parametrisierte kürzeste Geodätische von $\gamma(t_i)$ nach $\gamma(t_{i+1})$. Also stimmen sie auf diesem Intervall überein, und die c_i setzen sich zu einer nach der Bogenlänge parametrisierten Geodätischen $c : [0, L(\gamma)] \rightarrow M$ zusammen. Offenbar setzen sich auch die ϕ_i zu einer stetigen, stückweise differenzierbaren Abbildung $\phi : [a, b] \rightarrow [0, L(\gamma)]$ zusammen. \square

6 Geodätische Konvexität

Die folgenden Definitionen benötigen wir momentan nur im Beweis von Satz 51. Sie sind aber auch sonst von Interesse.

Definition 49. Seien (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und ϕ eine differenzierbare Funktion auf M .

(i) Der *Gradient* von ϕ ist das Vektorfeld definiert durch

$$g(\text{grad}_p \phi, v) := d_p \phi(v) = v \cdot \phi$$

für alle $p \in M, v \in T_p M$.

(ii) Die *Hessesche* von ϕ ist das Bilinearformenfeld definiert durch

$$\text{hess } \phi(v, w) := g(\nabla_v \text{grad } \phi, w)$$

für alle $p \in M, v, w \in T_p M$. In kritischen Punkten von ϕ hängt also die 2. Ableitung nicht von der kovarianten Ableitung ab.

Lemma 50. *Es gilt*

(i) $\text{hess } \phi(v, w) = \text{hess } \phi(w, v)$.

(ii) *Ist $\text{grad}_p \phi = 0$, so gilt für ein beliebiges Vektorfeld W mit $W_p = w$:*

$$\text{hess } \phi(v, w) = v \cdot (W \cdot \phi).$$

Beweis. Seien V, W Vektorfelder mit $V_p = v, W_p = w$. Dann ist

$$\begin{aligned} g(\nabla_V \text{grad } \phi, W) &= V \cdot g(\text{grad } \phi, W) - g(\text{grad } \phi, \nabla_V W) \\ &= V \cdot (W \cdot \phi) - (\nabla_V W) \cdot \phi \end{aligned}$$

Ist $0 = \text{grad}_p \phi$, so folgt daraus (ii). Im allgemeinen können wir wegen der Torsionsfreiheit weiter schließen

$$\begin{aligned} g(\nabla_V \text{grad } \phi, W) &= V \cdot (W \cdot \phi) - (\nabla_W V + [V, W]) \cdot \phi \\ &= V \cdot (W \cdot \phi) - (\nabla_W V) \cdot \phi - V \cdot (W \cdot \phi) + W \cdot (V \cdot \phi) \\ &= W \cdot (V \cdot \phi) - (\nabla_W V) \cdot \phi \\ &= g(\nabla_W \text{grad } \phi, V). \end{aligned}$$

Daraus folgt die Symmetrie der Hesseschen. □

Satz 51 (Geodätisch-konvexe Umgebungen). *Sei (M, g) eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann gibt es zu jedem Punkt $p \in M$ ein $\delta_0 > 0$, so daß für alle $\delta \in]0, \delta_0[$ die offene d -Kugel $U_\delta(p)$ vom Radius δ um p geodätisch konvex ist: je zwei Punkte $x, y \in U_\delta(p)$ lassen sich durch genau eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kürzeste von x nach y verbinden, und diese liegt in $U_\delta(p)$.*

Beweis. A. Sei $\epsilon_0 > 0$ so gewählt, daß $\exp|_{\overline{W_{\epsilon_0}(p)}}$ ein Diffeomorphismus ist. Dann gibt es nach dem Lemma 46 zu der kompakten Menge $C := \exp(\overline{W_{\epsilon_0}(p)})$ ein $\epsilon > 0$, so daß $\exp|_{W_\epsilon(q)}$

für jedes $q \in C$ ein Diffeomorphismus ist. Wir wählen ein solches ϵ mit $\epsilon < \epsilon_0$, und setzen $\delta_0 = \epsilon/2$. Sei $0 < \delta < \delta_0$. Dann gilt für $q, r \in \exp(W_\delta(p))$, daß $q \in C$ und $d(q, r) < 2\delta < \epsilon$. Daher gibt es eine bis auf Parametrisierung eindeutig bestimmte Kürzeste $c : [a, b] \rightarrow M$ von q nach r . Es gilt nach der Dreiecksungleichung $c([a, b]) \subset \exp(W_\epsilon(p))$, aber im allgemeinen nicht $c([a, b]) \subset \exp(W_\delta(p))$.

B. Für eine Geodätische c und eine C^∞ -Funktion ϕ auf M gilt mit $D = \frac{d}{dt}$

$$D^2(\phi \circ c) = Dg(\text{grad}_c \phi, \dot{c}) = g(\nabla_D \text{grad}_c \phi, \dot{c}) + g(\text{grad}_c \phi, \underbrace{\nabla_D \dot{c}}_{=0}) = \text{hess } \phi(\dot{c}, \dot{c}).$$

Wir betrachten auf $\exp(W_\epsilon(p))$ die Funktion $\phi := d(p, \cdot)^2 = \|(\exp|_{W_\epsilon(p)})^{-1}(\cdot)\|^2$. Für die Geodätische $c_v : t \mapsto \exp(tv)$ mit $v \in T_p M$ gilt

$$D^2(\phi \circ c_v) = D^2 \|tv\|^2 = 2\|v\|^2.$$

Die letztere Formel zeigt, daß $\text{hess } \phi$ in p positiv-definit ist. Wählt man ϵ klein genug, so ist $\text{hess}_q \phi$ positiv-definit für alle $q \in \exp(W_\epsilon(p))$, d.h. $\phi \circ c$ ist für alle Geodätischen in $\exp(W_\epsilon(p))$ eine konvexe Funktion und es gilt $d(p, c) < \delta$. \square

7 Der Satz von Hopf-Rinow

Definition 52. Die Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) heißt (geodätisch) *vollständig*, wenn es einen Punkt $p \in M$ gibt, so daß \exp auf ganz $T_p M$ definiert ist, d.h. so daß jede Geodätische durch p sich auf ganz \mathbb{R} fortsetzen läßt.

Lemma 53. Sei (M, g) geodätisch vollständig bezüglich p und zusammenhängend. Dann gibt es zu jedem $q \in M$ eine Geodätische c von p nach q mit

$$L(c) = d(p, q).$$

Beweis. Wir setzen $r := d(p, q)$ und wählen $\epsilon > 0$ so, daß \exp den kompakten Ball $\overline{W_\epsilon(p)}$ diffeomorph auf eine Menge $B(p) \subset M$ abbildet. Sei

$$S(p) = \exp(\{w \in T_p M \mid \|w\| = \epsilon\})$$

deren Rand. Wir nehmen an, daß $q \notin B(p)$, denn sonst sind wir ohnehin fertig.

Die stetige Funktion $d(\cdot, q)|_{S(p)}$ nimmt ihr Minimum an in einem Punkt

$$x = \exp(\epsilon v), \quad v \in T_p M, \quad \|v\| = 1.$$

Nach Voraussetzung ist die Geodätische

$$c(t) := \exp(tv)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert.

Es genügt zu zeigen:

$$c(r) = q, \tag{31}$$

denn dann ist $c|_{[0,r]}$ eine Geodätische der Länge r von p nach q und die Behauptung ist bewiesen.

Zum Beweis von (31) beachten wir, daß für alle t nach der Dreiecksungleichung

$$d(c(t), q) \geq d(p, q) - d(p, c(t)) \geq r - t \tag{32}$$

gilt. Wir betrachten die Menge der t , die Gleichheit liefern:

$$A := \{t \in [0, r] \mid d(c(t), q) = r - t\}.$$

Es genügt zu zeigen:

$$\sup A = r. \tag{33}$$

Weil A offenbar abgeschlossen ist, ist dann $r \in A$, also $d(c(r), q) = r - r = 0$ und (31) ist erfüllt.

Zunächst ist $A \neq \emptyset$, weil $0 \in A$, und daher ist $\sup A \in [0, r]$.

Zwischenbetrachtung. Weil wir das Argument später brauchen, zeigen wir, daß auch $\epsilon \in A$. Andernfalls wäre nämlich

$$d(x, q) = d(c(\epsilon), q) > r - \epsilon = d(p, q) - \epsilon.$$

Das bedeutet $d(p, q) < \epsilon + d(x, q)$, und es gibt einen Weg der Länge $< \epsilon + d(x, q)$ von p nach q . Dieser trifft $S(p)$ in einem Punkt $y \in S(p)$ mit

$$d(p, y) + d(y, q) = \epsilon + d(y, q) < \epsilon + d(x, q).$$

Dann wäre $d(y, q) < d(x, q)$ im Widerspruch zur Wahl von x . Wir halten fest:

$$d(x, q) = d(c(\epsilon), q) = r - \epsilon. \quad (34)$$

Es genügt zu zeigen: Ist $t_0 \in A \cap [0, r[$, so gibt es $\epsilon_0 > 0$ mit

$$t_0 + \epsilon_0 \in A. \quad (35)$$

Daraus folgt dann (33), und wir sind fertig.

Zum Beweis der letzten Behauptung setzen wir $p_0 := c(t_0)$ und wählen ein $\epsilon_0 < r - t_0$, so daß \exp auf $\overline{W_{\epsilon_0}(p_0)}$ ein Diffeomorphismus ist. Wir definieren $S(p_0)$, und $x_0 \in S(p_0)$ analog zu $S(p)$ und x . Weil $t_0 \in A$ ist, ist $d(p_0, q) = r - t_0$. Das Argument der Zwischenbetrachtung liefert deshalb

$$d(x_0, q) = r - t_0 - \epsilon_0 \quad (36)$$

und

$$d(p, x_0) \geq d(p, q) - d(x_0, q) = t_0 + \epsilon_0.$$

Der geodätische Weg c von p nach p_0 gefolgt von der minimalen Geodätischen von p_0 nach x_0 hat die Länge $t_0 + \epsilon_0$ und ist deshalb eine Kürzeste, also eine (Prä-)Geodätische ohne Knick, d.h. $x_0 = c(t_0 + \epsilon_0)$. Aus (36) folgt (35). □

Satz 54. (Hopf-Rinow 1931). Sei (M, g) eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit mit innerer Metrik d . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) (M, g) ist geodätisch vollständig.
- (ii) Jede abgeschlossene und beschränkte Teilmenge von (M, d) ist kompakt.
- (iii) (M, d) ist vollständig.

Zusatz: In diesem Fall lassen sich je zwei Punkte $p, q \in M$ durch eine Geodätische c mit

$$L(c) = d(p, q)$$

verbinden und jede Geodätische läßt sich auf ganz \mathbb{R} fortsetzen.

Beweis. (i) \implies (ii). Sei \exp auf ganz $T_p M$ definiert. Sei $A \subset M$ abgeschlossen und beschränkt. Weil A beschränkt ist, gibt es nach dem Lemma ein $r > 0$, so daß $A \subset \exp(\overline{W_r(p)})$. Die letztere Menge ist als stetiges Bild einer kompakten Menge kompakt. Als abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge ist dann auch A kompakt.

(ii) \implies (iii). (Diese Implikation gilt in beliebigen metrischen Räumen.) Sei (p_n) eine d -Cauchyfolge in M . Dann ist $A := \overline{\{p_n\}}$ eine abgeschlossene und beschränkte Menge. Also besitzt (p_n) nach Bolzano-Weierstraß eine gegen $p \in A$ konvergente Teilfolge. Weil (p_n) Cauchyfolge ist, konvergiert die Folge selbst gegen A .

(iii) \implies (i). Sei $c : [0, b[\rightarrow M$ eine nach rechts maximal fortgesetzte, nach der Bogenlänge parametrisierte Geodätische. Es genügt zu zeigen, daß dann $b = \infty$. Dann läßt sich jede Geodätische auf ganz \mathbb{R} fortsetzen und (M, g) ist insbesondere geodätisch vollständig.

Annahme: $b < \infty$. Sei (t_n) eine von unten gegen b konvergente Folge. Wegen

$$d(c(s), c(t)) \leq |t - s| \quad (37)$$

ist $(c(t_n))$ eine Cauchyfolge, also konvergent gegen einen Punkt $q \in M$. Die Menge $\{c(t_n)\} \cup \{q\}$ ist kompakt. Nach dem Lemma 46 gibt es $\epsilon > 0$, so daß $\exp|_{W_\epsilon(c(t_n))}$ für alle n ein Diffeomorphismus ist. Wähle n mit $b - t_n < \epsilon$. Dann ist $c|_{[t_n, b[}$ eine Geodätische in $W_\epsilon(c(t_n))$ der Länge $< \epsilon$, läßt sich also über b hinaus verlängern. Widerspruch zur Annahme! \square

Es ist einleuchtend, daß der Satz von Hopf-Rinow überall in der globalen Differentialgeometrie eine Rolle spielt, weil es dort eben um vollständige Mannigfaltigkeiten geht. Ein wichtiger Begriff in dem Zusammenhang ist der Überlagerungsbegriff, auf den wir jetzt kurz eingehen.

Definition 55. Eine surjektive differenzierbare Abbildung $\pi : N \rightarrow M$ heißt eine *Überlagerung*, wenn gilt:

Zu jedem $p \in M$ gibt es eine offene Umgebung U von p , so daß $\pi^{-1}(U)$ die disjunkte Vereinigung offener Mengen $U_i \subset N$ ist, deren jede durch π diffeomorph auf U abgebildet wird.

Bemerkung: Die Funktion $p \mapsto \#\pi^{-1}(\{p\})$ ist lokal konstant auf M und heißt die Blätterzahl von π .

Beispiel 56.

- $\mathbb{R} \rightarrow S^1, x \mapsto \exp(ix)$
- $S^m \rightarrow \mathbb{R}P^m$.
- Die 3-Sphäre S^3 kann man als Menge der Quaternionen vom Betrage 1 betrachten: Sie bildet dann eine 3-dimensionale Liegruppe. Für $q \in S^3$ bildet die Konjugation $\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}, x \mapsto qxq^{-1}$ den zu \mathbb{R}^3 isomorphen Raum der imaginären Quaternionen $\text{Spann}\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ in sich ab und induziert so eine orthogonale Abbildung $A_q \in SO(3)$. Die Abbildung $S^3 \rightarrow SO(3), q \mapsto A_q$ ist eine 2-blättrige Überlagerung. Die Überlagerungseigenschaft beweist man leicht mit dem Satz 58.

\square

Satz 57 (Riemannsche Überlagerungen). Seien $(\tilde{M}, \tilde{g}), (M, g)$ zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeiten gleicher Dimension. (\tilde{M}, \tilde{g}) sei vollständig und

$$\pi : (\tilde{M}, \tilde{g}) \rightarrow (M, g)$$

eine isometrische Immersion, d.h. für alle $\tilde{p} \in \tilde{M}$ ist $d_{\tilde{p}}\pi : T_{\tilde{p}}\tilde{M} \rightarrow T_pM$ eine Isometrie. Dann ist π eine Überlagerung.

Beweis. Als Immersion zwischen gleichdimensionalen Mannigfaltigkeiten ist π ein lokaler Diffeomorphismus, also eine lokale Isometrie. Insbesondere bildet π Geodätische in Geodätische ab.

A) (M, g) ist vollständig. Seien $\tilde{p} \in \tilde{M}, p := \pi(\tilde{p})$ und $v \in T_pM$. Dann gibt es $\tilde{v} \in T_{\tilde{p}}\tilde{M}$ mit $d\pi(\tilde{v}) = v$, und $t \mapsto \pi(\exp(t\tilde{v}))$ ist eine Geodätische in (M, g) mit $\dot{c}(0) = d\pi(\tilde{v}) = v$. Daraus folgt, daß auch (M, g) vollständig ist und daß

$$\pi \circ \exp^{\tilde{M}} = \exp^M \circ d\pi. \quad (38)$$

B) π ist surjektiv. Seien $\tilde{p} \in \tilde{M}, p := \pi(\tilde{p})$ und $q \in M$. Wir wollen zeigen, daß $q \in \pi(\tilde{M})$. Nach dem Satz von Hopf-Rinow gibt es $v \in T_p M$ mit $\exp v = q$. Sei $\tilde{v} \in T_{\tilde{p}} \tilde{M}$ mit $d\pi(\tilde{v}) = v$. Dann ist nach (38)

$$\pi(\exp \tilde{v}) = \exp v = q.$$

C) π ist eine Überlagerung. Sei $p \in M$. Wähle dazu $\epsilon > 0$, so daß \exp auf $W_{2\epsilon}(p)$ ein Diffeomorphismus ist und definiere

$$U := \exp^M(W_\epsilon(p)), \quad U_{\tilde{p}} := \exp^{\tilde{M}}(W_\epsilon(\tilde{p}))$$

für alle $\tilde{p} \in \pi^{-1}(\{p\})$.

Es genügt zu zeigen:

$$\text{Für alle } \tilde{p} \in \pi^{-1}(\{p\}) \text{ ist } U_{\tilde{p}} \text{ offen und } \pi|_{U_{\tilde{p}}} : U_{\tilde{p}} \rightarrow U \text{ ein Diffeomorphismus.} \quad (39)$$

$$\pi^{-1}(U) = \bigcup U_{\tilde{p}}. \quad (40)$$

$$\text{Für } \tilde{p} \neq \tilde{q} \text{ mit } \pi(\tilde{p}) = \pi(\tilde{q}) = p \text{ ist } U_{\tilde{p}} \cap U_{\tilde{q}} = \emptyset. \quad (41)$$

Zu (39). Aus (38) folgt, daß $\pi \circ \exp^{\tilde{M}}$, also erst recht $\exp^{\tilde{M}}$, auf $W_\epsilon(\tilde{p})$ ein Diffeomorphismus ist. Daher ist $U_{\tilde{p}}$ offen und

$$\pi|_{U_{\tilde{p}}} : U_{\tilde{p}} \rightarrow U$$

ein Diffeomorphismus.

Zu (40). Nach (39) ist $\pi^{-1}(U) \supset \bigcup U_{\tilde{p}}$. Sei umgekehrt $\tilde{x} \in \pi^{-1}(U)$ und $x := \pi(\tilde{x}) \in U$. Dann gibt es ein $v \in W_\epsilon(x)$ mit $\exp^M(v) = p$. Sei $d\pi(\tilde{v}) = v$ für ein $\tilde{v} \in T_{\tilde{x}} \tilde{M}$. Aus (38) folgt

$$\pi(\exp^{\tilde{M}}(\tilde{v})) = p.$$

Also ist $\tilde{p} := \exp^{\tilde{M}}(\tilde{v}) \in \tilde{p} \in \pi^{-1}(\{p\})$, und wegen $d(\tilde{x}, \tilde{p}) < \epsilon$ ist $\tilde{x} \in U_{\tilde{p}}$. Es folgt $\pi^{-1}(U) \subset \bigcup U_{\tilde{p}}$.

Zu (41). Seien $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2 \in \pi^{-1}(\{p\})$ und $\tilde{q} \in U_{\tilde{p}_1} \cap U_{\tilde{p}_2}$. Dann gibt es Geodätische \tilde{c}_i der Länge $< \epsilon$ von \tilde{q} nach \tilde{p}_i . Diese projizieren sich unter π auf Geodätische der Länge $< \epsilon$ in U von $\pi(\tilde{q})$ nach p . Es gibt aber nur eine solche Geodätische. Also haben \tilde{c}_1 und \tilde{c}_2 denselben Anfangsvektor und sind deshalb gleich. Daher ist $\tilde{p}_1 = \tilde{p}_2$. \square

Satz 58 (Plattenwechsler-Satz). Sei $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ ein lokaler Diffeomorphismus von Mannigfaltigkeiten. \tilde{M} sei kompakt und M zusammenhängend. Dann ist π eine Überlagerung.

Beweis. Als lokaler Diffeomorphismus ist π offen und lokal injektiv. Also ist $\pi(\tilde{M})$ offen, wegen Kompaktheit aber auch abgeschlossen in M . Also ist π surjektiv.

Sei $p \in M$. Wegen der Kompaktheit von \tilde{M} und der lokalen Injektivität von π ist

$$\pi^{-1}(\{p\}) = \{x_1, \dots, x_k\}$$

endlich. Nach dem Umkehrsatz und der Hausdorff-Eigenschaft gibt es paarweise disjunkte offene Umgebungen V_1, \dots, V_k , die durch π jeweils diffeomorph auf eine offene Umgebung V_i von p abgebildet werden. Setze

$$U := \left(\bigcap V_i \right) \setminus \pi(\tilde{M} \setminus \bigcup V_i).$$

U ist sicher offen. Setze weiter

$$U_i := V_i \cap \pi^{-1}(U).$$

Offenbar sind die U_i offen, disjunkt und werden durch π diffeomorph auf U abgebildet. Ist schließlich $x \in \pi^{-1}(U)$, so liegt x nach Konstruktion nicht in $\tilde{M} \setminus \bigcup V_i$, d.h. $x \in V_i$ für (genau) ein i . Da π die Menge V_i diffeomorph abbildet, und $\pi(x) \in U$ nach Voraussetzung, folgt $x \in U_i$. Daher ist

$$\pi^{-1}(U) = \bigcup U_i.$$

□

Satz 59 (Hochheben von Homotopien). Seien \tilde{M} und M zusammenhängende Mannigfaltigkeiten und $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ eine Überlagerung. Dann gilt

(i) Ist $h : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow M \in C^\infty$ und $\tilde{p} \in \tilde{M}$

mit

$$\pi(\tilde{p}) = h(a, 0) =: p,$$

\tilde{M}

so gibt es genau eine C^∞ -Abbildung

$$\tilde{h} : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \tilde{M}$$

$\tilde{h} \nearrow \downarrow \pi$

$$[a, b] \times [0, 1] \xrightarrow{h} M$$

mit

$$\pi \circ \tilde{h} = h \text{ und } \tilde{h}(a, 0) = \tilde{p}.$$

(ii) Ist M einfach-zusammenhängend, so ist $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ ein Diffeomorphismus.

Beweis. Zu (i). Selbst.

Zu (ii). Weil π als Überlagerung ein lokaler Diffeomorphismus ist, genügt es zu zeigen, daß π injektiv ist. Seien $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2 \in \tilde{M}$ mit

$$\pi(\tilde{p}_1) = \pi(\tilde{p}_2) =: p.$$

Wähle einen Weg $\tilde{c} : [a, b] \rightarrow \tilde{M}$ mit $\tilde{c}(a) = \tilde{p}_1, \tilde{c}(b) = \tilde{p}_2$. Dann ist $c := \pi \circ \tilde{c} : [a, b] \rightarrow M$ ein in p geschlossener Weg. Weil M einfach-zusammenhängend ist, gibt es eine Homotopie von c zum konstanten Weg, d.h. eine Abbildung

$$h : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow M$$

mit

$$\begin{aligned} h(t, 0) &= c(t) \text{ für alle } t \in [a, b], \\ h(a, \tau) &= p = h(b, \tau) \text{ für alle } \tau \in [0, 1], \\ h(t, 1) &= p \text{ für alle } t \in [a, b]. \end{aligned}$$

Nach (i) gibt es ein eindeutig bestimmtes $\tilde{h} : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \tilde{M}$ mit

$$\tilde{h}(a, 0) = \tilde{p}_1 \text{ und } \pi \circ \tilde{h} = h.$$

Insbesondere ist also

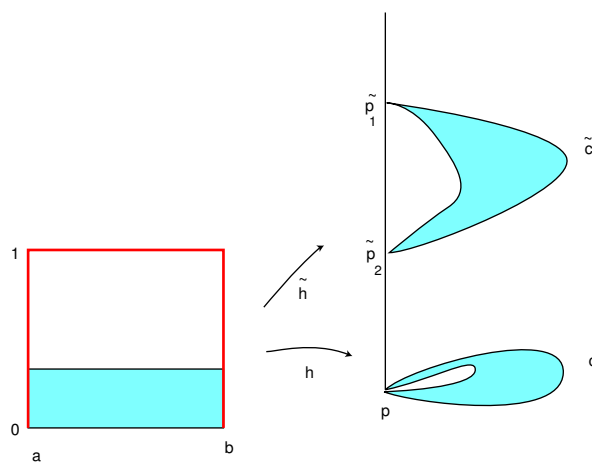
$$\pi \circ \tilde{h}(t, 0) = h(t, 0) = c(t) = \pi \circ \tilde{c}(t).$$

Aus der Eindeutigkeitsaussage von (i)⁵ folgt $\tilde{h}(t, 0) = \tilde{c}(t)$ und insbesondere $\tilde{h}(b, 0) = \tilde{c}(b) = \tilde{p}_2$. Auf der zusammenhängenden Menge

$$(\{a\} \times [0, 1]) \cup ([a, b] \times \{1\}) \cup (\{b\} \times [0, 1])$$

ist $h = \pi \circ \tilde{h}$ konstant vom Wert p . Weil π lokal injektiv ist, ist auch \tilde{h} auf dieser Menge konstant und daher

$$\tilde{p}_1 = \tilde{h}(a, 0) = \tilde{h}(b, 0) = \tilde{p}_2.$$



□

⁵angewendet auf $h'(t, \tau) := h(t, 0)$

8 Parallelverschiebung

Satz 60 (und Definition). Sei $c : [a, b] \rightarrow M$ eine Kurve in der Mannigfaltigkeit M und ∇ eine kovariante Ableitung auf M . Sei $X_0 \in T_{c(a)}M$. Dann gibt es genau ein Vektorfeld $X \in \Gamma(c^*TM)$ längs c mit

$$\nabla_D X = 0 \text{ und } X(a) = X_0. \quad (42)$$

Man nennt X das parallele Vektorfeld längs c mit Anfangswert X_0 und die Abbildung

$$\Pi_c : T_{c(a)}M \rightarrow T_{c(b)}M, X_0 = X(a) \mapsto X(b)$$

die Parallelverschiebung längs c . Sie ist ein Isomorphismus reeller Vektorräume.

Beweis. **1. Schritt.** Wir betrachten den Spezialfall, daß $c([a, b]) \subset U$, wo U ein Kartengebiet in M ist. Weiter sei $t_0 \in [a, b]$ beliebig und $Y_0 \in T_{c(t_0)}M$.

Dann hat man auf U Gaußsche Basisfelder $\frac{\partial}{\partial x_i}$, und jedes Vektorfeld X längs c ist von der Form

$$X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x_i} \circ c, \quad X^i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}.$$

Die Differentialgleichung aus (42) schreibt sich

$$\sum_k \left(\dot{X}^k + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k(c) \dot{c}_i X^j \right) \frac{\partial}{\partial x_k} \circ c = 0.$$

Das ist ein lineares Differentialgleichungssystem mit C^∞ -Koeffizienten. Es hat nach der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen genau eine C^∞ -Lösung auf dem ganzen Intervall $[a, b]$ mit $X(t_0) = Y_0$.

2. Schritt. Unter den Voraussetzungen des Satzes gibt es eine Zerlegung

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b,$$

von $[a, b]$, so daß für jedes i die Menge $c([t_{i-1}, t_{i+1}])$ in einer Kartenumgebung von M liegt (Lemma von Lebesgue). Dann gibt es nach dem ersten Schritt eindeutig bestimmte Vektorfelder X_i längs $c|_{[t_{i-1}, t_i]}$ mit

$$\begin{aligned} \nabla_D X_i &= 0, \\ X_1(t_0) &= X_0, \\ X_i(t_{i-1}) &= X_{i-1}(t_{i-1}) \text{ für } i > 1. \end{aligned}$$

Definiere

$$X(t) := X_i(t) \text{ für } t_{i-1} \leq t \leq t_i.$$

Dann ist X ein stetiges Vektorfeld längs c mit $X(a) = X_0$ und $\nabla_D X = 0$ auf allen $]t_{i-1}, t_i[$. Nach dem ersten Schritt gibt es weiter auf $[t_{i-1}, t_{i+1}]$ genau ein paralleles C^∞ -Vektorfeld \tilde{X} längs c mit $\tilde{X}(t_i) = X(t_i)$. Nach der Eindeutigkeitsaussage im ersten Schritt ist dann aber $\tilde{X}|_{[t_{i-1}, t_i]} = X_i$ und $\tilde{X}|_{[t_i, t_{i+1}]} = X_{i+1}$. Daher ist $X = \tilde{X}$ auf $[t_{i-1}, t_{i+1}]$, d.h. X ist C^∞ auch an den Stelle t_i . \square

Bemerkung. Die Menge

$$H_p := \{\Pi_c | c : [a, b] \rightarrow M, c(a) = p = c(b)\} \subset \mathbf{GL}(T_p M)$$

ist eine Untergruppe von $\mathbf{GL}(T_p M)$, die sogenannte *Holonomiegruppe* von ∇ im Punkt $p \in M$.

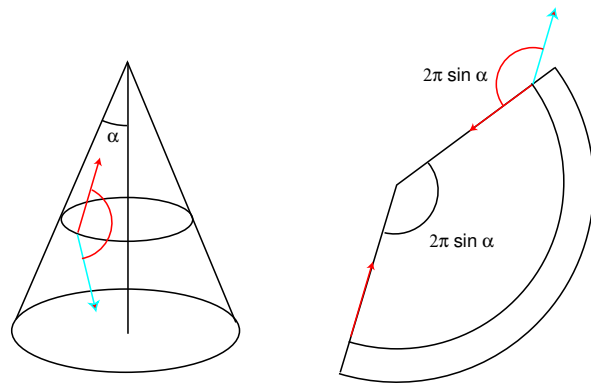
Beispiel 61. Sind X, Y parallele Vektorfelder längs eine Kurve $c : [a, b] \rightarrow M$ in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit mit Levi-Civita-Ableitung, so ist

$$D \cdot g(X, Y) = g(\nabla_D X, Y) + g(X, \nabla_D Y) = 0,$$

d.h. die Parallelverschiebung erhält die Riemannsche Metrik und liefert daher eine isometrische Abbildung von $T_{c(a)}M$ nach $T_{c(b)}M$. Für in $p \in M$ geschlossenes c ist also $\Pi_c \in \mathbf{O}(T_pM)$. Ist M darüberhinaus orientiert, so ändert ein Basisfeld unter der Parallelverschiebung seine Orientierung nicht, und daher ist $\Pi_c \in \mathbf{SO}(T_pM)$. Ist schließlich noch $\dim M$ ungerade, so hat Π_c einen Eigenwert $+1$, d.h. es gibt längs c ein nicht-triviales paralleles *geschlossenes* Vektorfeld: $X_a = X_b \neq 0$. □

Beispiel 62 (Parallelverschiebung auf dem Kreiskegel). Die Parallelverschiebung auf einem Kreiskegel mit halbem Öffnungswinkel α längs eines Kreises um die Achse kann man berechnen, indem man den Kegel in die Ebene abwickelt (Isometrie!).

Das gibt ein Segment mit Öffnungswinkel $2\pi \sin \alpha$. Die Parallelverschiebung im \mathbb{R}^2 ist trivial. Also rotiert ein paralleles Tangentialvektorfeld längs des Kreises in der Abbildung bei Verschiebung nach rechts im Uhrzeigersinn und bei Verschiebung einmal um den Kegel herum ergibt sich eine Rotation um den Winkel $2\pi \sin \alpha$. Das gilt für die Parallelverschiebung längs *jeder* geschlossenen Kurve, die einmal um die Kegelachse herumläuft.

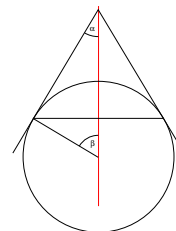


Die Holonomiegruppe in jedem Punkt des Kegels ist also

$$\{2\pi k \sin \alpha \pmod{2\pi} \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Für rationales $\sin \alpha$ ist sie also endlich zyklisch, für irrationales eine dichte Untergruppe in der Drehgruppe $S^1 = \mathbf{SO}(2)$. □

Beispiel 63 (Parallelverschiebung auf der Sphäre). Die Parallelverschiebung längs eines (Klein)kreises auf der Einheitssphäre S^2 kann man sich vorstellen, indem man den Kegel betrachtet, der die Sphäre längs dieses Kreises berührt. Dann ist die Tangentialprojektion längs des Kreises für beide Flächen dieselbe, und nach dem Satz von Levi-Civita ist daher die Parallelverschiebung in beiden Flächen dieselbe. Hat der Kreis den sphärischen Radius β , so liefert die Verschiebung einmal um den Kreis herum eine Drehung um $2\pi \sin(\frac{\pi}{2} - \beta) = 2\pi \cos \beta$.



Für $\beta = \frac{\pi}{2}$, also Verschiebung längs eines Großkreises ist die Rotation 0, weil auch der Tangentialvektor der Geodätischen parallel ist. Für $\beta \searrow 0$ geht der Rotationswinkel gegen 2π , und die Holonomiegruppe ist deshalb die volle Rotationsgruppe. □

9 Der Krümmungstensor

In einer Mannigfaltigkeit mit kovarianter Ableitung kann man, wie wir im letzten Abschnitt gesehen haben, einen Tangentialvektor *längs einer Kurve* zu einem parallelen Vektorfeld fortsetzen. Wenn man ihn aber (lokal) zu einem parallelen Vektorfeld auf einer ganzen Umgebung fortsetzen möchte, kann man das erst längs einer Kurve, z.B. längs einer Koordinatenlinie tun, dann das erhaltene Vektorfeld von der Kurve ausgehend in eine zweite Richtung parallel fortsetzen usw.

Diesen Prozess wollen wir untersuchen. Wir nehmen also zunächst an, daß wir, zum Beispiel durch die beiden ersten Koordinaten einer Karte, ein „Rechteck“

$$V : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow M, \quad (t, \tau) \mapsto V(t, \tau)$$

gegeben haben und einen Tangentialvektor aus $p = V(0, 0)$ zunächst längs $V(\cdot, 0)$ parallel verschieben.

Wir erhalten ein Vektorfeld $Z(\cdot, 0)$, das wir von jedem $V(t, 0)$ parallel in τ -Richtung verschieben. Dadurch erhalten wir ein Vektorfeld Z längs V , von dem wir unterstellen, daß es glatt ist. Es erfüllt dann nach Konstruktion

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} Z|_{(t,0)} = 0, \quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial \tau}} Z = 0.$$

Wir wüßten gern, ob auch $\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} Z = 0$ ist. Weil das bei $\tau = 0$ gilt, genügt es zu zeigen, daß

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial \tau}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} Z = 0. \quad (43)$$

Umgekehrt wissen wir wegen $\nabla_{\frac{\partial}{\partial \tau}} Z = 0$ ja schon, daß

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial \tau}} Z = 0.$$

Damit unsere Konstruktion klappt, muss also

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial \tau}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} Z - \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial \tau}} Z = 0 \quad (44)$$

sein. Hinreichend wäre, wenn für alle Vektorfelder X, Y, Z

$$\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z = 0. \quad (45)$$

Das kann aber nicht sein, denn zum Beispiel ist nach kurzer Rechnung

$$\nabla_X \nabla_Y \phi Z - \nabla_Y \nabla_X \phi Z = \phi(\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z) + ([X, Y] \cdot \phi)Z.$$

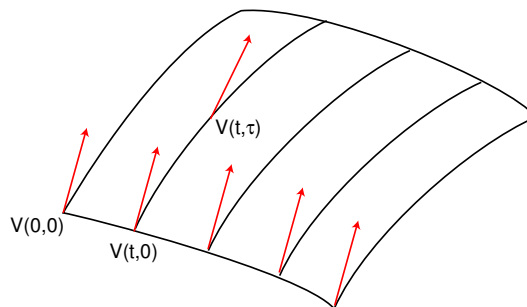
Wenn also (45) für alle X, Y, Z gilt, dann folgt $([X, Y] \cdot \phi)Z = 0$ für alle X, Y, Z und Funktionen ϕ . Unsinn!

Dieses Problem werden wir los, wenn wir den letzten Term anders schreiben:

$$\begin{aligned} \nabla_X \nabla_Y \phi Z - \nabla_Y \nabla_X \phi Z &= \phi(\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z) + ([X, Y] \cdot \phi)Z \\ &= \phi(\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z) + \nabla_{[X, Y]} \phi Z - \phi \nabla_{[X, Y]} Z \end{aligned}$$

oder

$$\nabla_X \nabla_Y \phi Z - \nabla_Y \nabla_X \phi Z - \nabla_{[X, Y]} \phi Z = \phi(\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z).$$



Wenn diese Gleichung für Z gilt, dann also auch für alle ϕZ , und man rechnet nach, daß entsprechendes auch für X und Y gilt: Der Ausdruck $\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$ ist tensoriell. Und weil $[\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \tau}] = 0$ können wir (44) äquivalent ersetzen durch

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial \tau}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} Z - \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial \tau}} Z - \nabla_{[\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \tau}]} Z = 0. \quad (46)$$

Definition 64. Für eine Mannigfaltigkeit M mit kovarianter Ableitung ∇ heißt

$$R(X, Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

der (*Riemannsche*) *Krümmungstensor*. Der Ausdruck ist linear bezüglich der Multiplikation mit Funktionen in jedem Argument, definiert also tatsächlich ein Tensorfeld.

Damit findet man nun, daß (46) und damit (43) genau dann gilt, wenn $R = 0$ ist, vgl. Satz 65 unten. Die Bedingung $R = 0$ ist notwendig und, wie man zeigen kann, auch hinreichend dafür, daß man jeden Tangentialvektor lokal zu einem parallelen Vektorfeld fortsetzen kann.

Die vorstehenden Überlegungen motivieren die Definition des Krümmungstensors als Obstruktion der lokalen Parallelverschiebung. Was das mit *Krümmung* zu tun hat, die Motivation des Namens also, verschieben wir auf den Abschnitt 11 und widmen uns erst einmal den Eigenschaften von R und Beispielen.

Bemerkungen Identitäten für Tensoren muß man nur auf Basisvektoren beweisen. Daher können die folgenden zwei Bemerkungen oft erhebliche Vereinfachungen der Beweise bedeuten:

1. Lokal gibt es immer Basen mit verschwindenden Lieklammern (Gaußsche Basisfelder).
2. Man kann einen Tangentialvektor $v \in T_p M$ stets lokal zu einem Vektorfeld X fortsetzen, für welches $(\nabla X)_p = 0$. (Aber Vorsicht bei zweiten Ableitungen!).
Zum Beweis betrachten wir ein lokales Vektorfeld $X = \sum X_k \frac{\partial}{\partial x_k}$. Dann ist

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial u_i}} X = \sum_k \left(\frac{\partial X_k}{\partial u_i} + \sum_j X_j \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Daher kann man X zum Beispiel definieren durch

$$X_k := v_k - \sum_{i,j} v_j \Gamma_{ij}^k(p) (u_i - u_i(p)).$$

Die erste Eigenschaft betrifft die Erweiterung auf Vektorfelder längs Abbildungen, die wir in der vorstehenden Motivation schon kommentarlos benutzt haben.

Satz 65. Für $f : N \rightarrow M$, ein Vektorfeld $Z \in \Gamma(f^*TM)$ längs f und Vektorfelder X, Y auf N gilt die sogenannte *Strukturgleichung*

$$R(df(X), df(Y))Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z. \quad (47)$$

Dabei haben wir auf der rechten Seite die induzierte kovariante Ableitung $f^*\nabla$ einfach wieder mit ∇ bezeichnet.

Beweis. Wir benutzen die definierenden Gleichung (11) für $\nabla = f^*\nabla$:

$$\nabla_X (Z \circ f) = \nabla_{df(X)} Z$$

für die kovariante Ableitung $f^*\nabla$ von Vektorfeldern. Seien $p \in N$ und E_1, \dots, E_m Basisvektorfelder auf einer Umgebung von $f(p)$, für die

$$(\nabla E_i)_{f(p)} = 0.$$

Wir schreiben

$$Z = \sum Z_i(E_i \circ f), \quad df(X) = \sum X_i(E_i \circ f), \quad df(Y) = \sum Y_i(E_i \circ f).$$

Dann erhalten wir im Punkt p

$$\begin{aligned} \nabla_X \nabla_Y Z &= \nabla_X \nabla_Y \sum_i Z_i E_i \circ f = \sum_i \nabla_X ((Y \cdot Z_i)(E_i \circ f) + Z_i \nabla_{df(Y)} E_i) \\ &= \sum_i \left(X \cdot (Y \cdot Z_i)(E_i \circ f) + (Y \cdot Z_i) \underbrace{\nabla_{df(X)} E_i}_{=0} + (X \cdot Z_i) \underbrace{\nabla_{df(Y)} E_i}_{=0} + Z_i \nabla_X \left(\sum_j Y_j \nabla_{E_j} E_i \right) \right) \\ &= \sum_i X \cdot (Y \cdot Z_i)(E_i \circ f) + \sum_{i,j} Z_i Y_j \nabla_{df(X)} (\nabla_{E_j} E_i) \\ &= \sum_i X \cdot (Y \cdot Z_i)(E_i \circ f) + \sum_{i,j,k} Z_i Y_j X_k (\nabla_{E_k} \nabla_{E_j} E_i) \circ f. \end{aligned}$$

Wegen

$$\nabla_{[X,Y]} Z_i(E_i \circ f) = ([X, Y] \cdot Z_i)(E_i \circ f) + \underbrace{Z_i \nabla_{df([X,Y])} E_i}_{=0}$$

folgt

$$\begin{aligned} \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z &= \sum_{i,j,k} Z_i Y_j X_k (\nabla_{E_k} \nabla_{E_j} E_i) \circ f - \sum_{i,j,k} Z_i X_j Y_k (\nabla_{E_k} \nabla_{E_j} E_i) \circ f \\ &= \sum_{i,j,k} Z_i Y_j X_k R(E_i, E_j) E_k \circ f \\ &= R(df(X), df(Y)) Z. \end{aligned}$$

□

Satz 66 (Krümmungsidentitäten). Für den Krümmungstensor R einer kovarianten Ableitung mit verschwindendem Torsionstensor $T = 0$ und Vektorfelder X, Y, Z, U auf M gilt:

$$R(X, Y) = -R(Y, X), \quad (48)$$

$$R(X, Y)Z + R(Z, X)Y + R(Y, Z)X = 0. \quad (49)$$

Die letzte Gleichung heißt auch die 1. Bianchi-Identität.

Ist ∇ die Levi-Civita-Ableitung der Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) , so gilt weiter:

$$g(R(X, Y)Z, U) = -g(R(X, Y)U, Z), \quad (50)$$

$$g(R(X, Y)Z, U) = g(R(Z, U)X, Y). \quad (51)$$

Beweis. (48) ist trivial.

Zu (49). Wir nehmen an, daß die Lieklammern der Vektorfelder X, Y, Z verschwinden. Dann gilt wegen der Torsionsfreiheit $\nabla_Y Z = \nabla_Z Y$ usw. und man erhält:

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z = \nabla_X \nabla_Z Y - \nabla_Y \nabla_X Z \\ R(Z, X)Y &= \nabla_Z \nabla_X Y - \nabla_X \nabla_Z Y = \nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_X \nabla_Z Y \\ R(Y, Z)X &= \nabla_Y \nabla_Z X - \nabla_Z \nabla_Y X = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_Z \nabla_Y X. \end{aligned}$$

Bei der Addition der drei Gleichungen heben sich die Terme paarweise weg.

Zu (50). Wir nehmen an, daß alle beteiligten Vektorfelder in p kovariante Ableitung 0 haben. Dann verschwinden auch die Lieklammern in p .

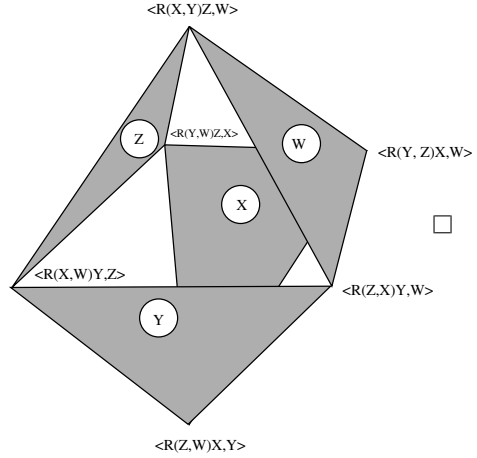
$$\begin{aligned} g(\nabla_X \nabla_Y Z, U) &= Xg(\nabla_Y Z, U) - \underbrace{g(\nabla_Y Z, \nabla_X U)}_{=0} \\ &= XYg(Z, U) - Xg(Z, \nabla_Y U) \\ &= XYg(Z, U) - g(Z, \nabla_X \nabla_Y U). \end{aligned}$$

Der erste Term in der letzten Gleichung ist wegen $[X, Y]_p = 0$ symmetrisch in X und Y . Deshalb folgt

$$g(R(X, Y)Z, U) = -g(Z, \nabla_X \nabla_Y U) + g(Z, \nabla_Y \nabla_X U) = -g(Z, R(X, Y)U).$$

Zu (51). Dies ist eine algebraische Folge der Gleichungen (48), (49), (50).

Nach diesen Identitäten ist die Summe der Terme an den Ecken eines jeden schattierten Dreiecks in dem Oktaeder $=0$. Bei der Summation über die oberen und das Negative der unteren Dreiecke heben sich die äquatorialen Terme weg, und es bleibt zweimal der obere minus zweimal der untere Term. Daraus folgt (51). (Beweis nach Milnor).



Korollar 67 (Schnittkrümmung). Seien (M, g) Riemannsch und (X, Y) und (X', Y') zwei Paare orthonormaler Vektoren in $T_p M$, die dieselbe Ebene aufspannen. Dann gilt

$$R(X', Y') = \pm R(X, Y).$$

Daher ist

$$g(R(X', Y')Y', X') = \pm g(R(X, Y)Y', X') = \pm g(R(Y', X')X, Y) = g(R(X, Y)Y, X).$$

nur abhängig von der Ebene $\sigma_{XY} := \text{Spann}(X, Y)$. Man nennt

$$K(\sigma_{XY}) = g(R(X, Y)Y, X)$$

die (Riemannsche) Schnittkrümmung von (M, g) auf der Ebene $\sigma_{XY} \subset T_p M$.

Der Krümmungstensor ist schon punktweise als Objekt der linearen Algebra einigermaßen kompliziert. Auch die Schnittkrümmung ist als Funktion auf der Grassmann-Mannigfaltigkeit der 2-dimensionalen Ebenen in T_pM nicht so einfach, aber als skalarwertige Funktion vielleicht doch zugänglicher. Sie bestimmt den Krümmungstensor algebraisch:

Lemma 68. *Seien R, \tilde{R} zwei trilineare Abbildungen des Euklidischen Vektorraums (T, g) , welche die Krümmungsidentitäten aus Satz 66 erfüllen. Für alle orthonormalen $X, Y \in T$ sei*

$$\langle R(X, Y)Y, X \rangle = \langle \tilde{R}(X, Y)Y, X \rangle =: K(\sigma_{XY}). \quad (52)$$

Dann folgt $R = \tilde{R}$.

Beweis. Offenbar genügt es, den Beweis für $\tilde{R} = 0$ zu führen, betrachte $R - \tilde{R}$. Aus der Schiefsymmetrie folgt dann, daß $\langle R(X, Y)Y, X \rangle = 0$ nicht nur für orthonormale, sondern für beliebige $X, Y \in T$ gilt. Zunächst betrachten wir für festes $X \in T$

$$\alpha(Y, Z) := \langle R(X, Y)Z, X \rangle = \langle R(Z, X)X, Y \rangle = \langle R(X, Z)Y, X \rangle = \alpha(Z, Y).$$

Also ist α eine symmetrische Bilinearform. Die zugehörige quadratische Form $\alpha(X, X)$ ist nach Voraussetzung 0, also ist $\alpha = 0$, d.h.

$$\langle R(X, Y)Z, X \rangle = 0 \text{ für alle } X, Y, Z \in T. \quad (53)$$

Als nächstes betrachten wir für festes $Y, Z \in T$ die Bilinearform

$$\beta(X, U) := \langle R(X, Y)Z, U \rangle + \langle R(X, Z)Y, U \rangle = \langle R(U, Z)Y, X \rangle + \langle R(U, Y)Z, X \rangle = \beta(U, X).$$

Nach (53) ist die quadratische Form von β Null, also ist auch $\beta = 0$ und daher

$$R(X, Y)Z = -R(X, Z)Y. \quad (54)$$

daraus folgt aber

$$0 = R(X, Y)Z + R(Z, X)Y + R(Y, Z)X = 3R(X, Y)Z.$$

Also ist $R = 0$. □

Satz 69. *Ist (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und hat in einem Punkt $p \in M$ die Schnittkrümmung auf allen Ebenen aus T_pM denselben Wert K , so gilt für den Krümmungstensor im Punkt p*

$$R(X, Y)Z = K(g(Y, Z)X - g(X, Z)Y).$$

In diesem Punkt sieht der Krümmungstensor also so aus wie auf Flächen, allerdings mit konstantem K .

Beweis. Trivial nach Lemma 68, weil die rechte Seite die Krümmungsidentitäten erfüllt und Schnittkrümmung K hat. □

Wir schließen mit einer weiteren Krümmungsidentität und ihrer Anwendung auf das Studium der Schnittkrümmungsfunktion.

Satz 70 (2. Bianchi-Identität). *Definiere den Tensor ∇R durch*

$$(\nabla_X R)(Y, Z)U := \nabla_X(R(Y, Z)U) - R(\nabla_X Y, Z)U - R(Y, \nabla_X Z)U - R(Y, Z)\nabla_X U. \quad (55)$$

Dann gilt

$$(\nabla_X R)(Y, Z)U + (\nabla_Y R)(Z, X)U + (\nabla_Z R)(X, Y)U = 0.$$

Beweis. Weil $\nabla_X R$ ein Tensor ist, genügt es, (55) in einem Punkt p zu zeigen, und zwar für Vektorfelder X, Y, Z, U mit in p verschwindender Ableitung, so daß in diesem Punkt $(\nabla_X R)(Y, Z)U = \nabla_X(R(Y, Z)U)$ usw. Es gilt

$$\begin{aligned} & (\nabla_X R)(Y, Z)U + (\nabla_Z R)(X, Y)U + (\nabla_Y R)(Z, X)U \\ &= \nabla_X \nabla_Y \nabla_Z U - \nabla_X \nabla_Z \nabla_Y U - \nabla_X \nabla_{[Y, Z]} U \\ & \quad + \nabla_Z \nabla_X \nabla_Y U - \nabla_Y \nabla_X \nabla_Z U - \nabla_Z \nabla_{[X, Y]} U \\ & \quad + \nabla_Y \nabla_Z \nabla_X U - \nabla_Z \nabla_Y \nabla_X U - \nabla_Y \nabla_{[Z, X]} U \\ &= R(X, Y)\nabla_Z U + \nabla_{[X, Y]} \nabla_Z U - \nabla_Z \nabla_{[X, Y]} U \\ & \quad + R(Z, X)\nabla_Y U + \nabla_{[Z, X]} \nabla_Y U - \nabla_Y \nabla_{[Z, X]} U \\ & \quad + R(Y, Z)\nabla_X U + \nabla_{[Y, Z]} \nabla_X U - \nabla_X \nabla_{[Y, Z]} U \\ &= R(X, Y)\nabla_Z U + R([X, Y], Z)U + \nabla_{[[X, Y], Z]} U \\ & \quad + R(Z, X)\nabla_Y U + R([Z, X], Y)U + \nabla_{[[Z, X], Y]} U \\ & \quad + R(Y, Z)\nabla_X U + R([Y, Z], X)U + \nabla_{[[Y, Z], X]} U. \end{aligned}$$

Im Punkt p verschwinden alle Terme nach Wahl von X, Y, Z und U . □

Satz 71 (Lemma von Schur). *Ist (M, g) eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit, $\dim M \geq 3$, und ist die Schnittkrümmung in jedem Punkt unabhängig von der Ebene, so ist die Schnittkrümmung auch vom Punkt unabhängig.*

Beweis. Nach Satz 69 haben wir

$$R(X, Y)Z = K(g(Y, Z)X - g(X, Z)Y)$$

mit einer Funktion K , deren Konstanz wir zeigen müssen. Für Vektorfelder X, Y, Z, U mit in $p \in M$ verschwindender kovarianter Ableitung gilt

$$(\nabla_X R)(Y, Z)U = (X \cdot K)(g(Z, U)Y - g(Y, U)Z).$$

Mit der 2. Bianchi-Identität finden wir

$$\begin{aligned} 0 &= (X \cdot K)(g(Z, U)Y - g(Y, U)Z) + (Z \cdot K)(g(Y, U)X - g(X, U)Y) \\ & \quad + (Y \cdot K)(g(X, U)Z - g(Z, U)X). \end{aligned}$$

Sei nun $X \in T_p M$ ergänzt durch $Y, Z = U \in T_p M \setminus \{0\}$ zu einem orthogonalen Dreiein. Wir setzen diese zu Vektorfeldern so fort, daß die kovarianten Ableitungen in p sämtlich verschwinden. Dann ist in p

$$0 = g(Z, Z)((X \cdot K)Y - (Y \cdot K)X)$$

und daraus $X \cdot K = 0$. Das beweist die Konstanz von K auf der zusammenhängenden Mannigfaltigkeit M . □

10 Beispiele für Krümmungstensor und Schnittkrümmung.

Als nächstes betrachten wir Beispiele für den Krümmungstensor.

Beispiel 72. Im \mathbb{R}^m ist $R = 0$, weil jeder Tangentialvektor sich global parallel fortsetzen läßt.

□

Beispiel 73. Die kovariante Ableitung auf der Einheitssphäre S^m war

$$(\nabla_Y Z)_x = \nabla_Y^0 Z + \langle Y, Z \rangle x,$$

wobei ∇^0 die Ableitung auf \mathbb{R}^{m+1} bezeichnet, vgl. Beispiel 27. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z &= \nabla_X (\nabla_Y^0 Z + \langle Y, Z \rangle x) - \nabla_Y (\nabla_X^0 Z + \langle X, Z \rangle x) - \nabla_{[X, Y]}^0 Z - \langle [X, Y], Z \rangle x \\ &= \nabla_X^0 \nabla_Y^0 Z + X \cdot \langle Y, Z \rangle x + \langle Y, Z \rangle X + \langle X, \nabla_Y^0 Z + \langle Y, Z \rangle x \rangle x - \dots \\ &= R^0(X, Y)Z + \langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y \\ &= \langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y. \end{aligned}$$

Diese Formel gilt natürlich ebenso für die Einheitssphäre des \mathbb{R}^{m+1} mit der Metrik $\frac{1}{r^2} \langle \cdot, \cdot \rangle$, die in der Standardmetrik den Radius r besitzt und die wir mit $S^m(r)$ bezeichnen wollen. Also ist der Krümmungstensor von $S^m(r)$ bezüglich der Standardmetrik des \mathbb{R}^{m+1} gegeben durch

$$R(X, Y)Z = \frac{1}{r^2} (\langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y).$$

Ebenso findet man für das verallgemeinerte Lorentzmodell des $H^m =: H^m(1)$, also für

$$H^m(r) := \{x \in \mathbb{R}^{1,m} \mid \langle x, x \rangle_{\text{Lorentz}} = -r^2\}$$

den Krümmungstensor

$$R(X, Y)Z = -\frac{1}{r^2} (\langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y).$$

Die Schnittkrümmung ist dann gegeben durch $K = \frac{1}{r^2}$ bzw. durch $K = -\frac{1}{r^2}$.

□

Beispiel 74. (M, g) Liegruppe mit biinvarianter Metrik. Dann ist $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y]$ für linksinvariante Vektorfelder X, Y , vgl. Beispiel 20. Daraus folgt

$$R(X, Y)Z = -\frac{1}{4}[[X, Y], Z]$$

und für orthonormale X, Y

$$K(\sigma_{XY}) = \frac{1}{4} \|[X, Y]\|^2.$$

Man zeigt leicht, daß K für $SO(3)$ positiv und konstant ist. Für $SO(n), n > 3$ hingegen nimmt $K \geq 0$ auch den Wert 0 an.

□

Beispiel 75. Für $\dim M = 2$ ist

$$R(X, Y)Z = K (g(Y, Z)X - g(X, Z)Y),$$

wobei $K : M \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto K(T_p M)$ die Schnittkrümmung ist.

Beweis. Es genügt, $R(X, Y)$ für eine ON-Basis (X, Y) zu kennen. Dazu genügt es, $R(X, Y)X$ und $R(X, Y)Y$ zu kennen. Weil aber $R(X, Y)$ schiefadjungiert ist, ist

$$R(X, Y)X = g(R(X, Y)X, Y)Y = -KY = K(g(Y, X)X - g(X, X)Y)$$

und ebenso $R(X, Y)Y = K(g(Y, Y)X - g(X, Y)Y)$.

□

Beispiel 76. Ändert man die Metrik konform durch

$$\tilde{g} = e^{2\lambda} g$$

und definiert die Hessesche bezüglich g durch

$$\text{Hess}_\lambda X = \nabla_X \text{grad } \lambda, \quad \text{hess } \lambda(X, Y) = g(\text{Hess}_\lambda X, Y),$$

so erhält man für den neuen Krümmungstensor:

$$\begin{aligned} \tilde{R}(X, Y)Z &= R(X, Y)Z \\ &+ \text{hess } \lambda(X, Z)Y - \text{hess } \lambda(Y, Z)X \\ &+ g(X, Z) \text{Hess}_\lambda Y - g(Y, Z) \text{Hess}_\lambda X \\ &+ ((Y \cdot \lambda)(Z \cdot \lambda) - g(Y, Z) \|\text{grad } \lambda\|^2)X \\ &- ((X \cdot \lambda)(Z \cdot \lambda) - g(X, Z) \|\text{grad } \lambda\|^2)Y \\ &+ ((X \cdot \lambda)g(Y, Z) - (Y \cdot \lambda)g(X, Z)) \text{grad } \lambda. \end{aligned}$$

Das folgt aus der Formel für die Änderung der Levi-Civita-Ableitung bei konformer Änderung der Metrik.

□

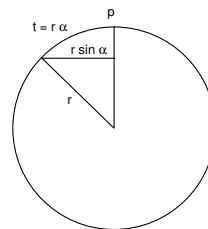
11 Krümmung und Jacobifelder

Wir betrachten die 2-dimensionalen Sphäre $S^2(r)$ vom Radius r und darauf Kreise um p vom Radius t . Ihr Umfang ist

$$U(t) := 2\pi r \sin \frac{t}{r} = 2\pi \left(t - \frac{t^3}{3!r^2} + \dots \right).$$

Der Umfang ist kleiner, als bei ebenen Kreisen von gleichem Radius, weil die Sphäre nach innen gekrümmt ist. Der Effekt ist allerdings von höherer Ordnung. Wir finden

$$\begin{aligned} U'(t) &= 2\pi \cos \frac{t}{r} \\ U''(t) &= -2\pi \frac{1}{r} \sin \frac{t}{r} = -\frac{1}{r^2} U(t). \end{aligned}$$



Für den hyperbolischen Fall (am bequemsten im Poincaré-Modell) finden wir $U(t) = 2\pi r \sinh \frac{t}{r}$ und entsprechend

$$U''(t) = +\frac{1}{r^2} U(t).$$

Eine etwas andere Interpretation dieses Phänomens liefert der Blick auf die Radien des Kreises. Im sphärischen Fall divergieren sie langsamer als im Euklidischen Fall, sie sind „zueinander gekrümmt“, im hyperbolischen „auseinander gekrümmt“. Wenn man das für beliebige Riemannsche Mannigfaltigkeiten genauer erfassen will, braucht man die Längenverzerrung der Exponentialabbildung senkrecht zur tangentialen Richtung. Wir berechnen sie:

Wir betrachten das Variationsvektorfeld $Y = dV(\frac{\partial}{\partial \tau})$ zur „radialen Variation“

$$V(t, \tau) := \exp(t(v + \tau w))$$

mit $v, w \in T_p M$. Wir schreiben $Y(t) := Y(t, 0)$. Dann ist also

$$Y(t) = d_{tv} \exp(tw),$$

und wir müßten Y genauer kennen! Zunächst ist

$$\begin{aligned} Y(0) &= 0, \\ \dot{Y}(0) &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \Big|_{(0,0)} dV\left(\frac{\partial}{\partial \tau}\right) = \nabla_{\frac{\partial}{\partial \tau}} \Big|_{(0,0)} dV\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \\ &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial \tau}} \Big|_{(0,0)} d_{t(v+\tau w)} \exp(v + \tau w) = \nabla_{\frac{\partial}{\partial \tau}} \Big|_{(0,0)} (v + \tau w) \\ &= w. \end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial \tau}} \frac{\partial V}{\partial t} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial \tau}} \frac{\partial V}{\partial t} - \underbrace{\nabla_{\frac{\partial}{\partial \tau}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial V}{\partial t}}_{=0} - \underbrace{\nabla_{\left[\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \tau}\right]} \frac{\partial V}{\partial t}}_{=0} = R\left(\frac{\partial V}{\partial t}, \frac{\partial V}{\partial \tau}\right) \frac{\partial V}{\partial t}.$$

Einschränkung auf $(t, 0)$ liefert mit $c(t) := V(t, 0)$ und $\nabla_{\frac{\partial}{\partial \tau}} \frac{\partial V}{\partial t} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial V}{\partial \tau}$

$$\dot{Y}(t) = -R(Y, \dot{c})\dot{c}.$$

Vergleichen Sie das mit den obigen Differentialgleichungen für den Kreisumfang.

Die Längenverzerrung von \exp in Richtung orthogonal zu den Radien (aber auch in Richtung der Radien) wird also kontrolliert durch den Krümmungstensor.

Definition 77. Sei $c : J \rightarrow M$ eine Geodätische in der Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) . Ein Vektorfeld $Y : J \rightarrow TM$ längs c heißt ein *Jacobifeld*, wenn

$$\ddot{Y} + R(Y, \dot{c})\dot{c} = 0. \quad (56)$$

Dabei ist $\ddot{Y} := \nabla_D \nabla_D Y$.

Bemerkungen. 1. Die Jacobigleichung ist linear und von zweiter Ordnung, also ist der Raum der Jacobifelder längs c von der Dimension $2 \dim M$.

2. Ist Y ein Jacobifeld längs c , so rechnet man nach, daß auch

$$Y^T := \frac{g(Y, \dot{c})}{g(\dot{c}, \dot{c})} \dot{c}$$

ein (an die Geodätische tangenciales) Jacobifeld ist. Also ist auch $Y^\perp = Y - Y^T$ ein zur Geodätischen normales Jacobifeld. Häufig betrachtet man nur den Raum der zu c normalen Jacobifelder. Die Tangentialkomponente ist immer von der Form $Y^T(t) = (\alpha + t\beta)\dot{c}(t)$, gibt also keine wesentliche Information.

Satz 78 (Differential der Exponentialfunktion). Seien (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und $v, w \in T_p M$, so daß $\exp v$ definiert ist. Dann gilt für $0 \leq t \leq 1$

$$d_{tv} \exp tw = Y(t),$$

wobei Y das Jacobifeld längs $c(t) = \exp(tv)$ mit den Anfangsbedingungen

$$Y(0) = 0, \quad \dot{Y}(0) = w$$

ist.

Wir schließen mit einem Lemma, daß den Begriff der Jacobifelder genauer beleuchtet.

Lemma 79. Seien (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $c : [a, b] \rightarrow M$ eine Geodätische in M .

(i) Ist Y das Variationsvektorfeld einer Variation $V(s, t) =: c_t(s)$, für die alle c_t Geodätische sind, so ist Y ein Jacobifeld.

(ii) Jedes Jacobifeld Y längs einer Geodätischen c kann man wie in (i) erhalten.

Beweis. Zu (i). Den obigen Beweis kann man wörtlich übernehmen.

Zu (ii). Sei Y ein Jacobifeld längs $c : [0, b] \rightarrow M$ und $\gamma : [0, \epsilon] \rightarrow M$ eine Geodätische mit $\dot{\gamma}(0) = Y(0)$. Seien weiter X_0, X_1 parallele Vektorfelder längs γ mit $X_0(0) = \dot{c}(0)$ und $X_1(0) = \dot{Y}(0)$. Definiere

$$V(t, \tau) := \exp(t(X_0(\tau) + \tau X_1(\tau))) =: c_\tau(t).$$

Offenbar sind alle c_τ Geodätische und ist $c_0 = c$. Daher ist das Variationsvektorfeld Z von V ein Jacobifeld. Es genügt den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} Z(0) &= \partial_\tau V(0, 0) = \dot{\gamma}(0) = Y(0) \\ \dot{Z}(0) &= \nabla_{\partial_t} \partial_\tau V(0, 0) \\ &= \nabla_{\partial_\tau} \partial_t V(0, 0) \\ &= \nabla_{\partial_\tau} (X_0(\tau) + \tau X_1(\tau))(0, 0) = X_1(0) = \dot{Y}(0). \end{aligned}$$

Daraus folgt $Z = Y$. □

12 Räume konstanter Krümmung

Definition 80. Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension > 1 mit konstanter Schnittkrümmung heißt auch einfach eine *Mannigfaltigkeit konstanter Krümmung* oder ein *Raum konstanter Krümmung*. Vollständige zusammenhängende Mannigfaltigkeiten konstanter Krümmung heißen *Raumformen*.

Lemma 81 (Jacobifelder in Räumen konstanter Krümmung). *In Räumen konstanter Schnittkrümmung K sind die Jacobifelder mit*

$$Y(0) = 0, \quad \dot{Y}(0) \perp \dot{c}(0)$$

längs nach der Bogenlänge parametrisierten Geodätischen $c : s \mapsto \exp sv$, $\|v\| = 1$ von der Form

$$Y(s) = \sin_K s W(s)$$

mit parallelem $W(s)$, $W(0) = \dot{Y}(0)$. Dabei ist

$$\sin_K s = \begin{cases} s & K = 0 \\ \frac{\sin \sqrt{K}s}{\sqrt{K}} & K > 0 \\ \frac{\sinh \sqrt{-K}s}{\sqrt{-K}} & K < 0. \end{cases}$$

Beweis. Es gilt

$$\frac{d^2}{dt^2}(\sin_K) + K \sin_K = 0, \quad \sin_K 0 = 0, \quad \frac{d}{dt} \sin_K(0) = 1.$$

Damit ist

$$g(Y, \dot{c})\dot{c} = \sin_K s g(W, \dot{c}) = \sin_K s g(W(0), \dot{c}(0)) = 0$$

und

$$\ddot{Y} = -KY = -K(g(\dot{c}, \dot{c})Y - g(Y, \dot{c})\dot{c}).$$

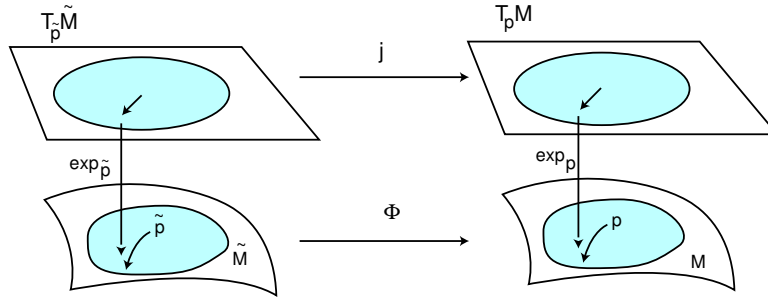
Also ist Y ein Jacobifeld, und aus $Y(0) = 0$ und $\dot{Y}(0) = W(0)$ folgt die Behauptung. \square

Satz 82 (Lokale Klassifikation von Mannigfaltigkeiten konstanter Krümmung). *Je zwei Riemannsche Mannigfaltigkeiten gleicher Dimension und gleicher konstanter Krümmung sind lokal isometrisch. Also ist jede solche lokal isometrisch zu \mathbb{R}^m , $S^m(r)$ oder $H^m(r)$.*

Beweis. Seien $(M, g), (\tilde{M}, \tilde{g})$ gleichdimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeiten gleicher konstanter Schnittkrümmung K . Seien $p \in M, \tilde{p} \in \tilde{M}$, und sei $\epsilon > 0$ so gewählt, daß \exp die offenen Kugeln $W_\epsilon(p)$ und $W_\epsilon(\tilde{p})$ diffeomorph abbildet. Definiere $\exp_p := \exp|_{W_\epsilon(p)}$ und $\exp_{\tilde{p}}$ entsprechend. Wähle eine Isometrie $j : T_{\tilde{p}}\tilde{M} \rightarrow T_p M$. Dann ist

$$\Phi := \exp_p \circ j \circ (\exp_{\tilde{p}})^{-1}$$

ein Diffeomorphismus von $\exp(W_\epsilon(\tilde{p}))$ auf $\exp(W_\epsilon(p))$.



Nach dem Lemma von Gauß ist Φ radial isometrisch.

Sind andererseits $v, w_1, w_2 \in T_p M, w_i \perp v, \|v\| = 1$ und

$$Y_i(t) = \sin_K t W_i(t), \quad W_i' = 0$$

die Jacobifelder längs $\exp(tv)$ mit $Y_i(0) = 0, \dot{Y}_i(0) = w_i$ wie im Lemma, so folgt

$$\begin{aligned} g(d_{tv} \exp t w_1, d_{tv} \exp t w_2) &= g(Y_1(t), Y_2(t)) \\ &= \sin_K^2 t g(W_1(t), W_2(t)) \\ &= \sin_K^2 t g(W_1(0), W_2(0)) \\ &= \sin_K^2 t g(w_1, w_2). \end{aligned}$$

Das ist unabhängig von der Mannigfaltigkeit, und deshalb folgt die Behauptung. \square

Wir wollen nun eine globale Version dieses Satzes beweisen. Dafür brauchen wir ein Lemma, das auch sonst interessant ist. Unter anderem folgt aus ihm, daß die im Beispiel 13 angegebenen Isometrien der Sphäre oder des hyperbolischen Raums tatsächlich die gesamte Isometriegruppe dieser Mannigfaltigkeiten ausschöpfen.

Lemma 83. *Sind $f, g : \tilde{M} \rightarrow M$ zwei Isometrien Riemannscher Mannigfaltigkeiten, ist \tilde{M} zusammenhängend und gibt es $\tilde{p} \in \tilde{M}$ mit*

$$f(\tilde{p}) = g(\tilde{p}), \quad d_{\tilde{p}} f = d_{\tilde{p}} g,$$

so folgt $f = g$.

Beweis des Lemmas. Weil (lokale) Isometrien Geodätische in Geodätische abbilden, gilt für $v \in T_{\tilde{p}} \tilde{M}$ und hinreichend kleine $|t|$:

$$f \circ \exp tv = \exp t d_{\tilde{p}} f(v) = g \circ \exp tv.$$

Folglich ist die Menge $\{\tilde{q} \in \tilde{M} \mid f(\tilde{q}) = g(\tilde{q}) \text{ und } d_{\tilde{q}} f = d_{\tilde{q}} g\}$ offen in \tilde{M} . Sie ist trivialerweise auch abgeschlossen und enthält \tilde{p} . Daher ist sie $= \tilde{M}$. \square

Satz 84 (Einfach-zusammenhängende Raumformen). *Sei (M, g) eine einfach-zusammenhängende Raumform der Schnittkrümmung K . Dann ist (M, g) isometrisch zum Euklidischen oder hyperbolischen Raum oder zur Sphäre der gleichen Schnittkrümmung. Für $K \leq 0$ bildet überdies die Exponentialabbildung jeden Tangentialraum diffeomorph auf die Mannigfaltigkeit ab.*

Beweis. Sei $p \in M$ und $\pi := \exp|_{T_p M} : T_p M \rightarrow M$. Nach dem Lemma 81 sind die Jacobifelder mit $Y(0) = 0, Y'(0) \perp c'(0)$ gegeben durch

$$Y(s) = \sin_K s W(s)$$

mit parallelem $W(s)$.

1. Fall: $K \leq 0$. Dann haben die obigen Jacobifelder auf $]0, \infty[$ keine Nullstellen, und weil $\exp|_{T_p M}$ nach dem Gauß-Lemma radial isometrisch ist, ist die Exponentialabbildung auf $T_p M$ eine Immersion. Für den Euklidischen oder hyperbolischen Raum ist sie bekanntlich sogar ein Diffeomorphismus auf den ganzen Raum. Die Konstruktion aus dem Beweis des letzten Satzes liefert also eine *isometrische* Immersion $\Phi : \tilde{M} \rightarrow M$. Nach Satz 57 ist das eine Riemannsche Überlagerung und nach Satz 59 sogar eine Isometrie. Der letzte Satz der Behauptung folgt damit ebenfalls.

2. Fall: $K > 0$. Dann verschwinden alle Jacobifelder

$$Y(s) = \sin_K s W(s) \text{ mit } \nabla_D W = 0, W \perp \dot{c},$$

das erste Mal wieder bei $s = \epsilon := \frac{\pi}{\sqrt{K}}$. Daher ist $\exp|_{W_\epsilon(p)}$ eine Immersion, aber die Sphäre $S_\epsilon(p)$ vom Radius ϵ im Tangentialraum $T_p M$ wird in einen Punkt abgebildet. Wir schreiben $\exp_p := \exp|_{W_\epsilon(p)}$.

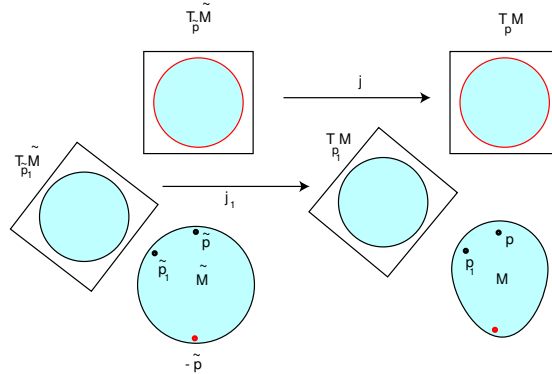
Wir betrachten nun neben (M, g) die Sphäre $(\tilde{M}, \tilde{g}) = S^m(1/\sqrt{K})$ derselben Krümmung und in dieser einen Punkt \tilde{p} . Wir wählen eine lineare Isometrie $j : T_{\tilde{p}} \tilde{M} \rightarrow T_p M$ und definieren

$$\exp_{\tilde{p}} : T_{\tilde{p}} \tilde{M} \supset W_\epsilon(\tilde{p}) \rightarrow \tilde{M}$$

analog. Dann ist

$$\Phi := \exp_p \circ j \circ \exp_{\tilde{p}}^{-1}$$

eine isometrische Immersion von $\tilde{M} \setminus \{-\tilde{p}\}$ auf $\exp_p(W_\epsilon(p)) \subset M$.



Wir wählen nun einen Punkt $\tilde{p}_1 \in \tilde{M} \setminus \{\tilde{p}, -\tilde{p}\}$ und setze $p_1 := \Phi(\tilde{p}_1)$.

Sei $j_1 := d_{\tilde{p}_1} \Phi : T_{\tilde{p}_1} \tilde{M} \rightarrow T_{p_1} M$. Dann erhalten wir wie oben eine isometrische Immersion

$$\Phi_1 := \exp_{p_1} \circ j_1 \circ \exp_{\tilde{p}_1}^{-1}$$

von $\tilde{M} \setminus \{-\tilde{p}_1\}$ auf $\exp_{p_1}(W_\epsilon(p_1)) \subset M$ Es gilt aber

$$d_{\tilde{p}_1} \Phi_1 = d_{\tilde{p}_1} \Phi.$$

Daraus folgt $\Phi_1 = \Phi$ auf $\tilde{M} \setminus \{-\tilde{p}, -\tilde{p}_1\}$. Insbesondere stimmen also Φ_1 und Φ auf einer punktierten Umgebung von $-\tilde{p}$ überein. Mit Φ_1 läßt sich daher auch Φ als isometrische

Immersion in $-\tilde{p}$ fortsetzen. Nach Satz 57 ist Φ eine Riemannsche Überlagerung und nach Satz 59 sogar eine Isometrie. \square

Clifford-Kleinsches Raumformenproblem. Wenn man im vorstehenden Satz die Raumform M nicht als einfach-zusammenhängend voraussetzt, liefert derselbe Beweis eine Riemannsche Überlagerung

$$\pi : \tilde{M} \rightarrow M,$$

wobei \tilde{M} je nach Krümmung K ein Euklidischer oder hyperbolischer Raum oder eine Sphäre ist. Das Problem, alle (zusammenhängenden) Raumformen einer vorgegebenen Krümmung zu bestimmen, ist damit auf das Problem reduziert, welche Mannigfaltigkeiten sich isometrisch von einem der obigen Standardräume überlagern lassen. Das hat zu tun mit der Bestimmung der frei und eigentlich diskontinuierlich operierenden Untergruppen der jeweiligen Isometriegruppe und ist nicht vollständig gelöst.

Einige Resultate:

(Hantzsche-Wendt 1935) Für $m = 3$ und $K = 0$ gibt es bis auf Homöomorphie zehn kompakte und acht nicht-kompakte Raumformen.

(Hopf 1926) Für $m \equiv 0 \pmod{2}$ und $K > 0$ gibt es bis auf Isometrie nur zwei Raumformen, nämlich die Sphäre S^m und den reellen projektiven Raum $\mathbb{R}P^m$ der entsprechenden Krümmung.

(J.A.Wolf 1967) Vollständige Klassifikation bis auf Isometrie für $m \geq 4$ und $K > 0$.

13 Die zweite Variation und der Satz von Jacobi

Für die Frage, ob Geodätische Minima der Länge bei Vergleich mit Nachbarkurven darstellen, ist es naheliegend, nicht nur die 1. Ableitung des Längenfunktionals (vgl. Satz 42), sondern auch die 2. Ableitung zu untersuchen.

Wir betrachten also eine Variation V der Geodätischen c , $\|\dot{c}\| =: r$, und das Längenfunktional

$$L(\tau) := L(c_\tau) = \int_a^b \sqrt{g_{c_\tau(t)}(\dot{c}_\tau(t), \dot{c}_\tau(t))} dt.$$

Wir schreiben zur Abkürzung

$$\partial_t := \frac{\partial}{\partial t}, \quad \partial_\tau := \frac{\partial}{\partial \tau} \quad \text{und} \quad \nabla_t := \nabla_{\partial_t}, \nabla_\tau := \nabla_{\partial_\tau}.$$

Seien $X = \partial_t V$, $Y = \partial_\tau V \in \Gamma(V^*TM)$ und $Y^\perp \in \Gamma(c^*TM)$ die zu \dot{c} orthogonale Komponente von $Y(\cdot, 0)$. Wir erinnern an

$$\nabla_\tau X = \nabla_t Y.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} L'(\tau) &= \int_a^b \partial_\tau \|X\| dt = \int_a^b \frac{1}{2\|X\|} \partial_\tau g(X, X) dt = \int_a^b \frac{1}{\|X\|} g(\nabla_\tau X, X) dt \\ &= \int_a^b \frac{1}{\|X\|} g(\nabla_t Y, X) dt, \end{aligned}$$

wobei der Integrand hier wie im folgenden an der Stelle (t, τ) genommen wird. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} L''(\tau) &= \partial_\tau \int_a^b \frac{1}{\|X\|} g(\nabla_t Y, X) dt \\ &= \int_a^b -\frac{1}{\|X\|^3} g(\nabla_t Y, X)^2 dt + \int_a^b \frac{1}{\|X\|} \partial_\tau g(\nabla_t Y, X) dt \\ &= -\int_a^b \frac{1}{\|X\|^3} g(\nabla_t Y, X)^2 dt + \int_a^b \frac{g(\nabla_\tau \nabla_t Y, X)}{\|X\|} dt + \int_a^b \frac{g(\nabla_t Y, \nabla_\tau X)}{\|X\|} dt \\ &= -\int_a^b \frac{1}{\|X\|^3} g(\nabla_t Y, X)^2 dt + \int_a^b \frac{g(R(Y, X)Y, X)}{\|X\|} dt \\ &\quad + \int_a^b \frac{g(\nabla_t \nabla_\tau Y, X)}{\|X\|} dt + \int_a^b \frac{g(\nabla_t Y, \nabla_\tau X)}{\|X\|} dt. \end{aligned}$$

Für $\tau = 0$ folgt

$$\begin{aligned} L''(0) &= -\frac{1}{r} \int_a^b \frac{1}{r^2} g(\dot{Y}, \dot{c})^2 dt + \frac{1}{r} \int_a^b g(R(Y, \dot{c})Y, \dot{c}) dt + \frac{1}{r} \int_a^b g(\nabla_t \nabla_\tau Y, \dot{c}) dt + \frac{1}{r} \int_a^b g(\dot{Y}, \dot{Y}) dt \\ &= \frac{1}{r} \int_a^b g(\dot{Y}^\perp, \dot{Y}^\perp) dt + \frac{1}{r} \int_a^b g(R(Y, \dot{c})Y, \dot{c}) dt + \frac{1}{r} \int_a^b (\partial_t g(\nabla_\tau Y, X) - \underbrace{g(\nabla_\tau Y, \nabla_t X)}_{=0}) dt. \end{aligned}$$

Weil c Geodätische ist, ist längs c

$$\widehat{Y}^\perp = \nabla_t(Y^\perp) = \nabla_t(Y - \frac{1}{r^2}g(Y, \dot{c})\dot{c}) = \dot{Y} - \frac{1}{r^2}g(\dot{Y}, \dot{c})\dot{c} = \dot{Y}^\perp.$$

Aus den Krümmungsidentitäten folgt

$$g(R(Y, \dot{c})Y, \dot{c}) = -g(R(Y, \dot{c})\dot{c}, Y) = -g(R(Y, \dot{c})\dot{c}, Y^\perp) = -g(R(Y^\perp, \dot{c})\dot{c}, Y^\perp),$$

und wir erhalten:

$$L''(0) = \frac{1}{r} g(\nabla_\tau Y, X) \Big|_{(a,0)}^{(b,0)} + \frac{1}{r} \int_a^b \left(g(\dot{Y}^\perp, \dot{Y}^\perp) - g(R(Y^\perp, \dot{c})\dot{c}, Y^\perp) \right) dt.$$

Für Variationen mit festen Endpunkten verschwinden Y und seine τ -Ableitung an den Endpunkten, und deshalb verschwindet der integralfreie Term und es ist $L'(0) = 0$. Ist überdies die Schnittkrümmung < 0 und Y^\perp nicht trivial, so ist $L''(0) > 0$. In Mannigfaltigkeiten negativer Schnittkrümmung sind Geodätische also stets von minimaler Länge im Vergleich mit „Nachbarkurven“.

Definition 85 (Indexform). Seien (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $c : [a, b] \rightarrow M$ eine Geodätische in M mit $\|\dot{c}\| = r > 0$. Definiere für C^∞ -Vektorfelder Y_1, Y_2 längs $c : [a, b] \rightarrow M$ die *Indexform*

$$I(Y_1, Y_2) := \frac{1}{r} \int_a^b \left(g(\dot{Y}_1, \dot{Y}_2) - g(R(Y_1, \dot{c})\dot{c}, Y_2) \right) dt$$

Das ist offenbar eine symmetrische Bilinearform auf $\Gamma(c^*TM)$. Mit ihr erhalten wir

Satz 86 (Formel von Synge für die 2. Variation). Seien V eine Variation der Geodätischen c , $\|\dot{c}\| =: r > 0$ und

$$L(\tau) := \int_a^b \sqrt{g_{c_\tau(t)}(\dot{c}_\tau(t), \dot{c}_\tau(t))} dt.$$

Seien $X, Y \in \Gamma(V^*TM)$ und $Y^\perp \in \Gamma(c^*TM)$ definiert wie oben. Dann gilt

$$L''(0) = \frac{1}{r} g(\nabla_\tau Y, X) \Big|_{(a,0)}^{(b,0)} + I(Y^\perp, Y^\perp). \quad (57)$$

Gelegentlich ist es nützlich, Variationen (und mit diesen Variationsvektorfelder) zu betrachten, die in t -Richtung nur stückweise- C^∞ sind:

Definition 87. Eine stetige Variation $V(t, \tau)$, $t \in [a, b]$, $\tau \in]-\epsilon, \epsilon[$, einer Kurve $c = V(\cdot, 0)$ heißt *stückweise glatt* oder *stückweise- C^∞* , wenn es eine Zerlegung

$$a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k = b$$

gibt, so daß jedes $V|_{[t_{j-1}, t_j] \times]-\epsilon, \epsilon[}$ eine C^∞ -Abbildung ist. Das Variationsvektorfeld $Y = \partial_\tau V|_{\tau=0}$ ist dann ein stückweise- C^∞ Vektorfeld. Die Indexform definiert man für solche Vektorfelder genauso wie oben.

Statt *stückweise- C^∞* sagt man auch *gebrochen*. Wendet man die Synge-Formel auf jedes $V|_{[t_{j-1}, t_j] \times]-\epsilon, \epsilon[}$ einzeln an und addiert, so findet man:

Satz 88. Satz 86 bleiben richtig für gebrochene Variationen.

Wir schreiben die Indexform noch etwas anders, sodaß man darin den Ausdruck aus der

Jacobigleichung erkennt: Für glatte Y_1, Y_2 findet man

$$\begin{aligned} I(Y_1, Y_2) &= \frac{1}{r} \int_a^b \left(g(\dot{Y}_1, \dot{Y}_2) - g(R(Y_1, \dot{c})\dot{c}, Y_2) \right) dt \\ &= \frac{1}{r} \int_a^b \left(\partial_t g(\dot{Y}_1, Y_2) - g(\ddot{Y}_1, Y_2) - g(R(Y_1, \dot{c})\dot{c}, Y_2) \right) dt \\ &= \frac{1}{r} g(\dot{Y}_1, Y_2)|_a^b - \frac{1}{r} \int_a^b g(\ddot{Y}_1 + R(Y_1, \dot{c})\dot{c}, Y_2) dt. \end{aligned}$$

Für an den Stellen t_i gebrochene Vektorfelder Y_1, Y_2 erhält man entsprechend

$$I(Y_1, Y_2) := \frac{1}{r} \sum_i g(\dot{Y}_1, Y_2)|_{t_{i-1}+0}^{t_i-0} - \frac{1}{r} \int_a^b g(\ddot{Y}_1 + R(Y_1, \dot{c})\dot{c}, Y_2) dt. \quad (58)$$

Definition 89 (Konjugierte Punkte). (i) Sei $c : [a, b] \rightarrow M$ eine nicht-konstante Geodätische. Zwei Parameterwerte $t_0, t_1 \in [a, b]$ heißen *konjugiert längs c* , wenn es ein nicht-verschwindendes Jacobifeld Y längs c gibt, für das $Y(t_0) = 0$ und $Y(t_1) = 0$.⁶

Man nennt dann auch $c(t_0)$ und $c(t_1)$ längs c konjugiert. Ein $t^* \in]a, b]$ oder auch $c(t^*)$ heißt konjugiert, wenn es konjugiert zum Anfangspunkt a ist.

(ii) $v \in T_p M$ heißt zu p *konjugiert*, wenn $\exp v$ definiert und $d_v(\exp|_{T_p M})$ nicht injektiv ist. Das ist genau dann der Fall, wenn 0 und 1 konjugiert längs $t \mapsto \exp tv$ sind.

Satz 90 (Jacobi). Seien $c : [a, b] \rightarrow M$ eine nicht-konstante Geodätische und $t^* \in]a, b[$ zu a konjugiert. Dann gibt es eine gebrochene Variation $V(t, \tau) =: c_\tau(t)$ von c mit festen Endpunkten, so daß $L(c) > L(c_\tau)$ für alle $\tau \neq 0$: Nach dem ersten konjugierten Punkt ist keine Geodätische mehr Kürzeste.

Beweis. Sei Y ein nicht-triviales (normales) Jacobifeld $\neq 0$ mit $Y(0) = 0, Y(t^*) = 0$. Dann ist $\dot{Y}(t^*) \neq 0$, denn sonst wäre $Y = 0$. Wir definieren ein gebrochenes Jacobifeld durch

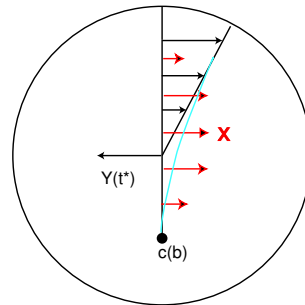
$$\hat{Y}(t) := \begin{cases} Y(t) & \text{für } a \leq t \leq t^* \\ 0 & \text{für } t^* \leq t \leq b. \end{cases}$$

Wir wählen weiter ein differenzierbares normales Vektorfeld X längs c mit

$$X(a) = 0, \quad X(b) = 0 \quad \text{und} \quad g(\dot{Y}(t^*), X(t^*)) < 0.$$

und definieren mit einem kleinen $\epsilon > 0$ ein gebrochenes Vektorfeld

$$Z := \hat{Y} + \epsilon X.$$



Dieses Vektorfeld ist das Variationsvektorfeld einer Variation

$$V(t, \tau) = \exp \tau Z(t)$$

der Geodätischen c mit festen Endpunkten.

⁶Weil die Tangentialkomponente eines Jacobifeldes von der Form $(\alpha + \beta t)\dot{c}(t)$ ist, hat sie nur eine Nullstelle oder sie verschwindet identisch. Also ist ein nicht-triviales Jacobifeld Y mit zwei Nullstellen immer normal (=orthogonal zu \dot{c}).

Für sie gilt nach der Syngformel und (58)

$$\begin{aligned}
 L''(0) &= I(Z, Z) = I(\hat{Y}, \hat{Y}) + \epsilon^2 I(X, X) + 2\epsilon I(\hat{Y}, X) \\
 &= 0 + \epsilon^2 I(X, X) \\
 &\quad + \frac{2}{r} \epsilon \left(g(\dot{Y}(t_-), X(t^*)) - \underbrace{g(\dot{Y}(a_+), X(a))}_{=0} + g(\dot{Y}(b_-), \underbrace{X(b)}_{=0}) - \underbrace{g(\dot{Y}(t_+), X(t^*))}_{=0} \right) \\
 &= \epsilon \left(\frac{2}{r} g(\dot{Y}(t^*), X(t^*)) + \epsilon I(X, X) \right).
 \end{aligned}$$

Für hinreichend kleines $\epsilon > 0$ ist dies negativ, und L hat in 0 ein striktes lokales Maximum. \square

14 Der Satz von Bonnet-Myers

Die Sphäre $S^m(r)$ vom Radius r hat die Schnittkrümmung $K = \frac{1}{r^2}$. Wir betrachten eine nach der Bogenlänge parametrisierte kürzeste Geodätische $c : [0, l] \rightarrow S^m(r)$ zwischen zwei Antipodalpunkten. Dann ist $l = \pi r$, und wenn W ein normales paralleles Einheitsfeld längs c ist, ist

$$Y(t) := \sin \frac{t}{r} W(t) = \sin \frac{\pi t}{l} W(t)$$

ein Jacobifeld längs c , das an den Enden verschwindet, vgl. Lemma 81. Für die 2. Variation des Längenfunktionals mit der Variation $V(\tau, t) = \exp(\tau Y(t))$ finden wir

$$\begin{aligned} L''(0) &= - \int_0^l g(\ddot{Y} + R(Y, \dot{c})\dot{c}, Y) dt \\ &= \int_0^l g\left(\frac{\pi^2}{l^2} W - R(W, \dot{c})\dot{c}, W\right) \sin^2 \frac{\pi t}{l} dt \\ &= \int_0^l \left(\frac{\pi^2}{l^2} - K(\sigma_{\dot{c}W})\right) \sin^2 \frac{\pi t}{l} dt. \end{aligned}$$

Der Klammerausdruck im letzten Integranden ist 0, also $L''(0) = 0$. Aber das wußten wir schon vorher, weil Y ein Jacobifeld ist, also $\ddot{Y} + R(Y, \dot{c})\dot{c} = 0$ gilt. Die Länge der Geodätischen zwischen Antipodalpunkten ist bei der durch Y gegebenen Variation, die ja einfach durch Achsdrehung der Geodätischen geliefert wird, von zweiter Ordnung stationär, in Wirklichkeit sogar konstant.

Jetzt betrachten wir eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodätische der Länge l in einer beliebigen Riemannsche Mannigfaltigkeit und definieren W, Y und V wie oben. Dann ist $L'(0) = 0$, weil c eine Geodätische ist und die Variation feste Endpunkte hat. Wenn für die Schnittkrümmung K (längs der Geodätischen)

$$\frac{\pi^2}{l^2} - K < 0$$

gilt, ist $L''(0) < 0$, d.h. die Geodätische der Länge l ist keine Kürzeste. Das liefert den

Satz 91 (Satz von Bonnet-Myers: 1.Version). Sei (M, g) eine vollständige, zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit, $\dim M \geq 2$. Es gebe $\delta \in \mathbb{R}$, so daß

$$K \geq \delta > 0$$

für die Schnittkrümmungsfunktion K von (M, g) . Dann ist M kompakt und

$$\text{diam}(M) := \sup\{d(p, q); p, q \in M\} \leq \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}.$$

Beweis. Nach dem Satz von Hopf-Rinow gibt es zwischen je zwei Punkten eine kürzeste Geodätische. Hätte diese Länge $l > \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}$, so wäre

$$K \geq \delta > \frac{\pi^2}{l^2},$$

also die Geodätische keine Kürzeste. Daher ist $\text{diam}(M) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}$. Insbesondere ist M also beschränkt und natürlich abgeschlossen, also nach dem Satz von Hopf-Rinow kompakt. \square

Für eine kürzeste Geodätische der Länge l in einer beliebigen Riemannsche Mannigfaltigkeit ist also

$$0 \leq L''(0) = \int_0^l \left(\frac{\pi^2}{l^2} - K(\sigma_{\dot{c}W}) \right) \sin^2 \frac{\pi t}{l} dt.$$

Sind W_2, \dots, W_m parallele Einheitsvektorfelder orthogonal zu \dot{c} , so folgt durch Anwendung auf jedes einzelne und Summation

$$0 \leq \int_0^l \left(\frac{\pi^2}{l^2} - \frac{1}{m-1} \sum_{j=2}^m K(\sigma_{\dot{c}W_j}) \right) \sin^2 \frac{\pi t}{l} dt.$$

Ist also der Mittelwert

$$\frac{1}{m-1} \sum_{j=2}^m K(\sigma_{\dot{c}W_j}) \geq \delta > 0,$$

so gilt $l \leq \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}$ und es folgt ebenfalls die Behauptung des Satzes von Bonnet-Myers. Das führt zum Begriff der Riccikrümmung.

Definition 92. Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit.

(i) Für $p \in M$ und $X \in T_p M$ definiere

$$\text{Ric } X := \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m R(X, E_i) E_i.$$

Dabei seien E_1, \dots, E_m eine Orthonormalbasis von $T_p M$. Die Definition ist unabhängig von der Wahl der E_i , vgl. nachstehende Bemerkung. Sie liefert ein Tensorfeld vom Typ $(1, 1)$, den sogenannten *Ricci-tensor*.⁷ Aus den Krümmungsidentitäten folgt die Selbstadjungiertheit von Ric:

$$g(\text{Ric } X, Y) = g(X, \text{Ric } Y).$$

(ii) Weiter definiert man die symmetrische Bilinearform

$$\text{ric}(X, Y) := g(\text{Ric } X, Y).$$

Der Wert $\text{ric}(X, X)$ heißt auch die *Riccikrümmung* auf X .

Zum besseren Verständnis von Ric und ric.

1. Ric ist durch ric eindeutig bestimmt.
2. ric als symmetrische Bilinearform ist vollständig bestimmt durch die quadratische Form $\text{ric}(X, X)$. Es gilt

$$\begin{aligned} \text{ric}(X, X) &= \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m g(R(X, E_i) E_i, X) \\ &= \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m g(R(E_i, X) X, E_i) = \frac{1}{m-1} \text{Spur } R(\cdot, X) X. \end{aligned}$$

Damit sind ric und Ric unabhängig von der gewählten ON-Basis.

⁷Den Grund für die Normierung mit $m-1$ statt mit m erklären wir unten.

3. Insbesondere kann man E_1 in Richtung X wählen. Dann ist $R(E_1, X)X = 0$, und wenn $\|X\| = 1$ ist, folgt

$$\operatorname{ric}(X, X) = \frac{1}{m-1} \sum_{i=2}^m K(\sigma_{X, E_i}). \quad (59)$$

Also ist $\operatorname{ric}(X, X)$ das Mittel der Schnittkrümmungen auf $m-1$ zueinander orthogonalen Ebenen durch X . Das ist der Grund für die Normierung mit $m-1$. In Räumen konstanter Krümmung K wird

$$\operatorname{Ric} = K \operatorname{Id}.$$

4. Die Mittelung über die Schnittkrümmungen kann man auch kontinuierlich verstehen:

Lemma 93. *Sei A ein selbstadjungierter Endomorphismus des \mathbb{R}^n . Dann ist*

$$\frac{1}{n} \operatorname{Spur} A = \frac{1}{\operatorname{vol}(S^{n-1})} \int_{S^{n-1}} \langle Ax, x \rangle d\sigma_{S^{n-1}}.$$

Beweis. Wir schreiben $A = \sum \lambda_i P_i$, wobei die λ_i die Eigenwerte und die P_i die Orthogonalprojektionen auf die Eigenräume sind. Dann ist

$$\begin{aligned} \int_{S^{n-1}} \langle Ax, x \rangle d\sigma_{S^{n-1}} &= \sum \lambda_i \int \langle P_i x, x \rangle d\sigma_{S^{n-1}} \\ &= \sum \lambda_i \frac{1}{n} \int (\langle P_1 x, x \rangle + \dots + \langle P_n x, x \rangle) d\sigma_{S^{n-1}} \\ &= \frac{1}{n} (\operatorname{Spur} A) \operatorname{vol}(S^{n-1}). \end{aligned}$$

□

Mit (59) erhalten wir

Satz 94 (Satz von Bonnet-Myers: 2. Version). *Sei (M, g) eine vollständige, zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension ≥ 2 . Es gebe $\delta > 0$, so daß*

$$\operatorname{ric}(X, X) \geq \delta \|X\|^2$$

für alle $X \in TM$. Dann ist M kompakt und

$$\operatorname{diam}(M) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}.$$

15 Der Satz von Synge

Satz 95 (Lemma von Synge). Sei (M, g) eine orientierbare Riemannsche Mannigfaltigkeit gerader Dimension mit positiver Schnittkrümmung $K > 0$. Sei $c : [0, L] \rightarrow M$ eine glatt-geschlossene Geodätische der Länge $L(c) = L > 0$. Dann gibt es eine Variation $V(t, \tau) = c_\tau(t)$ von c , so daß alle Nachbarkurven $c_\tau, \tau \neq 0$ glatt geschlossen und kürzer als L sind.

Beweis. Die Parallelverschiebung von Vektoren $X \in T_{c(0)}M$ mit $X \perp c'(0)$ längs c liefert eine orthogonale Abbildung Φ von $T_{c(0)}M$ auf $T_{c(L)}M = T_{c(0)}M$. Eine Orientierung von M liefert eine solche von $T_{c(0)}M$, und Φ ist orientierungstreu. Daher besitzt Φ einen Eigenvektor zum Eigenwert $+1$, d.h. einen Fixvektor $\neq 0$. Sei X das durch Parallelverschiebung dieses Vektors erhaltene Vektorfeld. Beachte, daß X glatt geschlossen ist. Dann ist

$$V(s, t) := \exp(tX(s))$$

eine Variation von c , und für die 2. Ableitung des Längenfunctionals gilt nach der Formel von Synge

$$L''(0) = I(X, X),$$

der Integralfreie Term fällt wegen der Geschlossenheit der Geodätischen weg. Also haben wir

$$L''(0) = -\frac{1}{r} \int_0^L g(R(X, c')c', X) ds = -\frac{1}{r} \int_0^L K \|X\|^2 ds < 0.$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Satz 96 (Satz von Synge). Eine zusammenhängende, kompakte, orientierbare Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) gerader Dimension mit positiver Schnittkrümmung $K > 0$ ist einfach-zusammenhängend.

Der Beweis ist eine einfache Konsequenz aus dem Lemma von Synge und dem nachstehenden Lemma. Zunächst die folgende

Definition 97. Zwei geschlossene Kurven $c_0, c_1 : [a, b] \rightarrow M$ heißen (in M) *frei homotop*, wenn es eine Abbildung $H : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow M$ gibt, so daß gilt

$$H(t, 0) = c_0(t), \quad H(t, 1) = c_1(t) \quad \text{für alle } t, \tag{60}$$

$$H(a, \tau) = H(b, \tau) \quad \text{für alle } \tau. \tag{61}$$

Freie Homotopie ist eine Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklassen heißen *freie Homotopie-klassen*.

Bemerkung. Diese Definition macht Sinn für einen beliebigen topologischen Raum M und stetige Abbildungen c_i bzw. H . Ist M eine Mannigfaltigkeit, so gibt es in jeder freien Homotopieklasse eine geschlossene C^∞ -Kurve, und je zwei solche sind durch eine C^∞ -Homotopie verbunden. Man kann sich dann also auf „glatte Homotopieklassen“ beschränken.

Lemma 98. Sei (M, g) eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann gibt es in jeder freien Homotopieklasse eine glatt-geschlossene Geodätische, die die Länge in der Homotopieklasse minimiert.

Beweis. Kurven seien im folgenden stückweise C^∞ .

Weil M kompakt ist, gibt es eine endliche offene Überdeckung (U_k) von M durch geodätisch-konvexe offene Mengen. Weiter gibt es nach dem Lemma von Lebesgue ein $\epsilon > 0$, so daß jede Menge vom Durchmesser $< 3\epsilon$, insbesondere also jede Kurve der Länge $< 3\epsilon$, in einem der U_k enthalten ist.

Definition. Eine geschlossene Kurve $c : [0, 1] \rightarrow M$ heißt *speziell*, wenn eine Zerlegung

$$0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_N = 1$$

mit folgender Eigenschaft existiert:

Für alle j ist $c|_{[t_{j-1}, t_j]}$ eine kürzeste Geodätische zwischen $c(t_{j-1})$ und $c(t_j)$ von der Länge $< \epsilon$.

1. Schritt: Zu jeder geschlossenen Kurve $c : [0, 1] \rightarrow M$ gibt es eine homotope spezielle Kurve, deren Länge nicht größer ist.

Beweis: Wähle eine Zerlegung

$$0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_N = 1,$$

so daß $L(c|_{[t_{j-1}, t_j]}) < \epsilon$ für alle j . Dann ist $c|_{[t_{j-1}, t_j]}$ eine Kurve in einer der geodätisch-konvexen Mengen U_k und läßt sich deshalb homotop deformieren in die kürzeste Geodätische von $c(t_{j-1})$ nach $c(t_j)$. Auf diese Weise erhält man eine zu c homotope und nicht längere geschlossene Kurve.

2. Schritt: Sei α eine freie Homotopieklasse und l das Infimum der Längen von Kurven in α . Dann gibt es eine Folge geschlossener Kurven c_i in α , deren Längen gegen l konvergieren, und die sämtlich speziell sind (1. Schritt). Wir können weiter annehmen, daß keine dieser Kurven länger als $2l$ ist.

3. Schritt: Man kann die Folge der c_i so wählen, daß sie sämtlich dieselbe Anzahl N von Teilpunkten

$$0 = t_0^i \leq t_1^i \leq \dots \leq t_N^i = 1$$

haben.

Beweis: Wir betrachten eine spezielle Kurve $c = c_i$ mit einer Zerlegung

$$0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_N = 1.$$

Wir betrachten folgende Teilkurven:

$$\gamma_r := c|_{[t_{2r}, t_{2r+2}]}, \quad r = 0, \dots, \left[\frac{N}{2}\right] - 1.$$

Hat jede dieser Kurven eine Länge $\geq \epsilon$, so ist

$$2l \geq L(c) \geq \sum L(\gamma_r) \geq \left[\frac{N}{2}\right]\epsilon,$$

i.e.

$$N \leq 2\left(\frac{2l}{\epsilon} + 1\right).$$

Das bedeutet aber: Ist umgekehrt $N > N_0 := \left[2\left(\frac{2l}{\epsilon} + 1\right)\right]$, so ist wenigstens ein γ_r kürzer als ϵ und damit in einem U_k enthalten. Also kann man γ_r homotop ersetzen durch die kürzeste Geodätische von $\gamma_r(2r)$ nach $\gamma_r(2r+2)$ und hat c durch eine homotope spezielle Kurve ersetzt, die einen Teilpunkt weniger hat. Man kann daher annehmen, daß kein c_i mehr als N_0 Teilpunkte hat. Weil man aber beliebig Teilpunkte einfügen kann, kann man sogar annehmen, daß alle c_i genau N_0 Teilpunkte haben.

4. Schritt: Nach Wahl einer Teilfolge der c_i können wir annehmen, daß für alle $j \in \{1, \dots, N\}$ der Grenzwert

$$p_j = \lim_i c_i(t_j^i)$$

existiert. Die kürzesten Geodätischen zwischen diesen Grenzpunkten bilden eine geschlossene Kurve c der Länge l .

Beweis:

$$\begin{aligned} L(c) &= \sum d(p_j, p_{j+1}) \\ &= \sum d(\lim_i c_i(t_j^i), \lim_i c_i(t_{j+1}^i)) \\ &= \sum \lim_i d(c_i(t_j^i), c_i(t_{j+1}^i)) \\ &= \sum \lim_i L(c_i|_{[t_j^i, t_{j+1}^i]}) \\ &= \lim_i L(c_i) \\ &= l. \end{aligned}$$

5. Schritt: Es gibt ein i_0 , so daß für alle $i \geq i_0$ und alle $j \in \{0, \dots, N\}$

$$d(p_j, c_i(t_j^i)) < \epsilon.$$

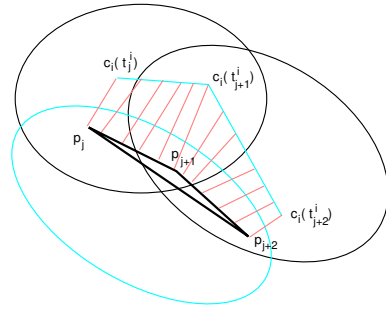
Wir wählen $i = i_0$. Dann ist

$$d(p_j, c_i(t_{j+1}^i)) < 2\epsilon$$

und weil $d(p_j, p_{j+1}) \leq \epsilon$, liegen die 4 Punkte

$$p_j, p_{j+1}, c_i(t_j^i), c_i(t_{j+1}^i)$$

in einem geodätisch konvexen U_k . Daher läßt sich c homotop in c_i deformieren und liegt also in α . Schließlich liegen p_i und p_{i+2} in einem U_k . Die Kürzeste zwischen diesen Punkten liegt dann auch in U_k und ist deshalb homotop zu dem Bogen von c der p_i und p_{i+2} verbindet. Weil $L(c)$ aber minimal in der Klasse α ist, fallen diese beiden Verbindungen von p_i nach p_{i+2} zusammen und c hat – im Gegensatz zum nebenstehenden Bild – in p_{j+1} keinen Knick.



□

16 Der Satz von Hadamard-Cartan

Sei Y ein nicht-triviales normales Jacobifeld längs der nicht-konstanten Geodätischen c mit $Y(0) = 0$. Dann gilt für die Funktion $f(t) := \frac{1}{2}g(Y(t), Y(t))$

$$\begin{aligned} \dot{f} &= g(\dot{Y}, Y), \\ \ddot{f} &= g(\dot{Y}, \dot{Y}) + g(\ddot{Y}, Y) = g(\dot{Y}, \dot{Y}) - g(R(Y, \dot{c})\dot{c}, Y). \end{aligned}$$

Ist die Schnittkrümmung von M nicht positiv, so ist f also konvex mit $f(0) = f'(0) = 0$. Insbesondere hat f keine Nullstellen außer 0 und wir erhalten das

Lemma 99. *Geodätische in Riemannschen Mannigfaltigkeiten nicht-positiver Schnittkrümmung besitzen keine konjugierten Punkte.*

Satz 100 (Hadamard-Cartan). *Sei M eine vollständige, zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit nicht-positiver Schnittkrümmung. Dann ist für jedes $p \in M$*

$$\exp : T_p M \rightarrow M$$

eine Überlagerungsabbildung. Ist M also einfach zusammenhängend, so ist $\exp : T_p M \rightarrow M$ ein Diffeomorphismus.

Beweis. Nach dem Lemma und Satz 78 ist $\exp : T_p M \rightarrow M$ ein lokaler Diffeomorphismus. Mit $\exp^* g$ wird $T_p M$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und \exp eine lokale Isometrie. Die kanonisch parametrisierten Geraden durch 0 in $T_p M$ werden auf Geodätische in M abgebildet, sind also Geodätische in $T_p M$ bezüglich der zurückgeholten Metrik. Also ist $T_p M$ mit dieser Metrik vollständig. Aus dem Satz 57 über Riemannsche Überlagerungen folgt die Behauptung.

□

17 Riemannsche Submersionen

Definition 101. Sei $\pi : (\tilde{M}, \tilde{g}) \rightarrow (M, g)$ eine Submersion von Riemannschen Mannigfaltigkeiten.

(i) Für $p \in M$ ist

$$\tilde{M}_p := \pi^{-1}(\{p\}) \subset \tilde{M}$$

eine Untermannigfaltigkeit der Dimension $\dim \tilde{M} - \dim M$, die *Faser* über p .

(ii) Für $\tilde{p} \in \tilde{M}$ definiere

$$\begin{aligned} V_{\tilde{p}}\pi &:= T_{\tilde{p}}\tilde{M}_{\pi(\tilde{p})} = \ker d_{\tilde{p}}\pi \\ H_{\tilde{p}}\pi &:= (T_{\tilde{p}}\tilde{M}_{\pi(\tilde{p})})^\perp \end{aligned}$$

$V_{\tilde{p}}\pi$ und $H_{\tilde{p}}\pi$ heißen der *Vertikalraum* bzw. der *Horizontalraum* von π . Es ist

$$T_{\tilde{p}}\tilde{M} = V_{\tilde{p}}\pi \oplus H_{\tilde{p}}\pi,$$

und wir bezeichnen mit $X = X^v + X^h$ die entsprechende Zerlegung. Ein Tangentialvektor $\tilde{v} \in V_{\tilde{p}}\pi$ bzw. $\tilde{v} \in H_{\tilde{p}}\pi$ heißt *vertikal* bzw. *horizontal*. Auf die offensichtliche Weise definiert man die Begriffe *horizontales Vektorfeld*, *horizontale Kurve* etc.

(iii) π heißt eine *Riemannsche Submersion*, wenn für alle $\tilde{p} \in \tilde{M}$

$$d_{\tilde{p}}\pi|_{H_{\tilde{p}}\tilde{M}} : H_{\tilde{p}}\tilde{M} \rightarrow T_{\pi(\tilde{p})}M$$

eine lineare Isometrie ist.

Sei im folgenden $\pi : (\tilde{M}, \tilde{g}) \rightarrow (M, g)$ eine Riemannsche Submersion.

Lemma 102. (i) Ein Vektorfeld X auf M besitzt einen eindeutigen horizontalen Lift, d.h. es gibt genau ein Vektorfeld \tilde{X} auf \tilde{M} , welches horizontal ist, und für welches $d\pi(\tilde{X}) = X \circ \pi$ gilt.

(ii) Eine reguläre Kurve $c : J \rightarrow M$ besitzt zu gegebenem $t_0 \in J$ und $\tilde{p} \in \tilde{M}_{c(t_0)}$, einen eindeutigen horizontalen Lift von \tilde{c} mit Anfangswert \tilde{p} . D.h. es gibt eine eindeutig bestimmte horizontale Kurve $\tilde{c} : J \rightarrow \tilde{M}$ mit $\tilde{c}(t_0) = \tilde{p}$ und $\pi \circ \tilde{c} = c$.

Beweis.

Zu (i). Trivial.

Zu (ii). Es genügt zu zeigen, daß es auf einer hinreichend kleinen Umgebung von t_0 einen eindeutig bestimmten horizontalen Lift mit Anfangswert \tilde{p} gibt. Mit einem Zusammenhangsargument folgt dann die globale Aussage.

Nach dem Rangsatz können wir J erforderlichenfalls durch ein kleineres Intervall (wieder J genannt) um den Punkt t_0 ersetzen, so daß $N := c(J)$ eine Untermannigfaltigkeit von M ist, auf der \dot{c} ein Vektorfeld X mit $X \circ c = \dot{c}$ definiert. Wegen der Submersionseigenschaft von π ist $\tilde{N} := \pi^{-1}(N)$ eine Untermannigfaltigkeit von \tilde{M} , und $\pi|_{\tilde{N}} : \tilde{N} \rightarrow N$ ist eine Riemannsche Submersion. Die Integralkurve \tilde{c} mit $\tilde{c}(t_0) = \tilde{p}$ des horizontalen Lifts \tilde{X} von X in \tilde{N} mit ist eine horizontale Kurve. Für sie gilt

$$\frac{d}{dt}(\pi \circ \tilde{c}) = d\pi(\dot{\tilde{c}}) = X_{\pi \circ \tilde{c}}.$$

Damit sind c und $\pi \circ \tilde{c}$ Integralkurven von X mit $\pi \circ \tilde{c}(t_0) = c(t_0)$. Daher gilt $\pi \circ \tilde{c} = c$. Die Eindeutigkeit von \tilde{c} folgt daraus, daß \tilde{c} offenbar eine Integralkurve von \tilde{X} sein muß und Integralkurven durch den Anfangspunkt eindeutig bestimmt sind. \square

Lemma 103. (i) π erhält die Länge von horizontalen Kurven und verkürzt die Länge anderer Kurven.

(ii) Ist $c : J \rightarrow M$ eine Geodätische, so ist ein horizontaler Lift von c ebenfalls eine Geodätische.

(iii) Ist $\tilde{c} : J \rightarrow \tilde{M}$ eine Geodätische mit horizontalem $\dot{\tilde{c}}(t_0)$, so ist \tilde{c} horizontal, und $\pi \circ \tilde{c}$ ist eine Geodätische in M .

(iv) Ist (\tilde{M}, \tilde{g}) vollständig, so auch (M, g) , falls M zusammenhängend.

Beweis. Zu (i). Folgt aus

$$\|d\pi(X)\|^2 = \|d\pi(X^v + X^h)\|^2 = \|d\pi(X^h)\|^2 = \|X^h\|^2 \leq \|X\|^2.$$

Zu (ii). Sei \tilde{c} ein horizontaler Lift von c . Weil c lokal Kürzeste ist, ist nach (i) auch \tilde{c} lokal Kürzeste. Außerdem ist \tilde{c} mit konstanter Geschwindigkeit parametrisiert, weil dasselbe für c gilt. Daher ist \tilde{c} Geodätische.

Zu (iii). Sei o.E. $\dot{\tilde{c}}(t_0) \neq 0$. Sei c die Geodätische mit $\dot{c}(t_0) = d\pi(\dot{\tilde{c}}(t_0))$. Dann ist c nicht konstant und der horizontale Lift von c durch t_0 mit Anfangswert $\tilde{c}(0)$ eine Geodätische mit demselben Anfangspunkt wie \tilde{c} . Aber der horizontale Lift von $\dot{c}(t_0)$ ist $\dot{\tilde{c}}(t_0)$. Also hat der horizontale Lift von c auch denselben Anfangsvektor wie \tilde{c} . Daher ist \tilde{c} der horizontale Lift von c und $c = \pi \circ \tilde{c}$.

Zu (iv). Trivial nach (iii) und dem Satz von Hopf-Rinow. \square

Lemma 104. Seien X, Y Vektorfelder auf M mit horizontalen Lifts \tilde{X}, \tilde{Y} und W ein vertikales Vektorfeld auf M . Dann gilt:

$$[\tilde{X}, \tilde{Y}]^h = \widetilde{[X, Y]}, \quad (62)$$

$$[W, \tilde{X}] = [W, \tilde{X}]^v, \quad (63)$$

$$\tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y} = \widetilde{\nabla_X Y} + \frac{1}{2}[\tilde{X}, \tilde{Y}]^v, \quad (64)$$

$$\tilde{g}(\tilde{\nabla}_W \tilde{X}, \tilde{Y}) = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\tilde{X}} W, \tilde{Y}) = -\frac{1}{2}\tilde{g}(W, [\tilde{X}, \tilde{Y}]). \quad (65)$$

Beweis. Zu (62). Die Vektorfelder \tilde{X}, \tilde{Y} und die Vektorfelder X, Y sind π -verwandt:

$$d\pi(\tilde{X}) = X \circ \pi, \quad d\pi(\tilde{Y}) = Y \circ \pi.$$

Daher gilt

$$d\pi([\tilde{X}, \tilde{Y}]) = [X, Y] \circ \pi.$$

Also ist $[\tilde{X}, \tilde{Y}]^h = \widetilde{[X, Y]}$ und es folgt (62).

Zu (63). Die Vektorfelder W, \tilde{X} und die Vektorfelder $0, X$ sind π -verwandt. Daher ist

$$d\pi([W, \tilde{X}]) = [0, X] \circ \pi = 0.$$

Also ist $[W, \tilde{X}]$ vertikal.

Zu (64). Die Levi-Civita-Formel liefert für ein beliebiges Vektorfeld $U \in \Gamma(T\tilde{M})$

$$2\tilde{g}(U, \tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y}) = \tilde{X}\tilde{g}(U, \tilde{Y}) + \tilde{Y}\tilde{g}(U, \tilde{X}) - U\tilde{g}(\tilde{X}, \tilde{Y}) \\ + \tilde{g}(\tilde{X}, [U, \tilde{Y}]) + \tilde{g}(\tilde{Y}, [U, \tilde{X}]) - \tilde{g}(U, [\tilde{Y}, \tilde{X}]).$$

Wir betrachten zunächst den Fall eines horizontalen $U = \tilde{Z}$. Dann ist

$$\tilde{X}\tilde{g}(U, \tilde{Y}) = \tilde{X}\tilde{g}(\tilde{Z}, \tilde{Y}) = \tilde{X}(g(Z, Y) \circ \pi) = Xg(Z, Y)$$

und

$$\tilde{g}(\tilde{X}, [U, \tilde{Y}]) = \tilde{g}(\tilde{X}, [U, \tilde{Y}]^h) = \tilde{g}(\tilde{X}, \widetilde{[Z, Y]}) = g(X, [Z, Y])$$

und entsprechend für die anderen Terme. Also folgt

$$2\tilde{g}(U, \tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y}) = 2g(Z, \nabla_X Y) = 2\tilde{g}(U, \widetilde{\nabla_X Y}).$$

Für vertikales U verschwinden offenbar die beiden ersten Terme der Levi-Civita-Formel. Der dritte ist ebenfalls 0, weil $\tilde{g}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = g(X, Y) \circ \pi$ in vertikaler Richtung konstant ist. Nach (63) verschwinden die beiden nächsten Terme der Levi-Civita-Formel, und es bleibt nur der letzte:

$$2\tilde{g}(U, \tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y}) = -\tilde{g}(U, [\tilde{Y}, \tilde{X}]) = \tilde{g}(U, -[\tilde{Y}, \tilde{X}]^v).$$

Der Vertikalanteil von $\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y}$ ist also $\frac{1}{2}[\tilde{X}, \tilde{Y}]^v$.

Zu (65). Es gilt

$$\tilde{g}(\tilde{\nabla}_W \tilde{X}, \tilde{Y}) = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\tilde{X}} W, \tilde{Y}) + \underbrace{\tilde{g}([W, \tilde{X}], \tilde{Y})}_{=0} = -\tilde{g}(W, \tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y}) = -\frac{1}{2}\tilde{g}(W, [\tilde{X}, \tilde{Y}]).$$

□

Satz 105 (O’Neill). Seien $\pi : (\tilde{M}, \tilde{g}) \rightarrow (M, g)$ eine Riemannsche Submersion und X, Y orthonormale Vektorfelder auf M . Dann gilt für die Schnittkrümmungen

$$K(\sigma_{XY}) = \tilde{K}(\sigma_{\tilde{X}\tilde{Y}}) + \frac{3}{4}\|[\tilde{X}, \tilde{Y}]^v\|^2.$$

„Der Basisraum einer Riemannschen Submersion hat größere Krümmung als der Totalraum.“

Bemerkung: Die obige Formel suggeriert, daß der Ausdruck $[\tilde{X}, \tilde{Y}]^v$ tensoriell ist. Das kann man leicht bestätigen.

Beweis. Es gilt

$$\tilde{g}(\tilde{R}(\tilde{X}, \tilde{Y})\tilde{Y}, \tilde{X}) = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{\nabla}_{\tilde{Y}}\tilde{Y}, \tilde{X}) - \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\tilde{Y}}\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y}, \tilde{X}) - \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{[\tilde{X}, \tilde{Y}]} \tilde{Y}, \tilde{X}).$$

Der zweite Term rechts liefert

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\tilde{Y}}\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y}, \tilde{X}) &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\tilde{Y}}((\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y})^h + (\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y})^v), \tilde{X}) \\
&= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\tilde{Y}}(\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y})^h, \tilde{X}) + \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\tilde{Y}}(\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y})^v, \tilde{X}) \\
&= g(\nabla_Y\nabla_X Y, X) + \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\tilde{Y}}(\frac{1}{2}[\tilde{X}, \tilde{Y}]^v), \tilde{X}) \\
&= g(\nabla_Y\nabla_X Y, X) - \frac{1}{2}\tilde{g}([\tilde{X}, \tilde{Y}]^v, \tilde{\nabla}_{\tilde{Y}}\tilde{X}). \\
&= g(\nabla_Y\nabla_X Y, X) - \frac{1}{4}\tilde{g}([\tilde{X}, \tilde{Y}]^v, [\tilde{Y}, \tilde{X}]^v). \\
&= g(\nabla_Y\nabla_X Y, X) + \frac{1}{4}\tilde{g}([\tilde{X}, \tilde{Y}]^v, [\tilde{X}, \tilde{Y}]^v).
\end{aligned}$$

Der erste Term liefert mit der gleichen Rechnung

$$\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{\nabla}_{\tilde{Y}}\tilde{Y}, \tilde{X}) = g(\nabla_X\nabla_Y Y, X),$$

weil $[\tilde{Y}, \tilde{Y}] = 0$.

Der dritte Term ist

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{[\tilde{X}, \tilde{Y}]} \tilde{Y}, \tilde{X}) &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{([\tilde{X}, \tilde{Y}]^h + [\tilde{X}, \tilde{Y}]^v)} \tilde{Y}, \tilde{X}) \\
&= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{[\tilde{X}, \tilde{Y}]^h} \tilde{Y}, \tilde{X}) + \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{[\tilde{X}, \tilde{Y}]^v} \tilde{Y}, \tilde{X}) \\
&= g(\nabla_{[X, Y]} Y, X) - \frac{1}{2}\tilde{g}([\tilde{X}, \tilde{Y}]^v, [\tilde{Y}, \tilde{X}]^v) \\
&= g(\nabla_{[X, Y]} Y, X) + \frac{1}{2}\tilde{g}([\tilde{X}, \tilde{Y}]^v, [\tilde{X}, \tilde{Y}]^v).
\end{aligned}$$

□

Beispiel 106. Sei G eine Liegruppe mit biinvarianter Metrik und $H \subset G$ eine abgeschlossene Untergruppe. Dann hat G/H eine kanonische Mannigfaltigkeitsstruktur, die die kanonische Projektion $\pi : G \rightarrow G/H$ zu einer Submersion macht. Weil die Rechtstranslationen Isometrien sind, besitzt G/H eine eindeutig bestimmte Riemannsche Metrik, so daß π eine Riemannsche Submersion wird. Solche Quotienten heißen *normale homogene Räume*. Sie sind tatsächlich homogen in dem Sinne, daß die Linkstranslationen von G Isometrien von G/H induzieren, die transitiv auf G/H operieren.

Wir betrachten konkret den Fall $G = S^3$ der Quaternionen vom Betrag 1 und

$$H = G \cap (\mathbb{R} + i\mathbb{R}).$$

Dann ist H genau die Isotropiegruppe der Aktion

$$\pi : S^3 \times S^2 \rightarrow S^2, \quad q \mapsto qi q^{-1} = qi\bar{q}.$$

Dabei ist S^2 die Einheitskugel im Raum der imaginären Quaternionen. Die Metrik auf S^3 sei induziert von der Standardmetrik auf $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$:

$$\langle a, b \rangle = \operatorname{Re}(a\bar{b}).$$

Das liefert eine biinvariante Metrik auf $G = S^3$. Deshalb können wir uns im folgenden auf die Faser über i beschränken. Diese ist gegeben durch

$$S_i^3 = \{q \in S^3 \mid qi\bar{q} = i\} = H.$$

Wir finden in $p = 1 \in S^3$:

$$\begin{aligned} T_1 S^3 &= \text{Im } \mathbb{H}, \\ V_1 \pi &= i\mathbb{R}, \\ H_1 \pi &= j\mathbb{R} + k\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Weiter ist

$$d_1 \pi(v) = vi1 + 1i\bar{v} = vi - iv = \begin{cases} 0 & \text{für } v \in V_1 \pi, \\ 2vi & \text{für } v \in H_1 \pi. \end{cases}$$

Für horizontales v ist also bezüglich der von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induzierten Metrik

$$\|d_1 \pi(v)\| = 2\|v\|.$$

Damit π eine Riemannsche Immersion wird, muß man also die Metrik auf S^2 mit dem Faktor $\frac{1}{4}$ multiplizieren. Die Krümmung von S^2 ist dann konstant = 4.

Die Vektorfelder $x \mapsto xj$ und $x \mapsto xk$ sind horizontale Vektorfelder, weil $x \mapsto xi$ vertikal ist:

$$d_q \pi(qi) = qii\bar{q} + qi\bar{i}\bar{q} = 0$$

Wir berechnen die Lieklammer $[xj, xk]$. Es gilt

$$\exp(tkj) = \cos t + \sin t j$$

und

$$[xj, xk]_1 = \frac{d}{dt} \Big|_0 \text{Ad}_{\exp txj} xk = \frac{d}{dt} \Big|_0 (\cos t + \sin t j)k(\cos t - \sin t j) = jk + k(-j) = 2i.$$

Damit ergibt sich für die Schnittkrümmungen aus der O'Neill-Formeln

$$K(TpM) = 1 + \frac{3}{4} \|2i\|^2 = 4,$$

wie für die skalierte Metrik auf S^2 zu erwarten.

□

18 Der komplexe projektive Raum

Die komplexen Geraden im \mathbb{C}^{m+1} bilden den m -dimensionalen komplexen projektiven Raum $\mathbb{C}P^m$. Identifiziert man die Geraden mit den unitären Orthogonalprojektionen vom Rang 1 bezüglich des hermiteschen Skalarprodukts

$$(x, y) := \sum x_i \bar{y}_i,$$

so erhält man $\mathbb{C}P^m$ eingebettet in den Raum der $\text{End}(\mathbb{C}^{m+1})$.⁸ Wir verzichten auf den Nachweis, daß das eine reelle $2m$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit ist.

Betrachten wir auf $\text{End}(\mathbb{C}^{m+1})$ das reelle Skalarprodukt

$$\langle A, B \rangle := \frac{1}{2} \text{Re Spur}_{\mathbb{C}}(AB^*),$$

so erhält dieser Raum und damit $\mathbb{C}P^m$ eine Riemannsche Metrik, die wir jetzt untersuchen wollen. Genauer wollen wir in Anlehnung an den reellen Fall die Geometrie auf dem projektiven Raum mittels der Geometrie auf der Einheitskugel im \mathbb{C}^{m+1} beschreiben. Allerdings ist die Projektion

$$\pi : \mathbb{C}^{m+1} \supset S^{2m+1} \rightarrow \text{End}(\mathbb{C}^{m+1}), \quad x \mapsto \pi(x) := (\cdot, x)x$$

in diesem Fall nicht mehr eine zweiblättrige Überlagerung, weil komplexen Geraden die S^{2m+1} nicht in zwei Punkten sondern in einem Großkreis schneiden: Die Faser von π durch x ist

$$\pi^{-1}(\{\pi(x)\}) = \mathbb{C}x \cap S^{2m+1} = \{e^{i\phi}x \mid \phi \in \mathbb{R}\}.$$

Das Euklidische Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^{m+1} = \mathbb{R}^{2m+2}$ ist gegeben durch

$$\langle x, y \rangle = \text{Re}(x, y) = \frac{1}{2}((x, y) + (y, x)).$$

Das Differential von π . Für $p \in S^{2m+1}$ und

$$v \in T_x S^{2m+1} = \{v \in \mathbb{C}^{m+1} \mid \langle v, x \rangle = 0\}$$

erhalten wir

$$d_x \pi(v) = (\cdot, v)x + (\cdot, x)v$$

Der Kern ist also gegeben durch

$$V_x := \ker d_x \pi = \{v \in T_x S^{2m+1} \mid v \in \mathbb{R}ix\}.$$

Insbesondere ist π vom Rang m und daher eine Submersion.

Der Horizontalraum, ist

$$H_x = \{v \in T_x S^{2m+1} \mid \langle v, ix \rangle = 0\} = \{v \in T_x S^{2m+1} \mid (v, x) = 0\} = \{v \in \mathbb{C}^{m+1} \mid (v, x) = 0\}.$$

Der Horizontalraum wird unter $d\pi$ also isomorph auf den Tangentialraum $T_{\pi(x)}\mathbb{C}P^{2m+1}$ abgebildet und soll uns im folgenden als Modell für diesen Tangentialraum dienen. Wichtig ist die Beobachtung, daß

$$H_x = H_{e^{i\phi}x},$$

so daß der Horizontalraum in allen Punkten einer Faser „derselbe“ ist.

⁸Eigentlich sogar in den der selbstadjungierten Endomorphismen.

Die Metrik auf $\mathbb{C}P^m$. Wir zeigen nun, daß π eine Riemannsche Submersion ist: Für $v, w \in H_x$ gilt

$$\langle d_x \pi(v), d_x \pi(w) \rangle = \langle v, w \rangle.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} 2\langle d_x \pi(v), d_x \pi(w) \rangle &= \operatorname{Re} \operatorname{Spur}[d_x \pi(v) \circ d_x \pi(w)] \\ &= \operatorname{Re} \operatorname{Spur}[(\langle \cdot, v \rangle x + \langle \cdot, x \rangle v) \circ (\langle \cdot, w \rangle x + \langle \cdot, x \rangle w)] \\ &= \operatorname{Re} \operatorname{Spur}[(\langle \cdot, w \rangle x + \langle \cdot, x \rangle w, v)x + (\langle \cdot, w \rangle x + \langle \cdot, x \rangle w, x)v] \\ &= \operatorname{Re} \operatorname{Spur}[(\langle \cdot, x \rangle w, v)x + (\langle \cdot, w \rangle x, x)v] \\ &= \operatorname{Re} \operatorname{Spur}[(\langle \cdot, x \rangle (w, v)x + \langle \cdot, w \rangle (x, x)v)] \\ &= \operatorname{Re} \operatorname{Spur}[(\langle \cdot, x \rangle (w, v)x + \langle \cdot, w \rangle (x, x)v)] \\ &= \operatorname{Re}[(w, v) + \sum (e_i, w)(v, e_i)] \\ &= \operatorname{Re}[(w, v) + (v, w)] \\ &= 2\langle v, w \rangle. \end{aligned}$$

□

(Fast)komplexe Struktur. H_x ist ein komplexer Untervektorraum von \mathbb{C}^{m+1} , und die Multiplikation mit i in diesem Vektorraum induziert auf $T\mathbb{C}P^m$ ein Endomorphismenfeld $J : T\mathbb{C}P^m \rightarrow T\mathbb{C}P^m$. Dafür gilt

$$\nabla J = 0,$$

d.h.

$$\nabla_X(JY) = J\nabla_X Y.$$

Mit J wird jeder Tangentialraum $T_p\mathbb{C}P^m$ ein komplexer Vektorraum, und man schreibt üblicherweise iX statt JX . Damit ist $\mathbb{C}P^m$ eine sogenannte *fastkomplexe* Mannigfaltigkeit. $\mathbb{C}P^m$ ist sogar eine komplexe Mannigfaltigkeit: Es gibt einen Atlas komplexer Karten mit holomorphen Kartenwechseln, aber darauf gehen wir nicht ein.

Beweis. Es gilt

$$\nabla_X(JY) - J\nabla_X(Y) = 0 \iff \widetilde{\nabla_X(JY)} - J\widetilde{\nabla_X(Y)} = 0.$$

Wir bezeichnen mit ∇^0 die Levi-Civita-Ableitung der S^{2m+1} . Dann ist nach Lemma 104

$$\widetilde{\nabla_X(JY)} = \left(\widetilde{\nabla_X(JY)} \right)^h = \left(\nabla_X^0(i\tilde{Y}) \right)^h = \left(i\nabla_X^0 \tilde{Y} \right)^h.$$

Andrerseits ist

$$J\widetilde{\nabla_X(Y)} = i\widetilde{\nabla_X(Y)} = i\left(\nabla_X^0 \tilde{Y} \right)^h.$$

Weil aber H_x invariant unter i ist, folgt die Behauptung. □

Geodätische. Die horizontalen nach der Bogenlänge parametrisierten Geodätischen in S^{2m+1} sind von der Form

$$\tilde{c}(s) = \cos s x + \sin s v$$

mit $v \in H_x$, d.h. $(v, x) = 0$ und $\|v\| = 1$. Sie projizieren sich (doppelt) auf (ebenfalls geschlossene) Geodätische in $\mathbb{C}P^m$ von der Länge π . Das liefert alle Geodätischen in $\mathbb{C}P^m$. Zwei Geodätische aus $\pi(x)$ schneiden sich nach der Länge $\pi/2$, wenn ihre Anfangsvektoren

(bezüglich J) komplex linear abhängig sind. Andernfalls schneiden sie sich nur im Ausgangspunkt. Bis zur Länge $\frac{\pi}{2}$ sind alle Geodätischen deshalb Kürzeste. Der Durchmesser von $\mathbb{C}P^m$ ist $\frac{\pi}{2}$.

Beweis. Seien $v, w \in H_x$ Einheitsvektoren. Wir untersuchen, wann

$$\pi(\cos s x + \sin s v) = \pi(\cos t x + \sin t w),$$

d.h. wann für ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| = 1$ gilt

$$\begin{aligned} \cos s - \lambda \cos t &= 0 \\ \sin s v - \lambda \sin t w &= 0. \end{aligned} \tag{66}$$

1. Fall: $\sin s = 0$. Dann ist (66) äquivalent zu $\sin t = 0, \cos s = \pm \cos t$. Beide Geodätische gehen dann durch $\pi(x)$. Insbesondere schließen sie sich nach der Länge π , und zwar glatt (Geschwindigkeitsvektor ist ebenfalls periodisch). Im weiteren können wir uns daher einschränken auf

$$0 \leq s, t \leq \pi.$$

2. Fall: $\sin s \neq 0$. Dann sind v und w komplex linear abhängig. Im Fall $\lambda = \pm 1$ hat man sogar reelle Abhängigkeit, und die Geodätischen fallen wieder bis auf die Orientierung zusammen. Es bleibt der Fall $\lambda \neq \pm 1$, also $\cos s = 0 = \cos t$, also $s = t = \frac{\pi}{2}$.

□

Projektive Geraden. Für $x \in S^{2m+1}$ und $v \in H_x \setminus \{0\}$ ist $\mathbb{C}x + \mathbb{C}v$ eine komplexe Ebene, die S^{2m+1} in einer Groß- S^3 trifft. Das π -Bild dieser S^3 besteht aus allen Orthogonalprojektionen auf (komplexe) Geraden in $\mathbb{C}x + \mathbb{C}v$, ist also ein $\mathbb{C}P^1 \subset \mathbb{C}P^m$, eine sogenannte (komplexe) projektive Gerade g . Diese ist gleichzeitig das π -Bild aller (horizontalen) Geodätischen aus x mit Anfangsrichtung in $\mathbb{C}v \subset H_x$, also das Bild aller Geodätischen in $\mathbb{C}P^m$ aus $\pi(x)$ mit Anfangsrichtung in $\text{Spann}\{d\pi(v), Jd\pi(v)\} = \mathbb{C}d\pi(v)$. Weil J parallel ist, bleibt $(\dot{c}, J\dot{c})$ eine Basis des Tangentialraums an g längs $c(t) = \exp tv$, d.h. es gilt allgemein: Ist $p \in \mathbb{C}P^m$ ein Punkt einer komplexen Geraden g und $u \in T_p\mathbb{C}P^m$ tangential an g , $u \neq 0$, so ist

$$g = \exp(\mathbb{C}u) = \exp(T_p g).$$

g ist eine sogenannte totalgeodätische Untermannigfaltigkeit. Nach dem vorangehenden Abschnitt ist g eine Kreisscheibe vom Radius $\pi/2$, bei der der Rand zu einem Punkt kontrahiert ist, also eine 2-Sphäre vom Umfang π .

Jacobifelder. Für Euklidisch orthonormale x, v, w mit $(x, v) = (x, w) = 0$ ist

$$c_\tau(t) = \cos t x + \sin t(\cos \tau v + \sin \tau w)$$

eine Variation von $c = c_0$ durch horizontale Geodätische. Das zugehörige Jacobifeld ist $Z(t) = \sin t w$. (Beachte, daß w ein in \mathbb{C}^{m+1} konstantes, an S^{2m+1} tangentiales Vektorfeld längs c ist.) Die horizontale Komponente von Z ist

$$Z(t)^h = \sin t w - \langle \sin t w, ic(t) \rangle ic(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sin 2t ic(t), & \text{falls } w = iv \\ \sin t w, & \text{falls } w \perp \mathbb{C}v. \end{cases}$$

Beweis.

$$c(t) = \cos t x + \sin t v.$$

2. Fall: $(v, w) = 0$.

$$\begin{aligned} Z(t)^h &= \sin t w - \langle \sin t w, ic(t) \rangle ic(t) = \sin t w - \langle \sin t w, i \cos t x + i \sin t v \rangle i(\cos t x + \sin t v) \\ &= \sin t w - \sin^2 t \langle w, iv \rangle i(\cos t x + \sin t v) = \sin t w. \end{aligned}$$

1. Fall: $w = iv$. Dann erhält man wie oben

$$\begin{aligned} Z(t)^h &= \sin t \, iv - \sin^2 t \, i(\cos t \, x + \sin t \, v) = i \sin t (v - \sin t \cos t \, x - \sin^2 t \, v) \\ &= i \sin t \cos t (-\sin t \, x + \cos t \, v) = \sin t \cos t \, i\dot{c}(t). \end{aligned}$$

□

Das Jacobifeld der Variation $\pi \circ c_\tau$ von $\pi \circ c$ ist offenbar $Y = d_c \pi(Z) = d_c \pi(Z^h)$ und $\tilde{Y} = Z^h$. Mit Lemma 104 finden wir $\ddot{Y} = d\pi(\ddot{Z}^h)$, also

$$\ddot{Y} = \begin{cases} -4Y & \text{für } w = iv, \\ -Y & \text{für } w \perp \mathbb{C}v. \end{cases}$$

Krümmungstensor. Für $p \in \mathbb{C}P^m$ und $X \in T_p \mathbb{C}P^m$ sei Π_X die Euklidische Orthogonalprojektion auf $\text{Spann}\{X, JX\} = \mathbb{C}X$. Dann gilt für den Krümmungstensor von $\mathbb{C}P^m$ und $Y \perp X$

$$R(Y, X)X = Y + 3\Pi_X(Y). \quad (67)$$

Insbesondere liegt die Schnittkrümmung zwischen 1 und 4, vgl. die Formel von O'Neill.

Beweis. Nach dem vorigen Absatz und der Jacobigleichung ist

$$\begin{aligned} R(Y, X)X &= \begin{cases} 4Y, & \text{falls } Y = iX \\ Y, & \text{falls } Y \perp \mathbb{C}X \end{cases} \\ &= Y + 3\Pi_X(Y), \quad \text{falls } Y = iX \text{ oder } \perp \mathbb{C}X. \end{aligned}$$

Aus der Linearität beider Seiten folgt die Behauptung dann für alle $Y \perp X$. Damit ist die Schnittkrümmungsfunktion von $\mathbb{C}P^m$ vollständig bestimmt. Damit ist aber auch der Krümmungstensor bestimmt, vgl. Lemma 68. □

19 Vergleich von Jacobifeldern

Wir erinnern daran, daß die normalen Jacobifelder in Räumen konstanter Krümmung κ mit den Anfangsbedingungen $Y(0) = 0, \dot{Y}(0) = w$ gegeben sind durch $Y(s) = \sin_\kappa s W$, wobei W durch Parallelverschiebung von w entsteht, während

$$\sin_\kappa s = \begin{cases} \frac{\sin \sqrt{\kappa} s}{\sqrt{\kappa}} & \text{für } \kappa > 0, \\ s & \text{für } \kappa = 0, \\ \frac{\sinh \sqrt{-\kappa} s}{\sqrt{-\kappa}} & \text{für } \kappa < 0. \end{cases}$$

Satz 107 (Vergleichssatz von Rauch⁹ und Buser/Karcher¹⁰). Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, $c : [0, b[\rightarrow M$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodätische, Y ein normales Jacobifeld längs c mit $Y(0) = 0, \dot{Y}(0) \neq 0$. K bezeichne die Schnittkrümmung von M .

Sei $c_\kappa : [0, b[\rightarrow M_\kappa$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodätische in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit konstanter Krümmung κ und Y_κ ein normales Jacobifeld längs c_κ mit $Y_\kappa(0) = 0, \|\dot{Y}_\kappa(0)\| = \|\dot{Y}(0)\|$.

Seien $\delta, \Delta \in \mathbb{R}$.

(i) Ist $K \leq \Delta$ und in $]0, b[$ kein zu 0 konjugierter Punkt von c_Δ , so gilt

$$\|Y_\Delta\| \leq \|Y\| \text{ auf } [0, b[.$$

(ii) Ist $K \geq \delta$ und in $]0, b[$ kein zu 0 konjugierter Punkt von c , so gilt

$$\|Y\| \leq \|Y_\delta\| \text{ auf } [0, b[.$$

Bezüglich einer Orthonormalbasis E_2, \dots, E_m von parallelen normalen Vektorfeldern längs c schreibt sich die Jacobigleichung als

$$\ddot{Y}^i + \sum_j R_{ij} Y^j = 0.$$

Dabei ist

$$R(E_j, \dot{c})\dot{c} = \sum_{i=2}^m R_{ij} E_i.$$

Nach den Krümmungsidentitäten ist die Matrix R_{ij} selbstadjungiert.

Für $Y = \sum_{i=2}^m Y^i E_i \perp \dot{c}$ mit $\|Y\| = 1$ ist

$$\sum R_{ij} Y^i Y^j = g(R(Y, \dot{c})\dot{c}, Y) = K(\sigma_{\dot{c}Y})$$

die Schnittkrümmung.

Wir vereinbaren noch für $\delta, \Delta \in \mathbb{R}$ und selbstadjungiertes R folgende Schreibweise:

$$\delta \leq R \iff \delta \|X\|^2 \leq \langle RX, X \rangle \text{ für alle } X,$$

und entsprechend $R \leq \Delta$. Damit reduziert sich der Beweis des Vergleichssatzes auf folgenden

⁹Ann. Math. 1951

¹⁰Gromov's almost flat manifolds. Asterisque 81, 148 p. (1981).

Satz 108 (Analytischer Vergleichssatz). Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum und sei $R :]0, b[\rightarrow \text{End}_{\text{symm}}(V)$ eine C^∞ -Abbildung. Seien $\delta, \Delta \in \mathbb{R}$. Die Abbildung $Y :]0, b[\rightarrow V$ erfülle das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \ddot{Y} + RY &= 0 \\ Y(0) &= 0, \quad \|\dot{Y}(0)\| = 1. \end{aligned} \quad (68)$$

Dann gilt:

(i) Ist $R \leq \Delta$ und $\sin_\Delta > 0$ auf $]0, b[$, so gilt

$$\sin_\Delta \leq \|Y\| \quad \text{auf }]0, b[. \quad (69)$$

(ii) Ist $\delta \leq R$ und hat keine Lösung von (68) eine Nullstelle in $]0, b[$, so gilt

$$\|Y\| \leq \sin_\delta \quad \text{auf }]0, b[. \quad (70)$$

Zu (i). Wir zeigen

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{\|Y(t)\|}{\sin_\Delta t} = 1 \quad (71)$$

und

$$\frac{d}{dt} \frac{\|Y(t)\|}{\sin_\Delta t} \geq 0. \quad (72)$$

Daraus folgt dann offenbar (69).

Zunächst ist nach der Definition der Differenzierbarkeit

$$\begin{aligned} Y(t) &= t\dot{Y}(0) + \alpha(t) && \text{mit } \lim_{t \searrow 0} \alpha(t) = 0 \\ \sin_\Delta t &= t(1 + \beta(t)) && \text{mit } \lim_{t \searrow 0} \beta(t) = 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt (71).

Weiter ist $\|Y\| > 0$ auf $]0, \epsilon[$ für hinreichend kleines $\epsilon \in]0, b[$, so daß dort $\|Y\|$ eine C^∞ -Funktion ist. Es folgt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|Y\| &= \frac{d}{dt} \sqrt{\langle Y, Y \rangle} = \langle \dot{Y}, \frac{Y}{\|Y\|} \rangle, \\ \frac{d^2}{dt^2} \|Y\| &= \langle \ddot{Y}, \frac{Y}{\|Y\|} \rangle + \frac{1}{\|Y\|^3} \underbrace{\{\|\dot{Y}\|^2 \|Y\|^2 - \langle Y, \dot{Y} \rangle^2\}}_{\geq 0} \geq \langle \ddot{Y}, \frac{Y}{\|Y\|} \rangle. \end{aligned} \quad (73)$$

Wegen

$$\frac{d}{dt} (üv - u\ddot{v}) = üv - u\ddot{v}$$

kann man die Quotientenregel auch so schreiben:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{1}{v^2} \left((üv - u\ddot{v})_{t=a} + \int_a (üv - u\ddot{v}) dt \right).$$

Damit erhalten wir auf $]0, \epsilon[$ wegen $\frac{d^2}{dt^2} \sin_\Delta + \Delta \sin_\Delta = 0$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\|Y\|}{\sin_\Delta t} &= \frac{1}{(\sin_\Delta t)^2} \int \left(\frac{d^2}{dt^2} \|Y\| \sin_\Delta t + \Delta \|Y\| \sin_\Delta t \right) dt \\ &= \frac{1}{(\sin_\Delta t)^2} \int \left(\frac{d^2}{dt^2} \|Y\| + \Delta \|Y\| \right) \underbrace{\sin_\Delta t}_{\geq 0} dt \\ &\stackrel{(73)}{\geq} \frac{1}{(\sin_\Delta t)^2} \int \frac{\sin_\Delta t}{\|Y\|} \left(\langle \ddot{Y}, Y \rangle + \Delta \langle Y, Y \rangle \right) dt \\ &= \frac{1}{(\sin_\Delta t)^2} \int \frac{\sin_\Delta t}{\|Y\|} \underbrace{\langle \ddot{Y} + \Delta Y, Y \rangle}_{= \langle (\Delta - R)Y, Y \rangle \geq 0} dt \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt (72), also auch (69), auf $]0, \epsilon[$, und offenbar kann man $\epsilon = b$ annehmen.

Zu (ii). Zunächst stellen wir fest, daß wir o.E. $\sin_\delta > 0$ auf $]0, b[$ annehmen können. Ist nämlich $\delta \leq 0$, so ist das sowieso der Fall. Und haben wir für $\delta > 0$ die Behauptung (70) auf $]0, b[\cap]0, \pi/\sqrt{\delta}[$ bewiesen, so gibt es im Fall $b > \pi/\sqrt{\delta}$ sicher Lösungen des Anfangswertproblems mit einer Nullstelle in $]0, b[$.

Wir betrachten eine Matrixlösung der Jacobigleichung, d.h. $Z :]0, b[\rightarrow \text{End}_{\text{symm}}(V)$ mit

$$\begin{aligned} \dot{Z} + RZ &= 0 \\ Z(0) &= 0, \quad \dot{Z}(0) = \text{Id}. \end{aligned}$$

Dann ist $Y = Zv$ für $v \in V$ die vektorwertige Lösung der Jacobigleichung mit Anfangsbedingungen $Y(0) = 0, \dot{Y}(0) = v$. Also müssen wir zeigen, daß für $\|v\|=1$:

$$\|Z(t)v\| \leq \sin_\delta t \tag{74}$$

auf $]0, b[$.

Zwischenbemerkung: $Z(t_0)$ ist für alle $t_0 \in]0, b[$ invertierbar. Andernfalls wäre für $v \neq 0$ im Kern von $Z(t_0)$ das Feld $\dot{Y} = Zv$ eine nichttriviale Lösung der Jacobigleichung mit Nullstellen in 0 und t_0 im Widerspruch zur Voraussetzung von (ii). Also ist Z auf $]0, b[$ invertierbar und $\|Z(t)v\|$ eine differenzierbare Funktion.

Wie in (i) genügt (für $\|v\| = 1$) der Nachweis der beiden Aussagen

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{\|Z(t)v\|}{\sin_\delta t} = 1 \tag{75}$$

und

$$\frac{d}{dt} \frac{\|Z(t)v\|}{\sin_\delta t} \leq 0 \quad \text{auf }]0, b[. \tag{76}$$

Dabei folgt wie oben aus der Definition der Differenzierbarkeit

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{1}{\sin_\delta t} Z(t) = \text{Id} \tag{77}$$

und daraus (75).

Der Beweis von (76) ist erheblich schwieriger:

Zunächst ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|Zv\| &= \frac{1}{\|Zv\|} \langle \dot{Z}v, Zv \rangle \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\|Zv\|}{\sin_\delta t} \right) &= \frac{1/\|Zv\| \langle \dot{Z}v, Zv \rangle \sin_\delta t - \|Zv\| \frac{d \sin_\delta t}{dt}}{\sin_\delta^2 t} = \frac{\langle \dot{Z}v, Zv \rangle \sin_\delta t - \|Zv\|^2 \frac{d \sin_\delta t}{dt}}{\|Zv\| \sin_\delta^2 t}. \end{aligned}$$

Daher genügt der Nachweis von

$$\langle \dot{Z}(t)v, Z(t)v \rangle \sin_\delta t - \|Z(t)v\|^2 \frac{d \sin_\delta t}{dt} \leq 0 \quad (78)$$

für alle $t \in]0, b[$ und $v \in V$. Das ist äquivalent dazu, daß für alle t und v

$$\langle \dot{Z}(t)Z^{-1}(t)v, v \rangle \sin_\delta t - \langle v, v \rangle \frac{d \sin_\delta t}{dt} \leq 0,$$

oder für alle t und $\|v\| = 1$

$$F(t) := \langle \dot{Z}(t)Z^{-1}(t)v, v \rangle \sin_\delta t - \frac{d \sin_\delta t}{dt} \leq 0. \quad (79)$$

Dazu wollen wir zeigen, daß

$$\lim_{t \searrow 0} F(t) = 0 \quad \text{und} \quad (80)$$

$$\dot{F} \leq 0. \quad (81)$$

Zunächst ist nach (77)

$$\sin_\delta t Z^{-1}(t) \rightarrow \text{Id}. \quad (82)$$

Mit $\|v\| = 1$ folgt

$$\lim_{t \searrow 0} F(t) = \lim_{t \searrow 0} \left(\langle \dot{Z}(t)(\sin_\delta t)Z^{-1}(t)v, v \rangle - \frac{d \sin_\delta t}{dt} \right) = 1 - 1 = 0.$$

Damit ist (80) bewiesen.

Für die Berechnung der Ableitung von F interessiert uns die Ableitung von

$$U := \dot{Z}Z^{-1}.$$

Dafür erhalten wir

$$\begin{aligned} \dot{U} &= \ddot{Z}Z^{-1} - \dot{Z}Z^{-1}\dot{Z}Z^{-1} \\ &= -RZZ^{-1} - U^2 \\ &= -R - U^2. \end{aligned}$$

Wir stellen weiter fest, daß U selbstadjungiert ist: Es ist nämlich für $v, w \in V$

$$\langle \dot{Z}v, Zw \rangle - \langle Zv, \dot{Z}w \rangle = 0 \quad \text{bei } t = 0,$$

und weiter

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\langle \dot{Z}v, Zw \rangle - \langle Zv, \dot{Z}w \rangle) &= \langle \ddot{Z}v, Zw \rangle - \langle Zv, \ddot{Z}w \rangle \\ &= \langle -RZv, Zw \rangle + \langle Zv, RZw \rangle = 0, \end{aligned}$$

da R selbstadjungiert. Also gilt $\langle \dot{Z}v, Zw \rangle - \langle Zv, \dot{Z}w \rangle = 0$ überall, und durch Anwenden auf $Z^{-1}v$ und $Z^{-1}w$ anstelle von v und w folgt die Symmetrie von U .

Damit berechnen wir die Ableitung von F :

$$\begin{aligned} \dot{F} &= \langle \dot{U}v, v \rangle \sin_\delta t + \langle Uv, v \rangle \frac{d \sin_\delta t}{dt} - \frac{d^2 \sin_\delta t}{dt^2} \\ &= -\langle Rv, v \rangle \sin_\delta t - \langle U^2v, v \rangle \sin_\delta t + \langle Uv, v \rangle \frac{d \sin_\delta t}{dt} + \delta \sin_\delta t \\ &\leq (\delta - \langle Rv, v \rangle) \sin_\delta t - \langle Uv, v \rangle^2 \sin_\delta t + \langle Uv, v \rangle \frac{d \sin_\delta t}{dt} \\ &\leq -\langle Uv, v \rangle \left(\langle Uv, v \rangle \sin_\delta t - \frac{d \sin_\delta t}{dt} \right) \\ &= -\langle Uv, v \rangle F, \end{aligned}$$

also

$$\dot{F} + \langle Uv, v \rangle F \leq 0. \quad (83)$$

Dabei haben wir neben der Voraussetzung von (ii) benutzt, daß $\|v\| = 1$ und deshalb

$$\langle Uv, v \rangle^2 \leq \|Uv\|^2 = \langle Uv, Uv \rangle = \langle U^2v, v \rangle$$

ist. Leider haben wir das Ziel, nämlich die Ungleichung (81), nicht erreicht. Wir werden stattdessen beweisen, daß

$$\lim_{t \searrow 0} \langle U(t)v, v \rangle = +\infty. \quad (84)$$

Die eigentlich gesuchte Ungleichung (79) ergibt sich dann mit (80), (83), (84) aus folgendem

Lemma 109. Sind $F, G :]0, b[\rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit

$$\lim_{t \searrow 0} F(t) = 0 \text{ und } \lim_{t \searrow 0} G(t) \in]0, +\infty],$$

und gilt

$$\dot{F} + GF \leq 0,$$

so folgt $F \leq 0$.

Beweis des Lemmas. Wir betrachten $F e^{\int G}$. Dafür gilt nach Voraussetzung

$$\frac{d}{dt}(F e^{\int G}) = (\dot{F} + FG)e^{\int G} \leq 0.$$

Das impliziert für beliebige $0 < s < t < b$

$$F(t)e^{\int_s^t G} \leq F(s)e^{\int_s^s G} = F(s),$$

oder

$$F(t) \leq F(s)e^{-\int_s^t G}. \quad (85)$$

Nach Voraussetzung gibt es $s_0 < t$ mit $G(s) \geq 0$ für alle $s < s_0$. Daher ist

$$0 \leq e^{-\int_s^t G} = e^{-\int_s^{s_0} G} e^{-\int_{s_0}^t G} \leq e^{-\int_{s_0}^t G},$$

also $e^{-\int_s^t G}$ für $s \searrow 0$ beschränkt. Aus (85) folgt mit $\lim_{s \searrow 0} F(s) = 0$ deshalb die Behauptung des Lemmas. \square

Schließlich müssen wir noch (84) beweisen. Das folgt aber sofort aus (82), denn

$$\langle U(t)v, v \rangle = \frac{1}{\sin_\delta t} \langle \dot{Z}(t)(\sin_\delta t)Z^{-1}(t)v, v \rangle.$$

Ich gebe hier noch eine alternative Version des Vergleichssatzes. Darin bezeichnet \cos_κ analog zu \sin_κ die Lösung von $\ddot{y} + \kappa y = 0$ mit den Anfangsbedingungen $y(0) = 1, \dot{y}(0) = 0$ des Cosinus.

Satz 110 (Vergleichssatz für Jacobifelder, 2. Version). Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, $c : [0, L[\rightarrow M$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodätische, Y ein nicht-triviales normales Jacobifeld längs c mit

$$\|Y\|(0) = a, \quad \frac{d}{dt}\|Y\|(0) = b.$$

Dabei ist $\frac{d}{dt}\|Y\|(0)$ die rechtsseitige Ableitung.¹¹

Für die Schnittkrümmung von M gelte

$$\delta \leq K \leq \Delta.$$

Dann gilt

$$a \cos_\Delta + b \sin_\Delta \leq \|Y\| \leq a \cos_\delta + b \sin_\delta,$$

falls die linke Seite auf $]0, L[$ positiv ist.

Bemerkungen. 1. Beachten Sie, daß wir hier obere und untere Krümmungsschranken gleichzeitig fordern. Das vereinfacht insbesondere die Voraussetzungen für die rechte Ungleichung.

2. Für den früher behandelten Fall $a = 0$ zeigt man $\frac{d}{dt}\|Y\|(0) = \|\dot{Y}(0)\|$, so daß wir dieselben Ungleichungen erhalten.

3. Der Beweis dieser Version des Vergleichssatzes ist für die linke Ungleichung ganz analog zum Beweis der 1. Version. Der Beweis der rechten Ungleichung ist schwieriger, vgl. [H.Karcher, Riemannian Center of Mass ..., Comm. Pure Appl. Math. 30(1977), Appendix A]. Wir werden den Satz nur im Spezialfall $b = 0$ verwenden, für den auch die rechte Ungleichung analog dem früheren Fall zu beweisen ist.

4. In den beiden Fällen mit $a = 0$ oder $b = 0$ ist $a \cos_\kappa + b \sin_\kappa = \|Y_\kappa\|$, wo $\kappa \in \{\Delta, \delta\}$ und Y_κ das entsprechende „Vergleichsfeld“ ist.

¹¹Diese existiert auch im Fall $Y(0) = 0$, weil dann $Y(t) \approx t\dot{Y}(0)$ und $\dot{Y}(0) \neq 0$.

20 Längenvergleich

Satz 111 (Längenvergleichssatz von Rauch). Seien (M_0, g_0) eine m -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung K_0 und $\delta, \Delta \in \mathbb{R}$. Es gelte

$$\delta \leq K_0 \leq \Delta.$$

Seien M_δ und M_Δ die m -dimensionalen Standardräume konstanter Krümmung δ bzw. Δ . Für $\kappa \in \{0, \delta, \Delta\}$ seien $p_\kappa \in M_\kappa$ und

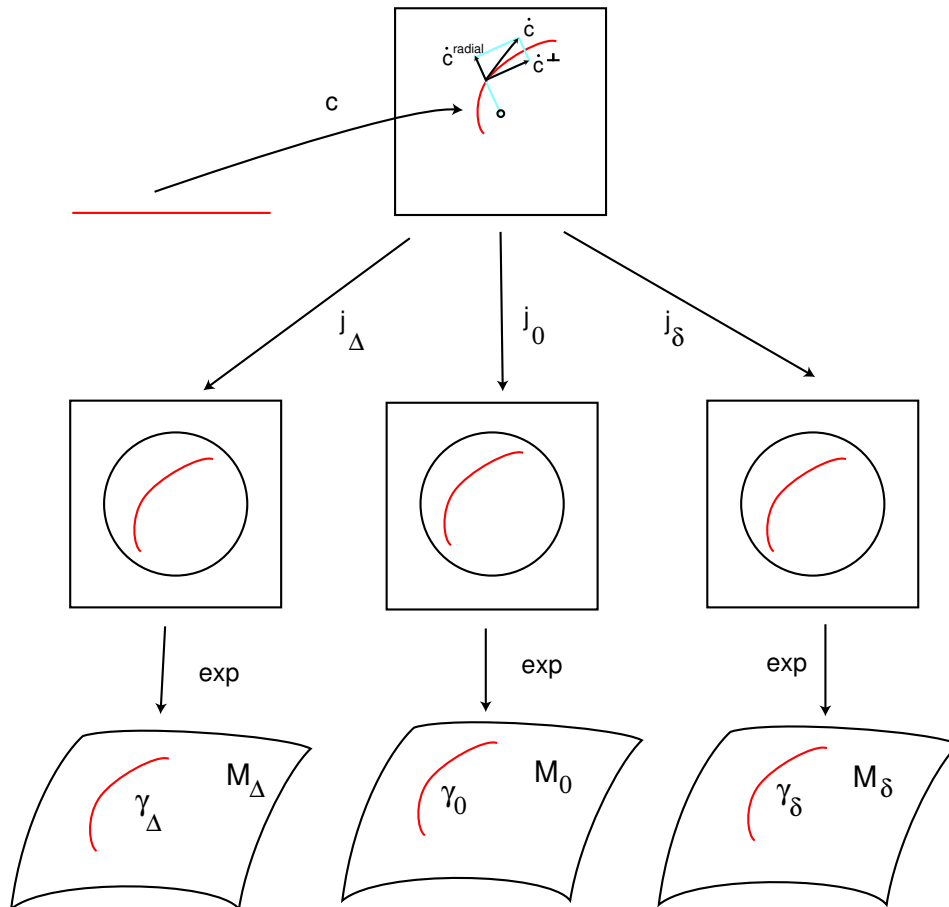
$$j_\kappa : \mathbb{R}^m \rightarrow T_{p_\kappa} M_\kappa$$

eine lineare Isometrie.

Sei $\epsilon > 0$, so daß die Exponentialabbildung von M_0 auf der offenen ϵ -Kugel um $0 \in T_{p_0} M_0$ definiert ist. Falls $\Delta > 0$ sei $\epsilon < \pi/\sqrt{\Delta}$.

Sei $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Kurve mit $\|c\| < \epsilon$ und $\gamma_\kappa := \exp \circ j_\kappa \circ c : [a, b] \rightarrow M_\kappa$. Dann gilt

$$L(\gamma_\Delta) \leq L(\gamma_0) \leq L(\gamma_\delta).$$



Beweis. Sei $t \in [a, b]$ und o.E. $c(t) \neq 0$. Wir setzen

$$\dot{c}(t)^{radial} := \left\langle \dot{c}(t), \frac{c(t)}{\|c(t)\|} \right\rangle \frac{c(t)}{\|c(t)\|}.$$

und zerlegen

$$\dot{c}(t) = \dot{c}(t)^{radial} + \dot{c}(t)^\perp.$$

Sei Y_κ das Jacobifeld längs $[0, 1] \ni s \mapsto \exp(sj_\kappa \circ c(t))$ mit

$$Y_\kappa(0) = 0, \quad \dot{Y}_\kappa(0) = j_\kappa(\dot{c}(t)^\perp).$$

Dann ist nach dem Gaußlemma und Satz 78

$$\|\dot{\gamma}_\kappa(t)\|^2 = \|\dot{c}(t)^{radial}\|^2 + \|Y_\kappa(t)\|^2.$$

Aus dem Vergleichssatz für Jacobifelder folgt

$$\|\dot{\gamma}_\Delta\| \leq \|\dot{\gamma}_0\| \leq \|\dot{\gamma}_\delta\|$$

und daraus die Behauptung. □

Satz 112 (Längenvergleichssatz von M. Berger 1962). Sei (M_0, g_0) eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung K_0 . Es gelte

$$\delta \leq K_0 \leq \Delta.$$

Seien M_Δ und M_δ wie oben und $c_\kappa : [0, b] \rightarrow M_\kappa$ nach der Bogenlänge parametrisierte Geodätische mit parallelem Einheitsvektorfeld W_κ .

Sei α der (längs jeder Geodätischen konstante) Winkel zwischen W_κ und \dot{c}_κ , also unabhängig von κ . Sei $f : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine nicht-negative differenzierbare Funktion. Wir definieren Kurven γ_κ durch

$$\gamma_\kappa(t) = \exp(f(t)W_\kappa(t)).$$

Es gelte

$$\cos_\Delta > 0 \quad \text{auf } [0, \sup f], \quad \text{d.h. } f \leq \frac{\pi}{2\sqrt{\Delta}}, \quad \text{falls } \Delta > 0.$$

Dann gilt

$$L(\gamma_\Delta) \leq L(\gamma_0) \leq L(\gamma_\delta).$$

Beweis. Wir unterdrücken den Index κ und betrachten

$$V(t, \tau) := \exp(\tau f(t)W(t)).$$

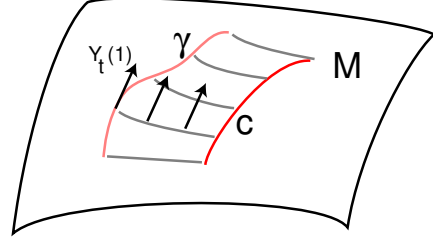
Dann ist $\gamma(t) = V(t, 1)$ und $\dot{\gamma}(t) = Y_t(1)$, wobei

$$Y_t(\tau) := \partial_t V(t, \tau)$$

das Variationsvektorfeld der geodätischen Variation V der Geodätischen $\mu_t : \tau \mapsto \exp(\tau f(t)W(t))$ ist. Y_t ist also ein Jacobifeld längs μ_t .

Wir bezeichnen mit $(\cdot)^\perp$ die Normalkomponente bezüglich μ_t . Dann hat Y_t die Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} Y_t(0) &= \partial_t V(t, 0) = \dot{c}(t) \\ &= \cos \alpha W(t) + (\dot{c}(t))^\perp, \\ \nabla_\tau Y_t(0) &= \nabla_{\partial_\tau} \partial_t V(t, \tau)|_{\tau=0} = \nabla_{\partial_t} \partial_\tau V(t, \tau)|_{\tau=0} \\ &= \nabla_{\partial_t} f(t)W(t) = \dot{f}(t)W(t). \end{aligned}$$



Wir können Y_t schreiben als Summe $Y_t = Y_t^T + Y_t^\perp$ eines tangentialen und eines normalen Jacobifeldes längs μ_t mit Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} Y_t^T(0) &= \cos \alpha W(t), & Y_t^\perp(0) &= \dot{c}(t)^\perp, \\ \nabla_\tau(Y_t^T)(0) &= \dot{f}(t)W(t), & \nabla_\tau(Y_t^\perp)(0) &= 0. \end{aligned}$$

Dann ist

$$Y_t^T(\tau) = (\cos \alpha + \tau \dot{f}(t)) \frac{\dot{\mu}_t(\tau)}{f(t)}$$

und

$$\|Y_t^\perp(0)\| = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sin \alpha$$

Weiter ist

$$\|Y_t(1)\|^2 = \left(\frac{\cos \alpha + \dot{f}(t)}{f(t)} \right)^2 + \|Y_t^\perp(1)\|^2,$$

Der erste Term ist unabhängig von der Krümmung, also vom Index κ . Der zweite Term hingegen läßt sich mit der 2. Version des Vergleichssatzes für Jacobifelder abschätzen, solange $\cos_\Delta > 0$. Weil $L(\mu_t) = f(t)$, folgt daraus die Behauptung. \square

21 Winkelvergleich, Dreiecke, Maximaler Durchmesser

Ein Dreieck ABC in einer (vollständigen) Riemannschen Mannigfaltigkeit bestehe aus drei paarweise verschiedenen Punkten A, B, C und minimalen Geodätischen zwischen diesen. Beachten Sie, daß die Punkte die minimalen Geodätischen nicht immer eindeutig festlegen (Antipoden auf der Sphäre).

Der folgende Satz wird üblicherweise als zitiert als Winkelvergleichssatz von Toponogov. Von ihm stammt der Fall $\delta > 0$ in beliebiger Dimension, den wir aber nicht beweisen. Wir zeigen nur den Fall $\delta \leq 0$, der auf Cartan zurückgeht.

Für zweidimensionale Mannigfaltigkeiten und beliebiges δ stammt der Satz von Alexandrov und hängt mit den Satz von Gauß-Bonnet zusammen.

Satz 113 (Winkelvergleichssatz von Cartan-Alexandrov-Toponogov). Seien (M, g) eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit der Schnittkrümmung K mit $\delta \leq K \leq \Delta$ und ABC ein Dreieck in M mit minimalen Geodätischen als Seiten und den Eckwinkeln α, β, γ in der üblichen Anordnung. Für den Umfang U des Dreiecks gelte im Falle $\delta > 0$, daß $U < \frac{2\pi}{\sqrt{\delta}}$. Sei M_δ die einfach-zusammenhängende, vollständige Fläche der konstanten Krümmung δ . Dann gibt es in M_δ ein Dreieck $A_\delta B_\delta C_\delta$ mit denselben Seitenlängen wie ABC . Für dessen Winkel gilt:

$$\alpha_\delta \leq \alpha, \quad \beta_\delta \leq \beta, \quad \gamma_\delta \leq \gamma.$$

Beweis.

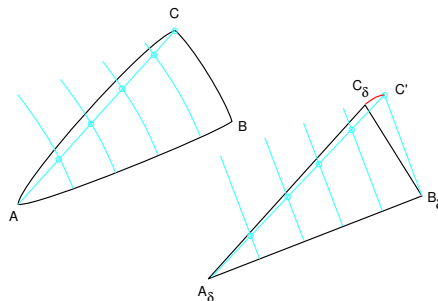
Offenbar o.E. $\Delta > 0$.

Fall A: $\delta \leq 0$.

- (i) Der Satz gilt für die Winkel β, γ von „schmalen“ Dreiecken, d.h. solchen mit

$$d(B, C) \leq \frac{\pi}{2\sqrt{\Delta}}.$$

Dazu betrachten wir eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodätische c_δ der Länge $L(c) := d(A, B)$ in M_δ mit den Endpunkten A_δ, B_δ , und dazu ein paralleles Einheitsvektorfeld W_δ , das mit c_δ den Winkel β einschließt. Setze $C' = \exp(d(B, C)W_\delta(d(A, B)))$.



Dann gibt es nach Euklidischer oder Hyperbolischer Geometrie eine (monoton wachsende) Funktion $f : [0, d(A, B)] \rightarrow \mathbb{R}$, $0 \leq f \leq \frac{\pi}{2\sqrt{\Delta}}$, so daß

$$b_\delta(s) := \exp(f(s)W_\delta(s)), \quad 0 \leq s \leq d(A, B)$$

die Seite $A_\delta C'$ im Dreieck $A_\delta B_\delta C'$ parametrisiert.

Wir betrachten nun das parallele Einheitsvektorfeld W längs der Dreiecksseite c von A nach B , das bei B in Richtung BC weist, und konstruieren damit und mit der

Funktion f eine Verbindungskurve

$$b(s) := \exp(f(s)W(s)), \quad 0 \leq s \leq d(A, B)$$

von A nach C wie im Vergleichssatz von Berger. Nach diesem ist dann

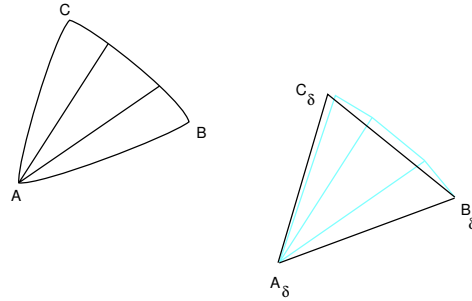
$$d(A, C) \leq L(b) \leq L(b_\delta) = d(A_\delta, C').$$

Hier wird die obere Krümmungsschranke benutzt.

Man muß also den Punkt C' auf A_δ zu bewegen, um die Länge der Seite AC' auf die gewünschte Länge $d(A, C)$ zu verkleinern. Dabei verkleinert sich der gegenüberliegende Winkel β zu β_δ .

(ii) Beliebiges Dreieck.

Wir zerlegen das Dreieck ABC in schmale Dreiecke. Durch Aneinandersetzen von Vergleichsdreiecken in M_δ erhält man eine Figur mit gebrochener Seite $B_\delta C_\delta$, wobei sich nach (i) aufeinanderfolgende Winkel (gegenüber von A_δ) zu höchstens π addieren. Durch „Ausstrecken“ der Seite zu einer glatten Geodätischen werden die Winkel $\beta_\delta, \gamma_\delta$ weiter verkleinert.



Zum Fall B: $\delta > 0$.

Der Beweis funktioniert wie oben, wenn die Seiten kurz sind. Die Voraussetzung $U < \frac{2\pi}{\sqrt{\delta}}$ garantiert das aber nicht, und man bekommt das Problem, daß die Funktion f nicht monoton ist. Daher ist nicht notwendig $f \leq \frac{\pi}{2\sqrt{\Delta}}$, wenn dies für die Seite BC gilt, so daß man den Satz von Berger nicht anwenden kann. (Betrachte gleichschenklige Dreiecke in der Einheitssphäre mit großem Winkel α .)

Abhilfe schafft eine subtilere Zerlegung in Teildreiecke, vgl. *Gromoll/Klingenberg/Meyer* oder *Cheeger/Ebin, Comparison Theorems in Riemannian Geometry*. Ich verzichte hier darauf. \square

Eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit positiver unterer Krümmungsschranke $0 < \delta < K$ ist nach dem Satz von Bonnet-Myers kompakt vom Durchmesser $\leq \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}$. Das ist also die maximale Seitenlänge eines Dreiecks in M . Wenn Sie die Sphäre der Krümmung δ und in dieser ein Dreieck mit einer Seite der Länge $\frac{\pi}{\sqrt{\delta}}$ betrachten, sind deren Endpunkte Antipoden. Sie haben daher für die beiden anderen Seiten nicht mehr viel Auswahl. Das verallgemeinert der folgende

Satz 114 (Dreiecke von maximalem Umfang, Toponogov). *Seien (M, g) eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit der Schnittkrümmung K mit $0 < \delta \leq K$. Dann gibt es in M keine Dreiecke mit Umfang $U > \frac{2\pi}{\sqrt{\delta}}$.*

Ist $U = \frac{2\pi}{\sqrt{\delta}}$, so ist

- entweder eine Seite von der Länge $\frac{\pi}{\sqrt{\delta}}$ und der gegenüberliegende Winkel $= \pi$, das Dreieck also ein Zweieck,
- oder alle Seiten sind kürzer als $\frac{\pi}{\sqrt{\delta}}$ und alle Winkel sind $= \pi$. Das Dreieck ist also eine glatt geschlossene Geodätische.

Beweis. Fall A: $U = \frac{2\pi}{\sqrt{\delta}}$. Dann ist also

$$d(A, B) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}.$$

Fall A.1: $d(A, B) = \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}$.

Dann ist $d(A, C) + d(C, B) = U - d(A, B) = \frac{\pi}{\sqrt{\delta}} = d(A, B)$, also hat die gebrochenen Geodätische ACB bei C keinen Knick, das Dreieck ist ein geodätisches Zweieck. Entsprechendes gilt, wenn eine andere Seite die Länge $\frac{\pi}{\sqrt{\delta}}$ hat. Länger kann aber keine Seite sein. Wir brauchen also nur noch folgende Situation zu betrachten:

Fall A.2: Alle Seiten kürzer als $\frac{\pi}{\sqrt{\delta}}$.

Wähle dann D auf der Seite AB , so daß

$$d(C, A) + d(A, D) = d(D, B) + d(B, C) = \frac{U}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{\delta}},$$

und eine Kürzeste von C nach D .

Fall A.2.1: $d(C, D) < \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}$.

Dann haben die Teildreiecke CAD und CDB einen Umfang $< \frac{2\pi}{\sqrt{\delta}}$. Nach Toponogov hat also das Vergleichsviereck $C_\delta A_\delta D_\delta B_\delta$ mit C_δ im Nordpol der Sphäre bei D_δ einen Innenwinkel $\leq \pi$. Läßt man D_δ längs des Meridians zum Südpol $-C_\delta$ wandern, so wächst der Umfang des Vierecks $C_\delta A_\delta D_\delta B_\delta$ streng monoton bis zum Wert $\frac{2\pi}{\sqrt{\delta}}$. Er ist aber von Anfang an $= \frac{2\pi}{\sqrt{\delta}}$. Widerspruch! Daher gibt es nur den

Fall A.2.2: $d(C, D) = \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}$.

Dann kann man A.2.1 anwenden auf die beiden Teildreiecke CAD und CDB und findet

$$\alpha = \pi, \beta = \pi.$$

Dies haben wir bewiesen unter den Voraussetzungen $U = \frac{2\pi}{\sqrt{\delta}}$, wenn alle Seiten kürzer als $\frac{\pi}{\sqrt{\delta}}$ sind. Daher folgt ebenso $\gamma = \pi$: Das Dreieck ist eine glatt-geschlossene Geodätische.

Fall B: $U > \frac{2\pi}{\sqrt{\delta}}$.

Läßt man A und B auf den Seiten CA bzw. CB gegen C laufen, so geht der Umfang des Dreiecks gegen 0. Aus Stetigkeitsgründen gibt es daher auf diesen Seiten Teilpunkte A', B' , so daß $U(CA'B') = \frac{2\pi}{\sqrt{\delta}}$. Dann folgt aus dem Fall A, daß $CA'B'$ ein geodätisches Zweieck oder eine geschlossene Geodätische ist. Im letzteren Fall ist $\gamma = \pi$. Das gilt aber auch beim Zweieck, weil nach Konstruktion $d(C, A') < d(C, A) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}$ (Bonnet-Myers) und ebenso $d(C, B') < \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}$. Aus Symmetriegründen folgt $\alpha = \beta = \pi$, das Dreieck ABC ist also eine glatt-geschlossene Geodätische.

Wähle einen Punkt D darauf, der mit C die Länge halbiert und eine Kürzeste CD von C nach D . D liegt notwendig zwischen A und B . Wir behaupten:

$$U(CAD) < \frac{2\pi}{\sqrt{\delta}} \tag{86}$$

Beweis: Wäre $\angle(ACD)$ gleich π , so läge CB auf der Kürzesten CD von C nach D . Nach Bonnet-Myers wäre $\frac{1}{2}U = d(C, B) + d(B, D) = d(C, D) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}$. Widerspruch zu $U > \frac{2\pi}{\sqrt{\delta}}$.

Ebenso findet man, daß auch $\angle(ADC) \neq \pi$. Nach dem bisher Bewiesenen ist also $\tilde{U} := U(CAD) \leq \frac{2\pi}{\sqrt{\delta}}$, denn andernfalls wären alle Winkel in diesem Dreieck $= \pi$.

Wäre $\tilde{U} = \frac{2\pi}{\sqrt{\delta}}$, so wären wir im Fall A. Weil die Teilwinkel bei C und D nicht π sind ist deshalb das Teildreieck $\triangle CAD$ ein geodätisches Zweieck mit $d(C, D) = \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}$. Es folgt

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\delta}} = \tilde{U} = \underbrace{d(C, A) + d(A, D)}_{> \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}} + \underbrace{d(D, C)}_{= \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}} > \frac{2\pi}{\sqrt{\delta}}.$$

Das ist ein Widerspruch, und deshalb gilt (86).

Ebenso beweist man natürlich $U(DBC) < \frac{2\pi}{\sqrt{\delta}}$.

Darum läßt sich auf die beiden Teildreiecke $\triangle CAD$ und $\triangle DBC$ des Vierecks $CADB$ der Satz von Toponogov anwenden. Die entsprechende Vergleichsfigur in der Sphäre hat dann bei D_δ einen Winkel $< \pi$, und bei der Bewegung von D_δ auf der Kürzesten nach $-C_\delta$ wächst der Umfang des Vierecks $C_\delta A_\delta D_\delta B_\delta$ streng monoton von $U > \frac{2\pi}{\sqrt{\delta}}$ bis $\frac{2\pi}{\sqrt{\delta}}$. Widerspruch! Der Fall B kann also nicht auftreten. \square

Wir kennen Beispiele zur Schranke für den Durchmesser nach Bonnet-Myers: Die Sphäre der Krümmung $K = \delta$ hat Durchmesser $\frac{\pi}{\sqrt{\delta}}$, die reellen projektiven Räume als Quotienten der Sphären haben bei gleicher Krümmung der Durchmesser $\frac{\pi}{2\sqrt{\delta}}$. Der komplexe projektive Raum mit der Krümmung $1 \leq K \leq 4$ hat den Durchmesser $\frac{\pi}{2\sqrt{1}}$, vgl. Abschnitt 18. Der maximale Durchmesser kommt tatsächlich nur bei den Sphären vor:

Satz 115 (Satz vom maximalen Durchmesser, Toponogov 1959). *Sei M eine zusammenhängende und vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit $K \geq \delta > 0$. Ist M vom maximalen Durchmesser*

$$\text{diam}(M) = \frac{\pi}{\sqrt{\delta}},$$

so ist es isometrisch zur Sphäre S_δ^m gleicher Krümmung.

Beweis. Nach dem Satz von Bonnet-Myers ist M kompakt, und es gibt ein Punktepaar p, q maximalen Abstands $d(p, q) = \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}$. Sei $x \in M$ beliebig. Dann gilt

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\delta}} \stackrel{\text{Satz 114}}{\geq} \underbrace{d(p, q)}_{\frac{\pi}{\sqrt{\delta}}} + d(q, x) + d(x, p) \geq 2d(p, q) = \frac{2\pi}{\sqrt{\delta}}.$$

Daher ist

$$d(p, x) + d(x, q) = d(p, q),$$

also pxq eine Kürzeste und damit glatt. Deshalb geht jede Geodätische von p aus durch q und ist bis dahin Kürzeste. Wir identifizieren mittels linearer Isometrie die Tangentialräume von S_δ^m im Nordpol und von M in p . Mittels der beiden Exponentialabbildungen erhalten wir dann eine Abbildung

$$f : S_\delta^m \setminus \{\text{Südpol}\} \rightarrow M \setminus \{q\}.$$

f ist injektiv. Andernfalls könnte man einen Punkt $x \in M$ durch zwei verschiedenen Kürzeste mit p verbinden. Dann könnte man aber eine geknickte Kürzeste von p nach q finden. Widerspruch!

f ist surjektiv auf $M \setminus \{q\}$. Klar nach Hopf-Rinow.

f ist isometrisch. Das ist klar in radialer Richtung. Sei nun $c : [0, \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}] \rightarrow M$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodätische von p nach q . Dann ist c Kürzeste, also ist die Indexform von c nicht negativ für alle Vektorfelder X , die an den Endpunkten von c verschwinden: $0 \leq I(X, X)$. Wir wählen

$$X(t) = \sin_{\delta} t W(t),$$

wobei W ein normales, paralleles Einheitsfeld längs c ist. Dann ist

$$\begin{aligned} 0 \leq I(X, X) &= g(\dot{X}, X) \Big|_0^{\frac{\pi}{\sqrt{\delta}}} - \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{\delta}}} g(\ddot{X} + R(X, \dot{c})\dot{c}, X) dt \\ &= - \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{\delta}}} g(-\delta \sin_{\delta} t W(t) + R(\sin_{\delta} t W(t), \dot{c}(t))\dot{c}(t), \sin_{\delta} t W(t)) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{\delta}}} \sin_{\delta}^2 t \{ \delta - \underbrace{g(R(W(t), \dot{c}(t))\dot{c}(t), W(t))}_{\geq \delta} \} dt. \end{aligned}$$

Es folgt $g(R(W(t), \dot{c}(t))\dot{c}(t), W(t)) = \delta$ für alle t . Daher erfüllen die normalen Jacobifelder längs c dieselbe Jacobigleichung wie die auf S_{δ}^m , und f ist auch orthogonal zur radialen Richtung isometrisch.

Damit ist $M \setminus \{q\}$ isometrisch zu $S_{\delta}^m \setminus \{\text{Südpol}\}$ und insbesondere M von konstanter Schnittkrümmung δ . Wie im Beweis von Satz 84 setzt man die Isometrie in den Punkt q fort und erhält die Behauptung. \square

22 Der Indexsatz von Morse

Wir folgen dem DoCarmo, s. Literaturverzeichnis.

Im weiteren seien M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $c : [0, b] \rightarrow M$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte (d.h. $\|\dot{c}\| = 1$) Geodätische. Wir definieren

$$\begin{aligned}\hat{\Gamma} &:= \hat{\Gamma}_c := \text{Vektorraum der normalen}^{12} \text{ stückweise glatten Vektorfelder längs } c, \\ \hat{\Gamma}^0 &:= \hat{\Gamma}_c^0 := \text{Unterraum aller Felder } X \in \hat{\Gamma}_c^0 \text{ mit } X(0) = 0 \text{ und } X(b) = 0.\end{aligned}$$

Wir hatten im Abschnitt 13 die Indexform

$$I : \hat{\Gamma} \times \hat{\Gamma} \rightarrow \mathbb{R}$$

definiert durch

$$\begin{aligned}I(Y, Z) &= \int_0^b \left(g(\dot{Y}, \dot{Z}) - g(R(Y, \dot{c})\dot{c}, Z) \right) dt \\ &= \sum_i g(\dot{Y}, Z)|_{t_{i-1}+0}^{t_i-0} - \int_0^b g(\ddot{Y} + R(Y, \dot{c})\dot{c}, Z) dt,\end{aligned}\tag{87}$$

vgl. (58). Dabei war $0 = t_0 < \dots < t_n = b$ eine Zerlegung von $[0, b]$ in Glattheitsintervalle von Y .

Lemma 116. Für $Y \in \hat{\Gamma}^0$ gilt

$$Y \text{ ist Jacobifeld} \iff I(Y, Z) = 0 \text{ für alle } Z \in \hat{\Gamma}^0.$$

Beweis. Zu (\implies). Das folgt direkt aus der zweiten Gleichung von (87).

Zu (\impliedby). Sei $0 = t_0 < \dots < t_n = b$ eine Zerlegung von $[0, b]$ in Glattheitsintervalle von Y . Wähle eine differenzierbare Funktion $\psi : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned}\psi &\geq 0, \\ \psi(t) &= 0 \iff t \in \{t_0, \dots, t_n\},\end{aligned}$$

und definiere $Z \in \hat{\Gamma}^0$ durch

$$Z := \psi \left\{ \ddot{Y} + R(Y, \dot{c})\dot{c} \right\}.$$

Dann ist $Z(t_i) = 0$ für alle i . Es folgt

$$0 = I(Y, Z) = 0 - \int_0^b \psi \|\ddot{Y} + R(Y, \dot{c})\dot{c}\|^2 dt$$

Also ist $\|\ddot{Y} + R(Y, \dot{c})\dot{c}\| = 0$ und Y auf jedem $[t_{i-1}, t_i]$ ein Jacobifeld.

Um zu zeigen, daß Y ein Jacobifeld auf ganz $[0, b]$ ist, müssen wir noch nachweisen, daß in jedem t_i die links und rechtsseitigen Grenzwerte von $Y(t)$ und $\dot{Y}(t)$ übereinstimmen, dann folgt die Glattheit von Y aus dem Eindeutigkeitssatz für die Jacobigleichung. Weil Y nach Definition von $\hat{\Gamma}^0$ stetig ist, müssen wir nur die Ableitungen untersuchen.

¹²d.h. zu \dot{c} orthogonalen

Nach dem Obigen verschwindet der Integralterm für beliebiges $Z \in \hat{\Gamma}^0$, und es ist

$$0 = I(Y, Z) = \sum_i g(\dot{Y}, Z)|_{t_{i-1}+0}^{t_i-0}.$$

Wählt man ein j und dazu ein $Z \in \hat{\Gamma}^0$, so daß $Z(t_i) = 0$ für alle $i \neq j$, so folgt

$$0 = I(Y, Z) = g(\dot{Y}(t_j + 0) - \dot{Y}(t_j - 0), Z(t_j)), \quad 1 < j < n.$$

Daraus folgt durch geeignete Wahl von Z , die gewünschte Gleichheit

$$\dot{Y}(t_j + 0) = \dot{Y}(t_j - 0)$$

für alle inneren t_j . □

Lemma 117. *Seien Y_1, Y_2 Jacobifelder längs $c : [0, b] \rightarrow M$ mit*

$$Y_1(0) = 0 = Y_2(0).$$

Dann gilt für alle $t \in [0, b]$

$$g(\dot{Y}_1(t), Y_2(t)) = g(Y_1(t), \dot{Y}_2(t)). \quad (88)$$

Beweis. Die Gleichung gilt für $t = 0$, und es ist

$$\frac{d}{dt}g(\dot{Y}_1, Y_2) = g(\ddot{Y}_1, Y_2) + g(\dot{Y}_1, \dot{Y}_2) = -g(R(Y_1, \dot{c})\dot{c}, Y_2) + g(\dot{Y}_1, \dot{Y}_2) = \frac{d}{dt}g(Y_1, \dot{Y}_2).$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Satz 118 (Indexlemma). *Die Geodätische $c : [0, b] \rightarrow M$ habe keine konjugierten Punkte.*

Dann gilt für alle Vektorfelder $Y, Z \in \hat{\Gamma}$:

Ist $Y(0) = Z(0)$, $Y(b) = Z(b)$ und Y ein Jacobifeld, so gilt

$$I(Y, Y) \leq I(Z, Z)$$

mit Gleichheit nur für $Z = Y$.

Beweis. Fall A: $Y(0) = Z(0) = 0$.

Sei $0 = t_0 < \dots < t_n = b$ eine Zerlegung von $[0, b]$ in Glattheitsintervalle von Z und seien Y_2, \dots, Y_m Jacobifelder längs c mit $Y_2(0) = \dots = Y_m(0) = 0$ und linear unabhängigen $\dot{Y}_i(0)$. Dann sind die $Y_i(t)$ für $t > 0$ eine Basis von $\dot{c}(t)^\perp$, weil die Geodätische keine konjugierten Punkte hat. Also ist für $t > 0$

$$Z(t) = \sum_{i=2}^m \phi_i(t) Y_i(t)$$

mit stückweise glatten $\phi_i :]0, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Wir zeigen zunächst:

Die ϕ_i lassen sich glatt in $t = 0$ fortsetzen. Zunächst gilt nämlich $Y_i(t) = t\tilde{Y}_i(t)$ mit in 0 glatten Vektorfeldern \tilde{Y}_i , für die $\tilde{Y}_i(0) = \dot{Y}_i(0)$ (Lemma von Bohnenblust). Also sind die $\tilde{Y}_i \in \hat{\Gamma}$ überall auf $[0, b]$ linear unabhängig und

$$Z = \sum_{i=2}^m \psi_i \tilde{Y}_i$$

mit stückweise glatten ψ_i und $\psi_i(0) = 0$. Wiederum nach dem Lemma von Bohnenblust ist $\psi_i(t) = t\chi_i(t)$ mit in 0 glatten χ_i , und wir erhalten für $t > 0$

$$\sum_{i=2}^m \phi_i(t)t\tilde{Y}_i(t) = \sum_{i=2}^m \psi_i(t)\tilde{Y}_i(t) = \sum_{i=2}^m \chi_i(t)t\tilde{Y}_i(t).$$

Es folgt $\phi_i(t) = \chi_i(t)$ für $t > 0$ und damit die Behauptung.

Als nächstes betrachten wir Z auf dem Komplement von $\{t_0, \dots, t_n\}$. Wir schreiben

$$\dot{Z} = \underbrace{\sum \dot{\phi}_i Y_i}_{=: Z_1} + \underbrace{\sum \phi_i \dot{Y}_i}_{=: Z_2}$$

Dann ist

$$-R(Z, \dot{c})\dot{c} = -\sum \phi_i R(Y_i, \dot{c})\dot{c} = \sum \phi_i \ddot{Y}_i = \dot{Z}_2 - \sum \dot{\phi}_i \dot{Y}_i,$$

und mit (88) folgt

$$\begin{aligned} -g(R(Z, \dot{c})\dot{c}, Z) &= g(Z, \dot{Z}_2) - g(\sum \dot{\phi}_i \dot{Y}_i, \sum \phi_j Y_j) \\ &= g(Z, \dot{Z}_2) - \sum \dot{\phi}_i \phi_j g(\dot{Y}_i, Y_j) \\ &= g(Z, \dot{Z}_2) - \sum \dot{\phi}_i \phi_j g(Y_i, \dot{Y}_j) \\ &= g(Z, \dot{Z}_2) - g(Z_1, Z_2). \end{aligned}$$

Dann ist aber der Integrand der Indexform

$$\begin{aligned} g(\dot{Z}, \dot{Z}) - g(R(Z, \dot{c})\dot{c}, Z) &= g(Z_1, Z_1) + 2g(Z_1, Z_2) + g(Z_2, Z_2) + g(Z, \dot{Z}_2) - g(Z_1, Z_2) \\ &= g(Z_1, Z_1) + g(Z_1, Z_2) + g(Z_2, Z_2) + g(Z, \dot{Z}_2) \\ &= g(Z_1, Z_1) + g(\dot{Z}, Z_2) + g(Z, \dot{Z}_2) \\ &= \|Z_1\|^2 + \frac{d}{dt}g(Z, Z_2). \end{aligned}$$

Es folgt

$$I(Z, Z) = g(Z, Z_2)|_0^b + \int_0^b \|Z_1\|^2 dt = g(Z(b), Z_2(b)) + \int_0^b \|\sum \dot{\phi}_i Y_i\|^2 dt.$$

Die Entwicklung des Jacobifeldes Y nach den Jacobifeldern Y_i hat konstante Koeffizienten, und wegen $Y(b) = Z(b)$ ist $Y = \sum \phi_i(b)Y_i$ und $\dot{Y} = \sum \phi_i(b)\dot{Y}_i$. Damit finden wir

$$I(Z, Z) = g(Y(b), \dot{Y}(b)) + \int_0^b \|\sum \dot{\phi}_i Y_i\|^2 dt = I(Y, Y) + \int_0^b \|\sum \dot{\phi}_i Y_i\|^2 dt \geq I(Y, Y).$$

Gleichheit impliziert $\sum \dot{\phi}_i Y_i = 0$, also Konstanz der $\phi_i = \phi_i(b)$ und damit $Z = Y$.

Fall B: $Y(0) = Z(0)$ beliebig.

Unter den gegebenen Voraussetzungen gilt

$$I(Z, Y) = \sum g(\dot{Y}, Z) \Big|_{t_{i-1}+0}^{t_i-0} = g(\dot{Y}, Z) \Big|_{a+0}^{b-0} = g(\dot{Y}, Y) \Big|_{a+0}^{b-0} = I(Y, Y).$$

Vergleich von $Z - Y \in \hat{\Gamma}^0$ mit dem Jacobifeld 0 liefert nach Fall A

$$0 = I(0, 0) \leq I(Z - Y, Z - Y) = I(Z, Z) - 2I(Z, Y) + I(Y, Y)$$

mit Gleichheit nur für $Z = Y$. □

Korollar 119. Sei $c : [0, b] \rightarrow M$ eine Geodätische. Dann gilt

c hat keine konjugierten Punkte in $[0, b] \iff$ Die Indexform von c ist positiv definit auf $\hat{\Gamma}^0$.

Beweis. Zu (\implies) . Folgt aus dem Indexlemma mit $Y = 0$.

Zu (\impliedby) . Hat c einen konjugierten Punkt $t_0 \in]0, b]$, so sei Y ein nicht-triviales normales Jacobifeld mit $Y(0) = 0$ und $Y(t_0) = 0$. Definiere $Z \in \hat{\Gamma}^0$ durch $Z(t) := Y(t)$ für $0 \leq t \leq t_0$ und $Z(t) = 0$ sonst. Dann folgt $I(Z, Z) = 0$ und I ist nicht positiv definit. \square

Definition 120 (Index, Nullität). Der *Index* einer symmetrischen Bilinearform β auf einem reellen Vektorraum V ist die maximale Dimension eines Unterraums von V , auf dem die Form negativ definit ist. Ihre *Nullität* ist die Dimension von $\ker(v \mapsto \beta(v, \cdot))$.

Im weiteren werden wir es gelegentlich mit der Indexform von *Einschränkungen* der Geodätischen $c : [0, b] \rightarrow M$ auf Teilintervalle $[0, t]$ zutun haben. Wir bezeichnen diese mit

$$I_t(Y, Z) := I_{c|_{[0, t]}}.$$

Entsprechend definieren wir $\hat{\Gamma}_t$ und $\hat{\Gamma}_t^0$. Wir schreiben auch $c_t := c|_{[0, t]}$.

Definition 121 (Multiplizität konjugierter Punkte). Die Multiplizität eines zu 0 konjugierten Punktes $t \in]0, b]$ einer Geodätischen $c : [0, b] \rightarrow M$ ist die Dimension des Vektorraumes aller normalen Jacobifelder längs c , die in 0 und t verschwinden. Nach Lemma 116 ist das die Nullität der Indexform von I_t auf $\hat{\Gamma}_t^0$.

Lemma 122. Sei $c : [0, b] \rightarrow M$ eine Geodätische ohne konjugierte Punkte. Dann ist das Randwertproblem

$$\begin{aligned} \ddot{Y} + R(Y, \dot{c})\dot{c} &= 0 \\ Y(0) &= y_0, \quad Y(b) = y_b \end{aligned}$$

für alle $y_0 \in \dot{c}(0)^\perp$, $y_b \in \dot{c}(b)^\perp$ eindeutig lösbar.

Beweis. Der Raum JF der normalen Jacobifelder auf c ist isomorph zum Raum der Anfangsbedingungen $\dot{c}(0)^\perp \times \dot{c}(b)^\perp$, hat also die Dimension $2(m-1)$. Weil c keine konjugierten Punkte hat, ist andererseits die Abbildung

$$\begin{aligned} JF &\rightarrow \dot{c}(0)^\perp \times \dot{c}(b)^\perp \\ Y &\mapsto (Y(0), Y(b)) \end{aligned}$$

injektiv, also bijektiv. \square

Satz 123 (Indexsatz von Morse). Sei $c : [0, b] \rightarrow M$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodätische in M . Dann ist der Index der Indexform von c endlich und gleich der mit Multiplizitäten gezählten Anzahl der zu 0 konjugierten Punkte von c in $]0, b[$.

Beweis. Wir wählen eine Zerlegung

$$0 = t_0 < \dots < t_n = b,$$

so daß $c|_{[t_{i-1}, t_i]}$ für alle i eine kürzeste Geodätische ohne konjugierte Punkte ist. Das ist möglich nach Lemma 46. Wir setzen für $j = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned}\hat{\Gamma}_j^- &:= \{Y \in \hat{\Gamma}_{t_j} \mid Y(0) = 0 \text{ und } Y|_{[t_{i-1}, t_i]} \text{ ist für alle } i \leq j \text{ ein Jacobifeld}\}, \\ \hat{\Gamma}^- &:= \hat{\Gamma}_n^- \cap \hat{\Gamma}^0, \\ \hat{\Gamma}^+ &:= \{Z \in \hat{\Gamma}^0 \mid Z(t_i) = 0 \text{ für alle } i\}.\end{aligned}$$

1. Schritt. Wir zeigen

$$\hat{\Gamma}^0 = \hat{\Gamma}^- \oplus \hat{\Gamma}^+ \quad (89)$$

$$I(\hat{\Gamma}^-, \hat{\Gamma}^+) = 0, \quad (90)$$

$$I \text{ ist auf } \hat{\Gamma}^+ \text{ positiv definit.} \quad (91)$$

Nach Lemma 122 ist auf $[t_{i-1}, t_i]$ das Randwertproblem

$$\begin{aligned}\ddot{Y} + R(Y, \dot{c})\dot{c} &= 0 \\ Y(t_{i-1}) &= y_{i-1}, \quad Y(t_i) = y_i\end{aligned}$$

eindeutig lösbar. Daher gibt es zu $X \in \hat{\Gamma}^0$ genau ein $Y \in \hat{\Gamma}^-$ mit

$$Y(t_i) = X(t_i) \quad \text{für alle } i.$$

Also ist $X - Y \in \hat{\Gamma}^+$ und es folgt (89).

Für $Y \in \hat{\Gamma}^-$ und $Z \in \hat{\Gamma}^+$ ist

$$I(Y, Z) = \sum g(\dot{Y}, Z)|_{t_{i-1}+0}^{t_i-0} - \int_0^b g(\ddot{Y} + R(Y, \dot{c})\dot{c}, Z) dt = 0.$$

Das beweist (90).

Schließlich ist für $Z \in \hat{\Gamma}^+$

$$I(Z, Z) = \sum_{i=1}^n I(Z|_{[t_{i-1}, t_i]}, Z|_{[t_{i-1}, t_i]}),$$

und aus dem Korollar 119 folgt (91).

Damit wissen wir, daß Index und Nullität der Indexform I auf $\hat{\Gamma}^0$ gleich denen von I auf $\hat{\Gamma}^-$ sind. Aber $\hat{\Gamma}^-$ ist endlich-dimensional, nämlich

$$\hat{\Gamma}^- \cong \dot{c}(t_1)^\perp \oplus \dots \oplus \dot{c}(t_{n-1})^\perp, \quad (92)$$

Also sind Index und Nullität von I endlich.

2. Schritt. Wir untersuchen nun die Funktion

$$\iota(t) := \text{Index}(I_t).$$

Offenbar ist $\iota(t) = 0$ für kleine $t > 0$, weil die Geodätische ein Stück weit minimierend und die Indexform positiv definit sind. Weiter ist $\iota(t)$ monoton wachsend, weil $I_t(Y, Y) = I_s(Y, Y)$, wenn $t < s$ und $Y|_{[t, s]} = 0$. Ein Unterraum von $\hat{\Gamma}_t^0$, auf dem I_t negativ definit ist, liefert also einen gleich-dimensionalen Unterraum mit derselben Eigenschaft von $\hat{\Gamma}_s^0$, wenn man die Vektorfelder trivial erweitert.

Die Definition von $\iota(t)$ ist unabhängig von der Zerlegung durch die t_j . Darum können wir für die lokale Untersuchung von $\iota(t)$ annehmen, daß $t_{j-1} < t < t_j$ und I_t eine quadratische Form auf dem endlich-dimensionalen Vektorraum $\hat{\Gamma}_j^-$ ist:

Für $Y \in \hat{\Gamma}_j^-$ und $t_{j-1} < t < t_j$ sei Y_t das Vektorfeld mit

$$\begin{aligned} Y_t &= Y && \text{auf } [0, t_{j-1}], \\ \ddot{Y}_t + R(Y_t, \dot{c})\dot{c} &&& \text{auf } [t_{j-1}, t] \\ Y_t(t) &= 0. \end{aligned} \tag{93}$$

Vergleiche das Bild unten. Dann ist

$$\begin{aligned} I_t(Y_t, Y_t) &= I_{t_{j-1}}(Y, Y) + \underbrace{g(\dot{Y}_t(t), Y_t(t))}_{=0} - g(\dot{Y}_t(t_{j-1} + 0), Y_t(t_{j-1})) \\ &= I_{t_{j-1}}(Y, Y) - g(\dot{Y}_t(t_{j-1} + 0), Y(t_{j-1})). \end{aligned}$$

Beachte: Einzig $\dot{Y}_t(t_{j-1} + 0)$ ist auf $]t_{j-1}, t_j[$ stetig(!) abhängig von t . Ist daher I_t auf einem Unterraum von $\hat{\Gamma}_j^-$ negativ definit, so gilt dasselbe für I_s mit s nah bei t . Also gibt es $\epsilon > 0$ mit

$$|t - s| < \epsilon \implies \iota(s) \geq \iota(t)$$

Aus der Monotonie von ι folgt

$$t - \epsilon < s \leq t \implies \iota(s) = \iota(t).$$

Zum Beweis des Indexsatzes müssen wir schließlich noch folgendes zeigen: Ist $t \in]t_{j-1}, t_j[$ ein konjugierter Punkt der Multiplizität d , d.h. ist die Nullität von I_t gleich d , so gibt es $\epsilon > 0$ mit

$$t < s < t + \epsilon \implies \iota(s) = \iota(t) + d \tag{94}$$

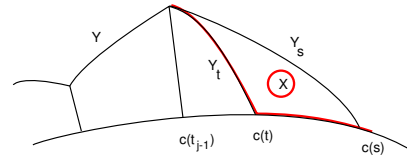
Zunächst ist I_t positiv definit auf einem Unterraum von $\hat{\Gamma}_j^-$ der Kodimension $\iota(t) + d$, und nach dem obigen Stetigkeitsargument gibt es $\epsilon > 0$, so daß für $t \leq s < t + \epsilon$ auch I_s positiv definit auf diesem Raum, also

$$\iota(s) \leq \iota(t) + d.$$

Wir wollen die umgekehrte Ungleichung zeigen. Seien zunächst $t_{j-1} < t < s < t_j$.

Seien Y_t bzw. Y_s die „Jacobi-Fortsetzungen“ eines $Y \in \hat{\Gamma}_j^-$ entsprechend (93) und sei $X \in \hat{\Gamma}_s^0$ definiert durch

$$X(\tau) := \begin{cases} Y_t(\tau) & \text{für } 0 \leq \tau \leq t, \\ 0 & \text{für } t \leq \tau \leq s. \end{cases}$$



Dann folgt aus dem Indexlemma 118

$$I_t(Y_t, Y_t) = I_s(X, X) > I_s(Y_s, Y_s).$$

Ist I_t negativ definit auf einem Unterraum von $\hat{\Gamma}_j^-$, so ist I_s negativ definit auf der direkten Summe dieses Raumes und des Nullraumes von I_t . Daher gilt

$$\iota(s) \geq \iota(t) + d.$$

Damit ist der Indexsatz von Morse bewiesen. □

23 Der Schnitort

Im folgenden schreiben wir

$$]0, +\infty] :=]0, +\infty[\cup \{+\infty\}$$

und versehen diesen Raum mit der Topologie, die erzeugt wird von allen offenen Intervalle $]a, b[\subset]0, +\infty[$ und allen Mengen der Form $]a, +\infty] :=]a, +\infty[\cup \{+\infty\}$.

Definition 124. Sei M eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit.

- (i) Auf dem Einheitstangentenbündel T^1M definieren wir eine Funktion mit Werten in $]0, +\infty]$ wie folgt:

$$s(v) := \sup\{t \in \mathbb{R} \mid d(\exp 0v, \exp tv) = t\}.$$

Wir nennen s die *Schnittortfunktion* von M .

Die Geodätische $t \mapsto \exp tv$ ist also, falls $s(v) < \infty$, genau bis $\exp s(v)v$ Kürzeste.

- (ii) Ist $p \in M$, $v \in T_p^1M$ und $s(v) < \infty$, so heißt $\exp s(v)v$ der *Schnittpunkt* von p längs der Geodätischen $t \mapsto \exp tv$. Die Menge

$$\text{Cut}(p) := \{\exp s(v)v \mid v \in T_p^1M, s(v) < \infty\}$$

heißt der *Schnitort* von p .

Der folgende Satz klärt, wann Geodätische aufhören, Kürzeste zu sein.

Satz 125. Seien $v \in T_p^1M$, $c(t) := c_v(t) := \exp tv$ und $0 < t_0 < \infty$.

- (i) Ist $t_0 := s(v)$, so gilt

- a) t_0 ist der erste zu 0 konjugierte Parameter von c , oder
b) es gibt eine von c verschiedene Kürzeste von p nach $c(t_0)$.

- (ii) Gilt umgekehrt a) oder b), so ist $s(v) \leq t_0$.

Beweis. Zu (i). Weil $c(t)$ bei $t_0 = s(v)$ aufhört, Kürzeste zu sein, gibt es zu jeder positiven Nullfolge (ϵ_j) eine Folge (γ_j) von nach der Bogenlänge parametrisierten Kürzesten von p nach

$$c(t_0 + \epsilon_j) = \gamma_j(t_0 + \epsilon'_j), \quad (95)$$

die kürzer sind als $t_0 + \epsilon_j$, d.h. mit

$$\epsilon'_j < \epsilon_j.$$

Nach Wahl einer Teilfolge können wir annehmen, daß $\dot{\gamma}_j(0) \rightarrow v_*$ konvergiert. Sei

$$c_{v_*}(t) := \exp tv_*.$$

Aus Stetigkeitsgründen ist c_{v_*} eine Kürzeste von p nach $\lim_{j \rightarrow \infty} c_v(t_0 + \epsilon_j) =: q$. Ihre Länge ist also t_0 .

Ist $c_{v_*} \neq c_v$, so sind wir fertig.

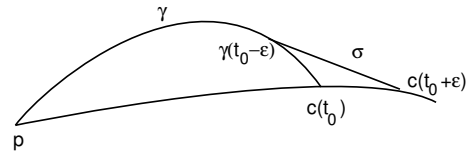
Andernfalls ist $v_* = v$, und wir müssen wir zeigen, daß $\exp|_{T_pM}$ in t_0v singulär ist. Dann ist t_0 zu 0 konjugiert, und nach Definition von t_0 und dem Satz von Jacobi auch der erste zu 0 konjugierte Parameter längs c_v .

Wäre $\exp|_{T_p M}$ in $t_0 v$ regulär, so würde es eine Umgebung U von $t_0 v$ diffeomorph auf eine Umgebung von q abbilden. Für hinreichend großes j liegen aber $(t_0 + \epsilon_j)v$ und $(t_0 + \epsilon'_j)\dot{\gamma}_j(0)$ in U . Widerspruch zu (95).

Zu (ii). Ist t_0 konjugiert zu 0 auf c , so ist c nach dem Satz von Jacobi höchstens bis t_0 ein Kürzeste.

Gibt es eine von c verschiedene Geodätische $\gamma : [0, \infty[\rightarrow M$ mit $\|\dot{\gamma}\| = 1$ von p nach $\gamma(t_0) = c(t_0)$, so liegen für hinreichend kleines $\epsilon > 0$ die Punkte $\gamma(t_0 - \epsilon)$ und $c(t_0 + \epsilon)$ in einer geodätisch konvexen Umgebung von $c(t_0)$.

Sie lassen sich in dieser durch eine eindeutige Kürzeste σ verbinden. Wir können wegen $c \neq \gamma$ annehmen, daß $\gamma(t_0 - \epsilon) \neq c(t_0 - \epsilon)$. Wäre $L(\sigma) = 2\epsilon$, so könnte man $\gamma(t_0 - \epsilon)$ und $c(t_0 + \epsilon)$ auch mit einer gebrochenen Geodätischen gleicher Länge verbinden. Widerspruch! Also ist σ kürzer als 2ϵ und $d(p, c(t_0 + \epsilon)) < t_0 + \epsilon$. Also ist c höchstens bis t_0 Kürzeste.



□

Korollar 126. Ist q der Schnittpunkt von p längs der Geodätischen c , so ist p der Schnittpunkt von q längs der umgekehrt durchlaufenen Geodätischen.

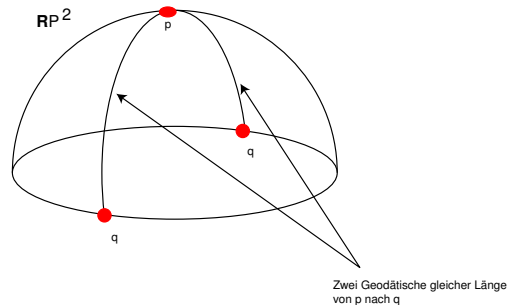
Beispiel 127. Auf einem Kreiskegel oder -zylinder gibt es wegen $K = 0$ keine konjugierten Punkte. Der Schnittort eines Punktes p besteht aus der gegenüberliegenden Mantellinie.

Auf der Kugel ist jede Geodätische bis zum Antipodenpunkt Kürzeste, der Antipode ist der Schnittort.

Auf dem reellen projektiven Raum der Krümmung 1 ist

$$\{q \in \mathbb{R}P^m \mid d(p, q) = \frac{\pi}{2}\}$$

der Schnittort von p . Das ist eine projektive Hyperebene, die auf der überlagernden Sphäre dem Äquator zu den Polen $\pm p$ entspricht.



□

Lemma 128. Die Schnittortfunktion $s : T^1 M \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ist stetig.

Beweis. Wir betrachten eine konvergente Folge $v_i \rightarrow v_*$ in $T^1 M$ und setzen $s(v_i) =: t_i$ und $s(v_*) =: t_*$.

1. Schritt. Wir zeigen

$$\limsup t_i \leq t_*. \tag{96}$$

Das ist klar, wenn $t_* = +\infty$. Sei also $t_* < +\infty$ und $\epsilon > 0$. Ist $t_i > t_* + \epsilon$, so ist

$$d(c_{v_i}(0), c_{v_i}(t_* + \epsilon)) = t_* + \epsilon.$$

Gäbe es unendlich viele Indizes i mit dieser Eigenschaft, so wäre aus Stetigkeitsgründen

$$d(c_{v_*}(0), c_{v_*}(t_* + \epsilon)) = t_* + \epsilon.$$

im Widerspruch zur Definition von t_* . Also gibt es höchstens endlich viele solche t_i und $\limsup t_i \leq t_*$.

2. Schritt. Wir zeigen

$$\liminf t_i \geq t_*. \quad (97)$$

Wir können annehmen, daß $\liminf t_i < +\infty$, sonst ist nichts zu zeigen. Und wir können annehmen, daß

$$\liminf t_i = \lim t_i =: t_\# \text{ (Teilfolge).}$$

Sind unendlich viele der t_i längs c_{v_i} konjugiert zu 0, d.h ist $\exp_{\pi(v_i)}$ singulär in $t_i v_i$, so ist auch $\exp_{\pi(v_*)}$ singulär in $t_\# v_*$ und $t_\# \geq t_*$. Also können wir annehmen, daß keines der t_i längs c_{v_i} konjugiert ist zu 0.

Daher gibt es eine Folge (γ_i) nach der Bogenlänge parametrisierter Geodätischer von $c_{v_i}(0)$ nach $c_{v_i}(t_i)$ von der Länge $L(\gamma_i) = t_i$. Ohne Einschränkung konvergieren die γ_i gegen eine Geodätische γ von $c_{v_*}(0)$ nach $c_{v_*}(t_\#)$.

Falls $\dot{\gamma}(0) \neq v_*$ ist $t_* \leq t_\#$ nach Satz 125.

Falls $\dot{\gamma}(0) = v_*$, zeigt man wie im Teil (i) vom Beweis zu diesem Satz, daß $t_\#$ konjugiert zu 0 längs c_{v_*} ist. Also ist ebenfalls $t_* \leq t_\#$.

3. Schritt. Aus (96) und (97) folgt die Behauptung. \square

Korollar 129. *Der Schnittpunkt $\text{Cut}(p)$ ist abgeschlossen.*

Beweis. Sei (v_i) eine Folge in $T_p^1 M$ und

$$q = \lim_{i \rightarrow \infty} \exp s(v_i) v_i.$$

Wir müssen zeigen, daß dann $q \in \text{Cut}(p)$. Ohne Einschränkung existiert $v := \lim_{i \rightarrow \infty} v_i$, und weil s stetig ist und

$$s(v_i) = d(p, \exp s(v_i) v_i) \rightarrow d(p, q) < \infty,$$

existiert $s(v) = \lim s(v_i) \in \mathbb{R}$. Aus Stetigkeitsgründen ist dann $q = \exp s(v) v \in \text{Cut}(p)$. \square

Korollar 130. *Sind M vollständig und zusammenhängend, $p \in M$ und $s|_{T_p^1 M}$ beschränkt, so ist M kompakt.*

Beweis. Ist $s_0 := \sup (s|_{T_p^1 M})$, so ist $s_0 < \infty$ und

$$M = \{\exp tv \mid t \in [0, s_0], v \in T_p^1 M\}$$

das Bild einer kompakten Menge unter einer stetigen Abbildung. \square

Korollar 131. *Seien M vollständig und zusammenhängend und $p \in M$. Wir definieren*

$$\begin{aligned} U &:= \{tv \mid v \in T_p^1 M \text{ und } t < s(v)\}, \\ \bar{U} &:= \{tv \mid v \in T_p^1 M \text{ und } t \in [0, s(v)] \cap [0, +\infty]\}. \end{aligned}$$

Dann gilt

- (i) U ist offen und sternförmig bezüglich 0, also diffeomorph zur offenen Kugel, und wird durch \exp diffeomorph auf $M \setminus \text{Cut}(p)$ abgebildet.

(ii) $\exp(\bar{U}) = M$.

Eine kompakte Mannigfaltigkeit entsteht also aus einer Vollkugel durch Identifizierung von Randpunkten. Die ganze Topologie ist im Schnittort konzentriert.

Beweis. Zu (i). Ist $t_0 v_0 \in U$ und $\epsilon := s(v_0) - t_0 > 0$, so gibt es eine Umgebung U_0 von $v_0 \in T_p^1 M$ mit $s(v) > t_0 + \frac{\epsilon}{2}$ für alle $v \in U_0$. Dann ist aber $\{tv \mid v \in U_0 \text{ und } \frac{t_0}{2} < t < t_0 + \frac{\epsilon}{2}\}$ eine in U enthaltene offene Umgebung von $t_0 s(v_0)$. Also ist U offen.

Nach dem Satz 125 ist $\exp|U$ injektiv und ein lokaler Diffeomorphismus, also ein Diffeomorphismus.

Ist $q \in \text{Cut}(p)$, so gibt es eine Kürzeste von p nach q , die danach keine Kürzeste mehr ist. Es gibt dann keine andere Kürzeste von p nach q , die länger Kürzeste ist (Ecke schneiden). Also ist $\exp(U) \subset M \setminus \text{Cut}(p)$. Ist umgekehrt $q \in M \setminus \text{Cut}(p)$ und $\gamma : [0, b] \rightarrow M$ eine Kürzeste von p nach $q = \gamma(b)$, so ist $s(\dot{\gamma}(0)) > b$, also $q \in \exp(U)$.

Zu (ii). Klar. □

Satz 132. Sei $q \in \text{Cut}(p)$ und

$$d(p, q) = d(p, \text{Cut}(p)).$$

Dann gilt:

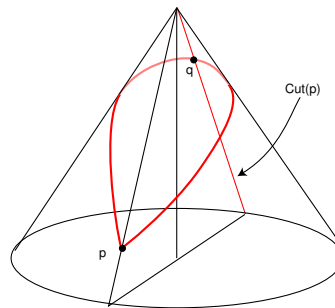
- q ist zu 0 konjugiert längs einer kürzesten Geodätischen von p nach q oder
- es gibt genau zwei nach der Bogenlänge parametrisierte Kürzeste

$$c_1, c_2 : [0, b] \rightarrow M$$

von p nach q . Für diese ist

$$\dot{c}_1(b) = -\dot{c}_2(b),$$

d.h. c_1 und c_2 bilden eine geodätische Schleife.



Beweis. Ist q längs keiner Kürzesten zu p konjugiert, so gibt es also zwei kürzeste Geodätische

$$c_1, c_2 : t \mapsto \exp tv_i, 0 \leq t \leq b$$

von p nach q . Wir nehmen an, daß

$$\dot{c}_1(b) \neq -\dot{c}_2(b),$$

und wollen daraus einen Widerspruch herleiten. Dann ist die Behauptung bewiesen.

Unter der gemachten Annahme gibt es $w \in T_q M$ mit

$$g(w, \dot{c}_i(b)) < 0, \quad i = 1, 2.$$

Wir wählen eine Kurve $\sigma :]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow M$ mit

$$\sigma(0) = q, \quad \dot{\sigma}(0) = w,$$

die das exp-Bild von Kurven $\sigma_i :]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow T_p M$ mit

$$\sigma_i(0) = bv_i$$

ist. Für die erste Variation der Länge $L_i(\tau)$ von

$$c_{i,\tau}(t) := \exp \frac{t}{b} \sigma_i(\tau)$$

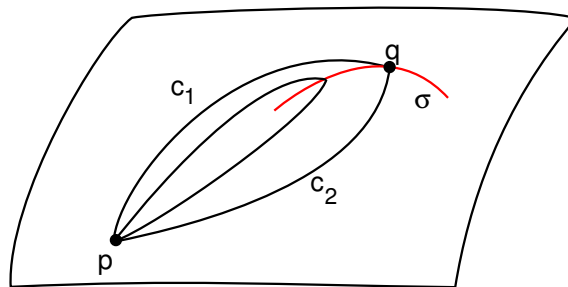
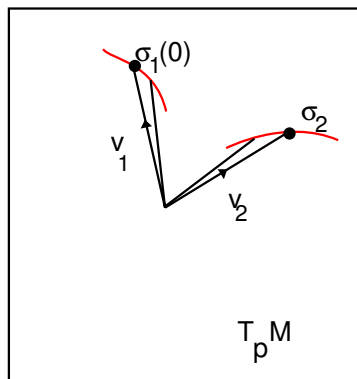
gilt dann

$$\frac{d}{d\tau} \Big|_0 L_i(\tau) = g(\dot{c}_i(b), w) < 0.$$

Also gibt es ein $\tau \in]0, \epsilon[$ mit

$$L(c_{i,\tau}) < L(c_{i,0}) = L(c_i) = d(p, q).$$

Hat man zwei verschiedene Geodätische von p aus mit gleichem Endpunkt, so liegt auf einer davon ein Punkt von $\text{Cut}(p)$, dessen Abstand von p in unserem Fall also $< d(p, q)$ ist. Widerspruch!



□

24 Der Injektivitätsradius I

Definition 133 (Injektivitätsradius). Sei M eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit der Schnittortfunktion $s : T^1M \rightarrow [0, +\infty]$.

(i) Für $p \in M$ heißt

$$i(p) := \inf_{v \in T_p^1M} s(v)$$

der Injektivitätsradius in p .

(ii)

$$i(M) := \inf_{v \in T^1M} s(v)$$

heißt der *Injektivitätsradius von M* .

Für den Beweis des Sphärensatzes sind untere Schranken für den Injektivitätsradius von entscheidender Wichtigkeit. Wir versuchen solche zu gewinnen. Das wird zunächst nur mit einer Dimensionseinschränkung gelingen, den schwierigen Fall verschieben wir bis nach dem Beweis des Sphärensatzes.

Satz 134. Sei M eine vollständige zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit mit positiven Krümmungsschranken

$$0 < \delta \leq K \leq \Delta.$$

Dann gilt:

- $i(M) \geq \frac{\pi}{\sqrt{\Delta}}$ oder
- Es gibt eine glatt geschlossene Geodätische in M von der Länge $2i(M)$.

Beachte: Alle nicht-trivialen geschlossenen Geodätischen haben Länge $\geq 2i(M)$.

Beweis. Nach dem Satz von Bonnet-Myers ist M kompakt und damit auch T^1M kompakt und es gibt $p \in M$ und $v \in T_p^1M$ mit

$$s(v) = i(M).$$

Sei $q := \exp s(v)v$. Dann ist also $d(p, q) = i(M) = d(p, \text{Cut}(p))$. Ist q konjugiert zu p , so ist nach dem Vergleichssatz 108

$$d(p, q) \geq \frac{\pi}{\sqrt{\Delta}}.$$

Andernfalls gibt es nach Satz 132 eine geodätische Schleife von p durch q . Umgekehrt ist aber $d(q, p) = i(M) = d(q, \text{Cut}(q))$, und nach demselben Satz ist die Schleife auch in p glatt geschlossen, also eine geschlossene Geodätische der Länge $2i(M)$.

Auf einer geschlossenen Geodätischen ist ein Punktepaar, das die Länge halbiert, offenbar durch zwei verschiedene Geodätische verbindbar und deshalb vom Abstand $\geq i(M)$. Also hat jede nichttriviale geschlossene Geodätische die Länge $\geq 2i(M)$. \square

Wir wollen den zweiten Fall genauer ansehen und nehmen an, daß

$$i(M) = d(p, q) < \frac{\pi}{\sqrt{\Delta}}$$

Wir betrachten eine geschlossene Geodätische c durch $p = c(0)$ von der Länge $i(M)$ wie oben. Wir machen weiter die

Annahme: Es gibt ein paralleles, glatt geschlossenes normales Einheitsvektorfeld längs c . (98)

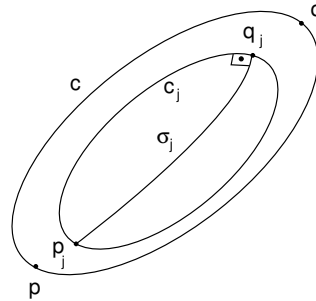
Wie im Lemma von Synge folgt die Existenz einer Variation c_τ , so daß $L(c_\tau) < L(c)$ für alle $\tau \neq 0$. (Aber die c_τ sind natürlich i.A. keine Geodätischen.) Sei (τ_j) eine positive Nullfolge und q_j ein Punkt von $c_j := c_{\tau_j}$ mit maximalem Abstand von $c_j(0) =: p_j$. Dann ist

$$d(q_j, p_j) \leq \frac{1}{2}L(c_j) < \frac{1}{2}L(c) = d(p, q) = i(M),$$

und daher gibt es eine eindeutig bestimmte kürzeste nach der Bogenlänge parametrisierte Geodätischen σ_j von $\sigma_j(0) = q_j$ nach p_j .

Sei o.E. $\dot{\sigma}_j(0)$ konvergent gegen ein $w \in T_{q_*}M$. Dann liegt q_* auf c und hat von $\lim_j p_j = p$ maximalen Abstand. Dann ist aber $q_* = q$ und $\sigma : t \mapsto \exp tw$ ist eine kürzeste Geodätische von q nach p .

Nach Konstruktion von σ_j ist $\dot{\sigma}_j(0)$ orthogonal zum Tangentialvektor von c_j im selben Punkt. Es folgt $w \perp \dot{c}$ bei q . Also gibt es drei verschiedene kürzeste Geodätische zwischen p und q im Widerspruch zu Satz 132.



Wir prüfen daher die gemachte Annahme (98). Ist M gerad-dimensional und orientierbar, so gibt es wirklich längs jeder geschlossenen Geodätischen ein paralleles glatt geschlossenes normales Einheitsvektorfeld, vgl. den Beweis zum Satz 96 von Synge .

Wir erhalten

Satz 135. Sei M eine orientierbare kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit gerader Dimension mit

$$0 < \delta \leq K \leq \Delta.$$

Dann gilt $i(M) \geq \frac{\pi}{\sqrt{\Delta}}$.

Im ungerad-dimensionalen Fall erfordert die Abschätzung des Injektivitätsradius stärkere Voraussetzungen und ist viel schwieriger zu beweisen. Es gilt

Satz 136 (Klingenberg). Sei M eine vollständige, einfach-zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit mit

$$0 < \delta \leq K \leq \Delta$$

und

$$4\delta > \Delta,$$

so folgt

$$i(M) \geq \frac{\pi}{\sqrt{\Delta}} > \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}}.$$

Beweis. Später

□

25 Der Sphärensatz

Wir verschieben den Beweis von Klingenberg's Abschätzung für den Injektivitätsradius und zeigen erst einmal, wie daraus der Sphärensatz folgt. Wir beweisen:

Satz 137 (Sphärensatz). Sei (M, g) eine vollständige, zusammenhängende, einfach-zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit mit

$$0 < \delta \leq K \leq \Delta$$

und

$$4\delta > \Delta.$$

Dann ist M homöomorph zur Sphäre.

Der Beweis benötigt immer noch einige Vorbereitungen.

Lemma 138 (Berger). Sei (M, g) vollständig. Seien $p, q \in M$, so daß $d(p, \cdot)$ in q ein lokales Maximum L hat. Sei $v \in T_q^1 M$. Dann gibt es eine Kürzeste $c : [0, L] \rightarrow M$ von q nach p mit Winkel

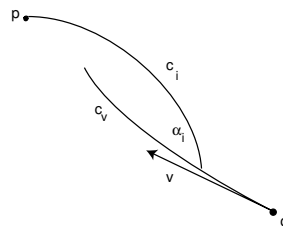
$$\angle(\dot{c}(0), v) \leq \frac{\pi}{2}.$$

In jedem Halbraum von $T_q M$ findet man also Anfangsvektoren kürzester Verbindungen nach p . Insbesondere gibt es also zwischen p und q keine eindeutig bestimmte Kürzeste.

Beweis. Sei $c_v(t) := \exp(tv)$.

Für eine Folge (t_i) mit $t_i \searrow 0$ und nach der Bogenlänge parametrisierten Kürzesten $c_i : [0, L_i] \rightarrow M$ von $q_i := c_v(t_i)$ nach p bezeichne α_i den Winkel zwischen $\dot{c}_i(0)$ und $\dot{c}_v(t_i)$. Wir zeigen, daß wir (t_i) und (c_i) so wählen können, daß

$$\alpha_i \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{für alle } i. \quad (99)$$

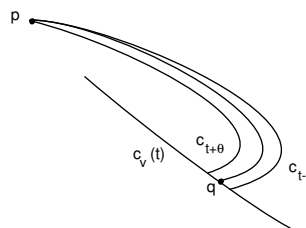


Dann kann man o.E. annehmen, daß $\dot{c}_i(0) \rightarrow w \in T_p M$ mit Winkel $\angle(v, w) \leq \frac{\pi}{2}$ und $L_i \rightarrow L$. Die Geodätische $c_w : s \mapsto \exp(sw)$ geht dann von q nach $\lim \exp(\dot{c}_i(0)L_i) = p$. Ihre Länge ist $\lim L_i = \lim d(p, c_v(t_i)) = d(p, q)$. Also bleibt nur noch der Beweis von (99).

Wäre das falsch, so gäbe es $t_0 > 0$, so daß für alle $t \in]0, t_0[$ und alle Kürzesten $c_t : [0, L_t] \rightarrow M$

von $c_v(t)$ nach p der Anfangswinkel $> \frac{\pi}{2}$ ist. Wir wählen ein solches c_t und eine Variation $\theta \mapsto c_{t+\theta}$, so daß $c_{t+\theta}$ von $c_v(t + \theta)$ nach p geht. (Existiert!) Dann ist nach der Formel für die erste Variation

$$\frac{d}{d\theta} L(c_{t+\theta})|_{\theta=0} = -g(\dot{c}_v(t), \dot{c}_t(0)) > 0,$$



also $L(c_{t+\theta})$ streng monoton wachsend. Beachte, daß die Nachbarkurven $c_{t+\theta}$ nicht unbedingt Kürzeste sind. Aber natürlich ist dann für kleines $\theta > 0$,

$$d(p, c_v(t - \theta)) \leq L(c_{t-\theta}) < L(c_t) = d(p, c_v(t)).$$

Damit ist aber $t \mapsto d(p, c_v(t))$ ist auf $]0, t_0[$ streng monoton wachsend im Widerspruch zur Voraussetzung, daß $d(p, \cdot)$ in q ein lokales Maximum annimmt. \square

Für das nächste Lemma benötigen wir die Information über den Injektivitätsradius.

Lemma 139 (Berger). *Unter den Voraussetzungen von Satz 137 sei p, q ein Punktepaar mit maximalem Abstand $d(p, q) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}$ nach Bonnet-Myers).*

Dann ist für alle $x \in M$

$$\min\{d(p, x), d(q, x)\} \leq \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}}.$$

Für $\rho > \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}}$ ist also

$$M \subset \exp(W_\rho(p)) \cup \exp(W_\rho(q)).$$

Beweis von Tsukamoto (1962). Andernfalls gibt es ein $x \in M$ mit $d(p, x), d(q, x) > \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}}$. Sei o.E $d(p, x) \geq d(q, x)$.

Weil $i(M) > \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}}$, gibt es ein $\rho < i(M)$, so daß

$$d(p, x) \geq d(q, x) > \rho > \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}}. \quad (100)$$

Die Exponentialabbildung bildet dann $W_\rho(p)$ und $W_\rho(q)$ diffeomorph auf offene Bälle $U_\rho(p)$ und $U_\rho(q)$ ab.

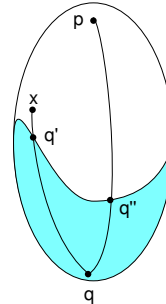
Wir betrachten kürzeste Geodätische von q nach x und p . Diese schneiden den Rand von $U_\rho(q)$ in Punkten q' und q'' . Der Punkt q' liegt nicht in $U_\rho(p)$, denn sonst wäre

$$d(p, x) \leq \underbrace{d(p, q')}_{< \rho = d(q, q')} + d(q', x) < d(q, q') + d(q', x) = d(q, x)$$

im Widerspruch zu (100).

Andererseits liegt q'' in $U_\rho(p)$, denn weil nach Bonnet-Myers $d(p, q) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\delta}} < 2i(M) < 2\rho$, ist

$$d(p, q'') = d(p, q) - d(q, q'') < 2\rho - \rho = \rho.$$

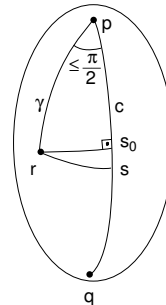


Weil der Rand von $U_\rho(q)$ wegzusammenhängend ist, gibt es einen $r \in \partial U_\rho(p) \cap U_\rho(q)$. Für dieses gilt also

$$d(p, r) = d(q, r) = \rho.$$

Wir betrachten eine kürzeste Geodätische γ von p nach r . Nach dem Lemma 138 von Berger gibt es eine kürzeste Geodätische c von p nach q , die bei p mit γ einen Winkel $\leq \frac{\pi}{2}$ einschließt. Sei s ein Punkt auf c mit Abstand ρ von p . Der Längenvergleichssatz 111 von Rauch vergleicht rps mit einem gleichschenkligen Dreieck (Schenkellänge ρ , Scheitelwinkel $\leq \pi/2$) auf der Sphäre vom Radius $1/\sqrt{\delta}$. Die Basis hat höchstens die Länge $\frac{\pi}{2\sqrt{\delta}}$, und deshalb gilt

$$d(r, s) \leq \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}} < \rho.$$



Weil andererseits $d(r, p) = d(r, q) = \rho$ ist, nimmt $d(r, \cdot)$ auf der Geodätischen c sein Minimum in einem inneren Punkt s_0 an. Die Kürzeste von r nach s_0 hat Länge

$$d(r, s_0) \leq d(r, s) \leq \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}},$$

und bildet mit c bei s_0 einen rechten Winkel. Dann ist $d(s_0, p) \leq \frac{1}{2}d(p, q) \leq \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}}$ oder $d(s_0, q) \leq \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}}$. Wir betrachten o.E. den ersten Fall und wenden auf rs_0p noch einmal den Längenvergleichssatz von Rauch an. Wir erhalten in der Vergleichssphäre ein rechtwinkliges Dreieck mit Katheten der Länge $\leq \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}}$. Die Hypothenuse hat dann höchstens die Länge $\frac{\pi}{2\sqrt{\delta}} < \rho$ im Widerspruch zu $d(s, p) = \rho$. \square

Beweis des Sphärensatzes. Sei p, q ein Punktepaar maximalen Abstandes. Dann ist keine Geodätische von p nach q jenseits von q noch Kürzeste. Deshalb ist $d(p, q) \geq i(p)$ und aus dem Satz von Bonnet-Myers und $i(M) > \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}}$ folgt

$$\frac{\pi}{\sqrt{\delta}} \geq d(p, q) \geq i(p) \geq i(M) > \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}}. \quad (101)$$

Wir definieren den Äquator von M als

$$E := \{x \in M \mid d(p, x) = d(q, x)\} \quad (102)$$

und setzen $\rho := \min\{i(p), i(q)\}$. Nach dem letzten Lemma ist für alle $x \in E$

$$0 < d(p, x) = d(q, x) \leq \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}} < \rho, \quad (103)$$

und deshalb

$$E \subset \exp W_p(\rho) \cap \exp W_q(\rho). \quad (104)$$

Wir definieren nun durch

$$H_p(x) := \frac{\exp_p^{-1} x}{d(p, x)} = \frac{\exp_p^{-1} x}{\|\exp_p^{-1} x\|}.$$

eine Abbildung $H_p : E \rightarrow T_p^1 M \subset T_p M$ in die Einheitskugel im Tangentialraum $T_p M$ bezeichnet. Man hat dann

$$\exp_p(d(p, x)H_p(x)) = x. \quad (105)$$

Offenbar ist H_p stetig.

H_p ist surjektiv: Für $v \in T_p^1 M$ betrachte $c_v(t) = \exp(tv)$.

Weil $\rho \leq i(p)$, ist $d(p, c_v(t)) = t$ für $0 \leq t \leq \rho$. Insbesondere ist $d(p, c_v(\rho)) = \rho > \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}}$.

Nach dem Lemma 139 ist dann aber $d(q, c_v(\rho)) \leq \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}} < d(p, c_v(\rho))$. Aus Stetigkeitsgründen gibt es daher ein $t_0 \in]0, \rho[$, genauer sogar $t_0 \in]0, \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}}]$, mit

$$d(p, c_v(t_0)) = d(q, c_v(t_0)),$$

d.h. $x = c_v(t_0) \in E$. Nach Konstruktion ist dann $H_p(x) = v$.

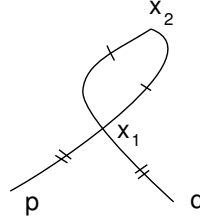
H_p ist injektiv: Andernfalls gäbe es $v \in T_p^1 M$ und t_1, t_2 mit $0 < t_1 < t_2 \leq \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}}$ mit

$$x_1 := \exp(t_1 v) \in E \quad \text{und} \quad x_2 := \exp(t_2 v) \in E.$$

Dann wäre

$$\begin{aligned} d(q, x_2) &= d(p, x_2) \\ &= d(p, x_1) + d(x_1, x_2) \\ &= d(q, x_1) + d(x_1, x_2) \end{aligned}$$

Damit erhält man nebenstehendes Bild. Das widerspricht aber der Eindeutigkeit der Kürzesten zwischen p bzw. q und x_2 .

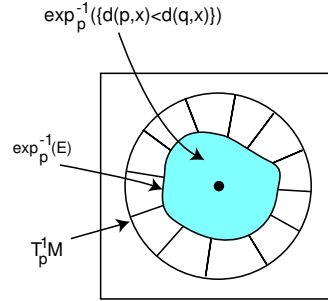


Da E kompakt ist, ist H_p ein Homöomorphismus von E auf $T_p^1 M$. Wir definieren eine Abbildung der abgeschlossenen Einheitskugel $B_p \subset T_p M$ in M durch

$$\Phi_p(tv) := \exp(td(p, H_p^{-1}(v))v)$$

für $v \in T_p^1 M$ und $0 \leq t \leq 1$. Diese Abbildung bildet die offene/abgeschlossene Einheitskugel homöomorph auf $\{x \in M \mid d(p, x) < d(q, x)\}$ bzw. $\{x \in M \mid d(p, x) \leq d(q, x)\}$ ab und für $v \in T_p^1 M$ gilt

$$\Phi_p(v) = H_p^{-1}(v). \quad (106)$$



Analog definieren wir H_q und Φ_q . Wir wählen eine lineare Isometrie

$$j_p : \mathbb{R}^m \rightarrow T_p M$$

und definieren

$$j_q : \mathbb{R}^m \rightarrow T_q M$$

durch

$$j_q(tv) = tH_q \circ H_p^{-1} \circ j_p(v), \quad \|v\| = 1, t \geq 0.$$

Weil $H_q \circ H_p^{-1}$ ein Homöomorphismus der Einheitskugeln ist, ist auch j_q ein (nicht-linearer, radial isometrischer) Homöomorphismus. Es gilt für $\|v\| = 1$

$$\Phi_q(j_q(v)) = H_q^{-1}(j_q(v)) = H_p^{-1}(j_p(v)) = \Phi_p(j_p(v)).$$

Deshalb liefert

$$\Phi(x_0, x_1, \dots, x_m) := \begin{cases} \Phi_p(j_p(x_1, \dots, x_m)), & \text{falls } x_0 \geq 0 \\ \Phi_q(j_q(x_1, \dots, x_m)), & \text{falls } x_0 \leq 0 \end{cases}$$

eine stetige, injektive und surjektive Abbildung, also einen Homöomorphismus der Sphäre $S^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ auf M . \square

26 Der Injektivitätsradius II

Wir kommen nun zur Abschätzung des Injektivitätsradius im ungerad-dimensionalen Fall, nämlich zum Beweis von

Satz 140 (=Satz 136, Klingenberg). Sei M eine vollständige, einfach-zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit mit

$$0 < \delta \leq K \leq \Delta$$

und

$$4\delta > \Delta.$$

Dann gilt

$$i(M) \geq \frac{\pi}{\sqrt{\Delta}} > \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}}.$$

Beweis. Wir können o.E. annehmen, daß $m = \dim M \geq 3$, weil wir $m = 2$ mit dem gerad-dimensionalen Fall schon erledigt haben.

Wir skalieren die Metrik von M so, daß $\Delta = 1$. Dann haben wir also

$$\frac{1}{4} < \delta \leq K \leq 1,$$

und die Behauptung lautet

$$i(M) \geq \pi > \frac{\pi}{2\sqrt{\delta}}.$$

Wir nehmen an, daß

$$i(M) < \pi,$$

und wollen daraus einen Widerspruch herleiten.

Nach Satz 134 gibt es eine nach der Bogenlänge parametrisierte geschlossene Geodätische $c : [0, L] \rightarrow M$ der Länge

$$L = 2i(M) < 2\pi.$$

Wir wählen $\epsilon > 0$ mit

$$5\epsilon < \min\{i(M), 2\pi - L, 2\pi - \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}\}. \quad (107)$$

Dann ist $2\epsilon < i(M)$ und $\exp|_{W_{2\epsilon}(p)}$ ein Diffeomorphismus. Insbesondere folgt dann, daß

$$L \geq 4\epsilon. \quad (108)$$

Weil die Zahl der konjugierten Punkte von c nach dem Indexsatz von Morse endlich ist, können wir ϵ weiter so wählen, daß $L - \epsilon$ nicht zu 0 konjugiert ist. Setzen wir $v = \dot{c}(0)$, so ist also \exp_p im Punkt $(L - \epsilon)v$ nicht degeneriert und \exp_p bildet eine Umgebung U dieses Punktes diffeomorph auf eine Umgebung von $c(L - \epsilon)$ ab.

Weil nach dem Satz von Sard die regulären Werte von $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ dicht in M liegen, können wir wegen (108) ein $u \in U$ finden, so daß

$$3\epsilon < \|u\| < L$$

und

$$q := \exp w \text{ ein regulärer Punkt von } \exp_p \text{ mit } d(q, c(L - \epsilon)) < \epsilon \text{ ist.}$$

Dann ist $c_1 : [0, 1] \rightarrow M, t \mapsto \exp tu$ eine Geodätische von p nach q von der Länge

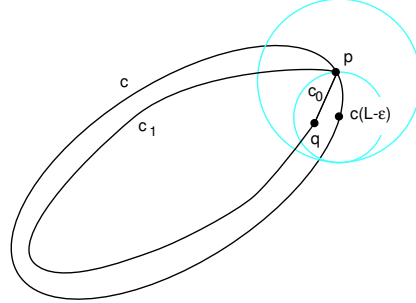
$$3\epsilon < L(c_1) < L \stackrel{(108)}{<} 2\pi - 4\epsilon. \quad (109)$$

Der Punkt q liegt in $\exp_p(W_{2\epsilon}(p))$, denn

$$d(p, q) \leq d(p, c(L - \epsilon)) + d(c(L - \epsilon), q) < 2\epsilon.$$

Also gibt es eine eindeutig bestimmte kürzeste $c_0 : [0, 1] \rightarrow M$ von p nach q von der Länge

$$L(c_0) < 2\epsilon < L(c_1). \quad (110)$$



Weil M einfach-zusammenhängend ist, gibt es eine Homotopie von c_0 nach c_1 mit festen Endpunkten. Wir zeigen im folgenden Lemma (unter Ausnutzung der oberen Krümmungsschranke) zunächst, daß jede solche Homotopie mindestens eine „lange“ Kurve c_{τ_*} mit

$$L(c_{\tau_*}) \geq 2\pi - L(c_0) > 2\pi - 2\epsilon \quad (111)$$

enthält. Wir zeigen danach (unter Ausnutzung der unteren Krümmungsschranke), daß man andererseits eine Homotopie \hat{c}_τ mit „kurzen“ Kurven

$$L(\hat{c}_\tau) < 2\pi - 2\epsilon \quad \text{für alle } \tau \quad (112)$$

wählen kann. Das ergibt den gewünschten Widerspruch und $i(M) \geq \pi$ und beendet den Beweis. \square

Lemma 141. *Sei M eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit einer positiven oberen Krümmungsschranke*

$$K \leq \Delta > 0.$$

Seien $p, q \in M$ und $c_0, c_1 : [0, b] \rightarrow M$ zwei Geodätische von p nach q mit

$$L(c_0) \leq L(c_1).$$

Sei weiter c_τ für $0 \leq \tau \leq 1$ eine Homotopie mit festen Endpunkten zwischen c_0 und c_1 . Dann gibt es ein $\tau_ \in [0, 1]$ mit*

$$L(c_0) + L(c_{\tau_*}) \geq \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}.$$

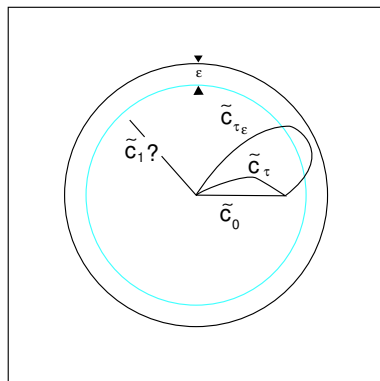
Beweis. Wenn $L(c_0) \geq \frac{\pi}{\sqrt{\Delta}}$, wählen wir $\tau_* = 1$ und sind fertig.

Sei also $L(c_0) < \frac{\pi}{\sqrt{\Delta}}$. Nach dem Vergleichssatz von Rauch ist die Exponentialabbildung auf der offenen Kugel $W(p)$ vom Radius $\frac{\pi}{\sqrt{\Delta}}$ in $T_p M$ ein lokaler Diffeomorphismus.

Daher läßt sich jede Homotopie $h : [0, b] \times [0, 1] \rightarrow \exp(W(p))$ mit Bild in $\exp_p(W(p))$ bei gegebenem Anfangspunkt eindeutig liften nach $W(p)$:

Zu $v \in W(p)$ mit $\exp(v) = h(0, 0)$ gibt es eine eindeutig bestimmte stetige Abbildung $\tilde{h} : [0, b] \times [0, 1] \rightarrow W(p)$ mit $\tilde{h}(0, 0) = v$ und $\exp \circ \tilde{h} = h$.

Weil $L(c_0) < \frac{\pi}{\sqrt{\Delta}}$ ist, läßt sich c_τ für kleine $\tau \geq 0$ also nach $W(p)$ liften, nicht aber die ganze Homotopie, denn sonst lieferte der Lift \tilde{c}_τ eine stetige Kurve $\tau \mapsto \tilde{c}_\tau(1)$ mit konstantem exp-Bild $c_\tau(1) = q$. Also wäre wegen der Eindeutigkeit die geliftete Kurve konstant und der Lift der Geodätischen c_1 wäre gleich dem von c_0 , also $c_0 = c_1$ im Widerspruch zur Voraussetzung.



Daher liegt das kompakte Bild der Homotopie c_τ nicht in $\exp(W(p))$. Also gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein τ_ϵ , so daß c_{τ_ϵ} einen Lift besitzt und $\tilde{c}_{\tau_\epsilon}$ durch die ϵ -Umgebung des Randes von $W(p)$ läuft, vgl. Abbildung.

Daher ist

$$L(c_0) + L(c_{\tau_\epsilon}) \geq \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}} - 2\epsilon.$$

Wähle eine Nullfolge (ϵ_n) , so daß die τ_{ϵ_n} gegen ein τ_* konvergieren. Dann folgt

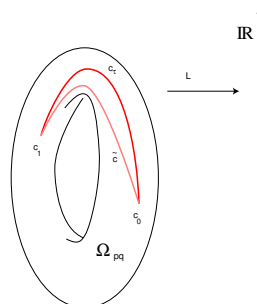
$$L(c_0) + L(c_{\tau_*}) \geq \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}.$$

□

Damit ist die Behauptung zur Gleichung (111) im Satz über den Injektivitätsradius bewiesen.

Es bleibt der Beweis, daß man unter den dortigen Bedingungen immer eine Homotopie mit kurzen Kurven finden kann, so daß also (112) gilt. Dazu braucht man völlig neue Methoden. Man betrachtet den Raum Ω_{pq} aller Kurven $c : [0, 1] \rightarrow M$ mit $c(0) = p$ und $c(1) = q$ und darauf die Längenfunktion $L : \Omega_{pq} \rightarrow \mathbb{R}$. Eine Homotopie zwischen c_0 und $c_1 \in \Omega_{pq}$ ist dann eine Kurve in Ω_{pq} . Man zeigt, daß man unter gewissen Voraussetzungen eine solche Kurve deformieren (also eine Homotopie einer Homotopie vornehmen ...) kann in eine Kurve, auf der L „klein“ bleibt.

Vergleichen Sie das nebenstehende Bild vom Kurvenraum Ω_{pq} , in dem die Kurvenlänge als Höhenfunktion dargestellt ist. Man möchte die rote Kurve c_τ so in eine Kurve \tilde{c}_τ deformieren, daß die Werte der Funktion L auf \tilde{c}_τ klein bleiben. Beachten Sie: Es geht nicht darum, die Kurve $\tau \rightarrow c_\tau$ möglichst kurz zu machen, sondern darum, sie nach unten zu verschieben, um L zu verkleinern. Natürlich sind $L(c_0)$ und $L(c_1)$ untere Schranken, aber an dem Bild sehen sie auch, daß die Kurve an der „Achsel“ des Torus hängen bleibt. Die topologischen Verhältnisse in Ω_{pq} –gespiegelt in den kritischen Punkte der Funktion L – spielen also offenbar eine Rolle, und das ist *das* Thema der Morsetheorie.

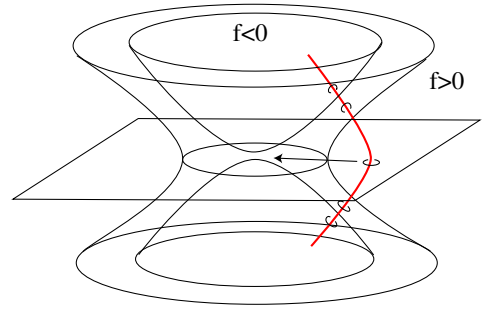


Ein wenig Morsetheorie zum Schluss. Seien M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^∞ -Funktion. Ein *kritischer Punkt* von M ist ein Punkt $p \in M$ mit $d_p f = 0$. Ein kritischer Punkt heißt *nicht degeneriert*, wenn $\text{hess}_p f(X, Y) = g(\nabla_X \text{grad } f, Y)_p$ eine nicht-degenerierte symmetrische Bilinearform auf $T_p M$ ist. Der Index von $\text{hess}_p f$ heißt dann der Index des kritischen Punktes von f .¹³

Beispiel 142. Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 - z^2.$$

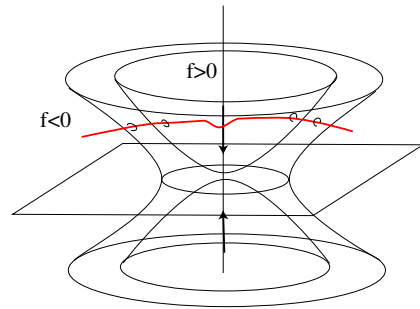
Der einzige kritische Punkt ist $(0, 0, 0)$ und die Hessesche in diesem Punkt ist $dx^2 + dy^2 - dz^2$. Also ist der Index 1. Wir betrachten im \mathbb{R}^3 eine Kurve zwischen zwei Punkten mit $f < 0$, die durch den Bereich $f > 0$ läuft. Wir versuchen, diese Kurve mit dem negativen Gradientenfluß $-\text{grad } f$ herunter zu ziehen. (Dabei muß man den Fluß im Bereich $f < 0$ allerdings schnell abklingen lassen, damit die Endpunkte der Kurve fest bleiben.) Weil der Gradientenfluß auf der Ebene $z = 0$ radial auf den kritischen Punkt im Zentrum zuläuft, kommt man auf diese Weise zu einer Kurve auf der der Maximalwert von f eine beliebig kleine positive Zahl ist, aber man kommt nicht unter 0.



Nun betrachten wir die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto z^2 - x^2 - y^2$$

und wieder eine Kurve vom negativen Bereich durch den positiven in den negativen. In diesem Fall laufen nur die Flußlinien auf der z -Achse in den kritischen Punkt. Die z -Achse ist aber eine Menge der Kodimension 2 im 3-dimensionalen Raum, und man kann die 1-dimensionale Kurve so deformieren, daß sie diese Menge vermeidet. Dann transportiert der Gradientenfluß die Kurve so weit, bis der Maximalwert von f beliebig nah an den größeren Wert in den Endpunkten herankommt.



□

In der Morsetheorie zeigt man, daß um einen nicht-degenerierten kritischen Punkte vom Index k einer Funktion f ein Koordinatensystem existiert, in dem f von der Form

$$f = x_1^2 + \dots + x_{n-k}^2 - x_{n-k+1}^2 - \dots - x_n^2$$

ist, so daß die vorstehenden Beispiele typisch sind. Damit beweist man das folgende

Lemma 143. Sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit nur nicht-degenerierten kritischen Punkten. Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $f^{-1}([a, b])$ kompakt. In $f^{-1}([a, b])$ liege kein kritischer Punkt von f vom Index 0 oder 1.

Sei $c : [0, 1] \rightarrow M$ eine C^∞ -Kurve mit

$$\max(f(c(0)), f(c(1))) \leq a, \quad \max_{0 \leq t \leq 1} f(c(t)) \leq b.$$

¹³Nicht-degeneriertheit und Index eines kritischen Punktes sind unabhängig von der Riemannschen Metrik.

Dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ eine C^∞ -Homotopie von c mit festen Endpunkten in eine Kurve \hat{c} mit

$$\max_{0 \leq t \leq 1} f(\hat{c}(t)) < a + \epsilon.$$

Beweis. Vgl. do Carmo. □

Wir beschäftigen uns nun genauer mit dem Kurvenraum

$$\Omega_{pq} := \{c : [0, 1] \mid c \text{ glatt und } c(0) = p, c(1) = q\}.$$

Neben dem Längenfunktional L betrachten wir noch das sogenannte *Energiefunktional* E auf Ω_{pq} definiert durch

$$E(c) := \int_0^1 \|\dot{c}(t)\|^2 dt.$$

Das hängt eng mit L zusammen. Ist c eine Geodätische, so ist $\|\dot{c}\|$ konstant und daher

$$L(c)^2 = E(c).$$

Für beliebige Kurven in Ω_{pq} gilt nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\int_0^1 1 \cdot \|\dot{c}\| dt \leq \sqrt{\int_0^1 1^2 dt} \sqrt{\int_0^1 \|\dot{c}\|^2 dt},$$

also

$$L(c)^2 \leq E(c).$$

Satz 144 (Variation der Energie). Sei c_τ eine Variation der Kurve $c_0 \in \Omega_{pq}$ mit festen Endpunkten und sei Y das zugehörige Variationsvektorfeld. Sei $E(\tau) := E(c_\tau)$.

(i) Die erste Ableitung von E ist

$$\partial_\tau E(0) = -2 \int_0^1 g(Y, \nabla_t \dot{c}) dt.$$

Das Integral verschwindet für alle Variationsvektorfelder Y genau dann, wenn $\nabla_t \dot{c} = 0$. Die kritischen Punkte von E sind also gerade die Geodätischen von p nach q .¹⁴

(ii) Ist $c_0 \in \Omega_{pq}$ eine Geodätische, so gilt für die zweite Ableitung

$$\partial_\tau^2 E(0) = 2I(Y, Y).$$

Das ist genau dann nicht degeneriert, wenn p und q nicht längs c_0 konjugiert zueinander sind.

Beweis. Das rechnet man nach wie die Variationsformeln für das Längenfunktional: Mit $X := \partial_t c$ erhält man

$$\begin{aligned} \partial_\tau E(0) &= 2 \int_0^1 g(\nabla_\tau X, X) dt = 2 \int_0^1 g(\nabla_t Y, X) dt \\ &= 2 \int_0^1 (\partial_t g(Y, X) - g(Y, \nabla_t X)) dt = \underbrace{2g(Y, X)|_0^1}_{=0} - \int_0^1 g(Y, \nabla_t \dot{c}) dt \end{aligned}$$

¹⁴Das ist der Hauptvorteil von E gegenüber L : Die kritischen Punkte des Längenfunktionals waren die Prägeodätischen von p nach q , also nicht isoliert und insbesondere niemals nicht-degeneriert.

und

$$\begin{aligned}
\partial_\tau^2 E(0) &= 2\partial_\tau \int_0^1 g(\nabla_t Y, X) dt \\
&= 2 \int_0^1 (g(\nabla_\tau \nabla_t Y, X) + g(\nabla_t Y, \nabla_\tau X)) dt \\
&= 2 \int_0^1 (g(\nabla_\tau \nabla_t Y, X) + g(\nabla_t Y, \nabla_t Y)) dt \\
&= 2 \int_0^1 (g(\nabla_\tau \nabla_t Y - \nabla_t \nabla_\tau Y, X) + g(\nabla_t \nabla_\tau Y, X) + g(\nabla_t Y, \nabla_t Y)) dt \\
&= 2 \int_0^1 \left(g(\nabla_t Y, \nabla_t Y) - g(R(Y, \dot{c})\dot{c}, Y) + \partial_t g(\nabla_\tau Y, X) - \underbrace{g(\nabla_\tau Y, \nabla_t X)}_{=0} \right) dt \\
&= 2I(Y, Y) + \underbrace{g(\nabla_\tau Y, X)|_0^1}_{=0}.
\end{aligned}$$

□

Wir betrachten nun eine Geodätische $c : [0, 1] \rightarrow M$ in der m -dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeit M mit

$$0 < \delta \leq K$$

im Vergleich mit einer Geodätischen $\tilde{c} : [0, 1] \rightarrow S_\delta^m$ gleicher Länge in der Sphäre konstanter Krümmung δ . Wir betrachten parallele orthonormale Baisfelder $E_1 = \dot{c}, E_2, \dots, E_m$ bzw. $\tilde{E}_1 = \dot{\tilde{c}}, \tilde{E}_2, \dots, \tilde{E}_m$ längs c bzw. \tilde{c} und ein normales Vektorfeld $Y = \sum_{i=2}^m Y_i E_i$ längs c . Definiert man dann $\tilde{Y} := \sum_{i=2}^m Y_i \tilde{E}_i$ mit denselben Koeffizienten, so gilt offenbar

$$\begin{aligned}
g(Y(t), Y(t)) &= \tilde{g}(\tilde{Y}(t), \tilde{Y}(t)), \\
g(\dot{Y}(t), \dot{Y}(t)) &= \tilde{g}(\dot{\tilde{Y}}(t), \dot{\tilde{Y}}(t)).
\end{aligned}$$

Zusammen mit der Voraussetzung über die Schnittkrümmung folgt für die Indexformen

$$I(Y, Y) = \int_0^b (g(\dot{Y}, \dot{Y}) - g(R(Y, \dot{c})\dot{c}, Y)) dt \leq \int_0^b (\tilde{g}(\dot{\tilde{Y}}, \dot{\tilde{Y}}) - \tilde{g}(\tilde{R}(Y, \dot{\tilde{c}})\dot{\tilde{c}}, \tilde{Y})) dt = I(\tilde{Y}, \tilde{Y}).$$

Daher ist $\text{Index}(c) \geq \text{Index}(\tilde{c})$.

Ist $m \geq 3$ und $L(c) = L(\tilde{c}) > \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}$, so ist $\text{Index}(\tilde{c}) = m - 1 > 1$, weil der Antipodenpunkt auf der Sphäre ein konjugierter Punkt vom Index $m - 1$ ist. Also gilt

$$L(c) > \frac{\pi}{\sqrt{\delta}} \implies \text{Index}(c) > 1. \quad (113)$$

Wir kommen zurück auf den Beweis von (112). Wir wollen dazu das Lemma 143 auf die Energiefunktion $E : \Omega_{pq} \rightarrow \mathbb{R}$ anwenden. Weil q ein regulärer Punkt von \exp_p ist, sind p und q längs keiner Geodätischen von p nach q konjugiert, d.h. alle kritischen Punkte von E sind nicht-degeneriert. Wir haben eine Kurve $\tau \mapsto c_\tau$, für deren Endpunkte nach (109) und (110) gilt:

$$E(c_0) = L(c_0)^2 < (2\epsilon)^2 < E(c_1) < (2\pi - 4\epsilon)^2.$$

In einem kritischen Punkt γ mit $E(\gamma) \geq (2\pi - 4\epsilon)^2$ gilt

$$L(\gamma) = \sqrt{E(\gamma)} \geq 2\pi - 4\epsilon \underset{(107)}{>} \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}$$

Nach (113) sind diese kritischen Punkte also vom Index > 1 . Wir setzen

$$a := (2\pi - 4\epsilon)^2, \quad b := \max_{0 \leq \tau \leq 1} E(c_\tau)$$

Nach dem Lemma können wir $\tau \mapsto c_\tau$ also mit festen Endpunkten deformieren in eine Kurve $\tau \mapsto \hat{c}_\tau$ in Ω_{pq} , also in eine Homotopie von c_0 nach c_1 in M mit festen Endpunkten, so daß gilt

$$\max L(\hat{c}_\tau) \leq \max \sqrt{E(\hat{c}_\tau)} < \sqrt{a} + \epsilon = 2\pi - 3\epsilon < 2\pi - 2\epsilon.$$

Das beweist (112).

Allerdings hat der Beweis einen Schönheitsfehler:

Der Kurvenraum Ω_{pq} ist leider keine endlich-dimensionale (Riemannsche) Mannigfaltigkeit.

Deshalb läßt sich das Lemma 143 nicht anwenden.

Es gibt mindestens zwei Auswege aus dieser Katastrophe.

Einer benutzt die Morsetheorie auf unendlich-dimensionaler Hilbertmannigfaltigkeiten, die von Palais entwickelt worden ist.¹⁵

Der andere, ältere Weg stammt von Marston Morse. Er stellt fest, daß man nur Kurven mit beschränkter Energie $E(\gamma) < C$ für eine (große) Zahl C betrachten muß, sich also auf einen entsprechenden Teilraum Ω_{pq}^C beschränken kann. Dann gibt es aber eine endliche Unterteilung

$$0 = t_0 < \dots < t_n = 1,$$

so daß für jedes $\gamma \in \Omega_{pq}^C$ und alle i die Punkte $\gamma(t_{i-1})$ und $\gamma(t_i)$ sich verbinden lassen durch eine eindeutig bestimmte kürzeste Geodätische. Die so entstehende gebrochene Geodätische zwischen p und q approximiert γ und ist andererseits bestimmt durch $(\gamma(t_0), \dots, \gamma(t_n)) \in M^{n+1}$. Auf diese Weise läßt sich Ω_{pq}^C unter Erhalt der wesentlichen topologischen Eigenschaften approximieren durch die endlich-dimensionale Mannigfaltigkeit M^{n+1} , in der man die obige Argumentation durchführen kann.¹⁶

Das Fazit ist, daß Lemma 143 eben doch auch „für die Energiefunktion auf Ω_{pq} gilt“.

¹⁵Vgl. R. Palais, Morse Theory on Hilbert Manifolds, Topology 2 (1963), 299-340

¹⁶Vergleiche dazu Gromoll-Klingenberg-Meyer, do Carmo, oder [J. Milnor, Morse Theory, Ann. Math. Studies 51 (1963)]

25 Anhang

25.1 Warum heißt der Torsionstensor Torsionstensor?

Sind ∇ eine kovariante Ableitung und S ein Tensorfeld vom Typ $(2, 1)$ auf M , so definiert

$$\tilde{\nabla}_X Y := \nabla_X Y + \frac{1}{2}S(X, Y) \quad (114)$$

eine neue kovariante Ableitung. $2S$ ist der Differenztensor der beiden Ableitungen. Ist c ein Kurve in M so folgt

$$\tilde{\nabla}_{\frac{d}{dt}} \dot{c} = \nabla_{\frac{d}{dt}} \dot{c} + \frac{1}{2}S(\dot{c}, \dot{c}).$$

Daraus sieht man: Die Ableitungen ∇ und $\tilde{\nabla}$ haben genau dann dieselben Geodätischen, wenn S schiefsymmetrisch ist. Wir setzen das voraus und betrachten die Parallelverschiebung längs einer Geodätischen c . Ist Y ein ∇ -paralleles Vektorfeld, so liefert (114)

$$\tilde{\nabla}_{\frac{d}{dt}} Y = \frac{1}{2}S(\dot{c}, Y),$$

d.h. S beschreibt die „Verdrehung“ oder „Torsion“ von Y bezüglich $\tilde{\nabla}$. Andererseits ist aber

$$S(X, Y) = \frac{1}{2}S(X, Y) - \frac{1}{2}S(Y, X) = \tilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y - (\tilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y) = \tilde{T}(X, Y) - T(X, Y)$$

gerade die Differenz der beiden Torsionstensoren. Ist ∇ „torsionsfrei“, so ist S also gerade der Torsionstensor von $\tilde{\nabla}$.

25.2 Elementares über Liegruppen

Definition 145. Eine *Liegruppe* ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit G mit einer Gruppenstruktur, so daß die Abbildung $G \times G \rightarrow G$, $(g, h) \mapsto gh^{-1}$ differenzierbar ist. Das Einselement bezeichnen wir mit e .

Beispiel 146 (Lineare Gruppen).

$$\begin{aligned} GL(n, \mathbb{R}) &:= \{A \mid A \text{ reelle invertierbare } n \times n\text{-Matrix}\} \\ GL(n, \mathbb{C}) &:= \{A \mid A \text{ komplexe invertierbare } n \times n\text{-Matrix}\} \\ SL(n, \mathbb{R}) &:= \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det A = 1\} \\ O(n) &:= \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid AA^t = E\} \\ SO(n) &:= \{A \in O(n) \mid \det A = +1\} \\ U(n) &:= \{A \in GL(n, \mathbb{C}) \mid A\bar{A}^t = E\} \\ SU(n) &:= \{A \in U(n) \mid \det A = 1\} \\ O(n, 1) &:= \{A \in GL(n+1, \mathbb{R}) \mid \langle Ax, Ay \rangle_L = \langle x, y \rangle_L\}, \\ &\text{wobei } \langle x, y \rangle_L := -x_0y_0 + x_1y_1 + \dots + x_ny_n. \end{aligned}$$

□

Definition 147. Eine *Liealgebra* ist eine (reeller) Vektorraum \mathfrak{g} zusammen mit einer schiefsymmetrischen bilinearen Abbildung $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, für die die sogenannte Jacobi-Identität gilt:

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

Beispiel 148. (i) Der Raum der Vektorfelder $\Gamma(TM)$ auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit ist eine Liealgebra.

(ii) Der Raum der $n \times n$ -Matrizen mit dem Kommutator $[X, Y] = XY - YX$ ist eine Liealgebra.

□

Beispiel 149. Auf einer Liegruppe G hat man für jedes $g \in G$ einen Diffeomorphismus $L_g : G \rightarrow G$, $h \mapsto gh$, die sogenannte *Linkstranslation* mit g und analog eine *Rechtstranslation* R_g . Ein Vektorfeld $X \in \Gamma(TG)$ heißt *linksinvariant*, wenn X für jedes $g \in G$ zu sich selbst L_g -verwandt ist, d.h. wenn für alle $h \in G$

$$dL_g(X_h) = X_{L_g h}.$$

Das ist äquivalent zu $L_{g*}X = X$. Insbesondere ist dann also $X_g = dL_g(X_e)$, d.h. X ist durch seinen Wert in e eindeutig bestimmt. Auf diese Weise ist der Vektorraum der linksinvarianten Vektorfelder auf G isomorph zu $T_e G$.

Die linksinvarianten Vektorfelder einer Liegruppe sind abgeschlossen unter der Lieklammer und bilden deshalb eine Liealgebra \mathfrak{g} , genannt *die* Liealgebra von G . Es ist nämlich allgemein die Lieklammer mit der „ f -Verwandtschaft“ verträglich. Also

$$\mathfrak{g} = \{X \in \Gamma(TG) \mid X \text{ linksinvariant}\} = T_e G.$$

Für $SO(n)$ haben wir in Diffgeo I bereits gesehen, daß sich die Lieklammer linksinvarianten Vektorfelder und der Matrix-Kommutator in

$$\mathfrak{so}(n) = T_E SO(n) = \{X \mid X^t = -X\}$$

entsprechen. Das gilt für alle linearen Gruppen. In abstrakten Gruppen ist aber natürlich die Lieklammer auf $T_e G$ nicht durch ein algebraisches Rezept vorgegeben, sondern man muß die Tangentialvektoren zu linksinvarianten Vektorfeldern erweitern, die Lieklammer bilden und deren Wert in e nehmen.

□

Satz 150. Sei X ein linksinvariantes Vektorfeld auf der Liegruppe G . Dann ist der maximale Fluß Φ_t von X für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert, und es gilt

$$\Phi_t(g) = L_g \Phi_t(e) = R_{\Phi_t(e)} g.$$

Beweis. Sei $\epsilon > 0$ so, daß $\Phi_t(e)$ für $|t| < \epsilon$ definiert ist. Für jedes $g \in G$ und $|t| < \epsilon$ ist

$$\frac{d}{dt} L_g(\Phi_t(e)) = dL_g\left(\frac{d}{dt} \Phi_t(e)\right) = dL_g(X_{\Phi_t(e)}) = X_{L_g \Phi_t(e)},$$

d.h. $t \mapsto L_g \Phi_t(e)$ ist eine für alle $|t| < \epsilon$ definierte Integralkurve mit $L_g \Phi_0(e) = g$. Das bedeutet, daß man jede (einseitig) beschränkte Integralkurve immer noch ein Stück $\epsilon/2$ verlängern kann. Also sind alle Integralkurven auf ganz \mathbb{R} definiert. □

Definition 151. Mit den Bezeichnungen des Satzes definieren wir die *Exponentialabbildung* von G wie folgt:

$$\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G, X \mapsto \Phi_1(e).$$

Wegen $\frac{d}{dt} \Phi_{st}(e) = s \frac{d}{dt} \Big|_{st} \Phi(e)$ gilt

$$\exp(tX) = \Phi_t(e),$$

und $t \mapsto \exp(tX)$ ist ein differenzierbarer Gruppenhomomorphismus von \mathbb{R} in G .

Beispiel 152. Für $G = GL(n)$ ist $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n) = M(n \times n)$ und für $X \in \mathfrak{g}$ gilt

$$\exp(tX) = e^{tX}.$$

Entsprechendes gilt für die anderen linearen Gruppen, und das ist der Grund, warum die Liegruppen-Exponentialabbildung so heißt. *Beweis.* Setze $U(t) := \exp(tX) = \Phi_t(e)$. Dann ist

$$\dot{U}(t) = X_{\Phi_t(e)} = \Phi_t(e)X = U(t)X.$$

Weiter ist $U(0) = E$. Aber dieses Anfangswertproblem für ein gewöhnliches lineares Differentialgleichungssystem hat $U(t) = e^{tX}$ als eindeutig bestimmte Lösung.

□

Bemerkung. Es gilt $d_0 \exp = Id : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$. Insbesondere bildet \exp also eine Umgebung von $0 \in \mathfrak{g}$ diffeomorph auf eine Umgebung von e in G ab.

Definition 153. (i) Eine C^∞ -Abbildung $\phi : G \rightarrow \tilde{G}$ zwischen Liegruppen mit

$$\phi(gh) = \phi(g)\phi(h)$$

heißt ein *Liegruppen-Homomorphismus*. Es folgt $\phi(e) = e$ und $\phi(g^{-1}) = \phi(g)^{-1}$.

(ii) Eine lineare Abbildung $\alpha : \mathfrak{g} \rightarrow \tilde{\mathfrak{g}}$ zwischen Liealgebren mit

$$\alpha([X, Y]) = [\alpha(X), \alpha(Y)]$$

heißt ein *Liealgebren-Homomorphismus*.

Entsprechend definiert man Isomorphismen, Endomorphismen und Automorphismen für Liegruppen und -algebren.

Satz 154. Sei $\phi : G \rightarrow \tilde{G}$ eine Liegruppen-Homomorphismus. Dann definiert ϕ einen Liealgebren-Homomorphismus

$$d\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \tilde{\mathfrak{g}}$$

vermöge

$$d\phi(X)_{\tilde{g}} := dL_{\tilde{g}}d\phi(X_e),$$

also

$$d\phi(X)_e = d\phi(X_e).$$

Offenbar sind X und $d\phi(X)$ sind ϕ -verwandt. Es gilt

$$\exp \circ d\phi = \phi \circ \exp, \tag{115}$$

Beweis. Zunächst gilt $\phi(gh) = \phi(g)\phi(h)$ und daher

$$\phi \circ L_g = L_{\phi(g)} \circ \phi.$$

Wir setzen $\tilde{X} = d\phi(X) = dL_{\tilde{g}}d\phi(X_e)$. Dann sind X und \tilde{X} ϕ -verwandt, denn

$$\tilde{X}_{\phi(g)} = dL_{\phi(g)}d\phi(X_e) = d(L_{\phi(g)}\phi)(X_e) = d(\phi L_g)(X_e) = d\phi(dL_g(X_e)) = d\phi(X_g).$$

Daraus folgt die Homomorphie von $d\phi$:

$$d\phi([X, Y]_e) = [\tilde{X}, \tilde{Y}]_{\phi(e)} = [\tilde{X}, \tilde{Y}]_e.$$

Zum Beweis der Formel (115) beachte, daß $t \mapsto \exp(td\phi(X))$ eine Integralkurve von \tilde{X} ist, die bei $t = 0$ durch $e \in \tilde{G}$ geht. Andererseits ist

$$\frac{d}{dt}\phi(\exp tX) = d\phi\left(\frac{d}{dt}\exp(tX)\right) = d\phi(X_{\exp(tX)}) = \tilde{X}_{\phi(\exp tX)}$$

eine Integralkurve mit derselben Eigenschaft. Daher sind beide gleich, und für $t = 1$ folgt (115). \square

Im folgenden Satz bezeichnen wir die Menge der Vektorraum-Automorphismen bzw. -Endomorphismen der Liealgebra mit $GL(\mathfrak{g})$ bzw. $gl(\mathfrak{g})$. $GL(\mathfrak{g})$ ist mit der Komposition als Verknüpfung eine Liegruppe der Dimension $(\dim \mathfrak{g})^2$ und $gl(\mathfrak{g})$ mit dem üblichen Kommutator als Lieklammer die zugehörige Liealgebra.

Satz 155 (Adjungierte Darstellung). Seien G eine Liegruppe und a_h für $h \in G$ der zugehörige innere Automorphismus:

$$a_h g := h g h^{-1}.$$

Dann gilt

(i) Der von a_h induzierte Liealgebren-Homomorphismus

$$\text{Ad}_h := da_h : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

ist ein Automorphismus mit

$$\text{Ad}_h X = a_{h*} X. \quad (116)$$

(ii) Die Abbildung $\text{Ad} : G \rightarrow GL(\mathfrak{g}), h \mapsto \text{Ad}_h$ ist ein Liegruppen-Homomorphismus, die sogenannte adjungierte Darstellung von G .

(iii) Für alle $X, Y \in \mathfrak{g}$ und $h \in G$ gilt:

$$(\text{Ad}_h X)_e = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 h \exp(tX) h^{-1}, \quad (117)$$

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_0 \text{Ad}_{\exp tX} Y = [X, Y]_e, \quad (118)$$

$$\exp \circ \text{Ad}_h = a_h \circ \exp. \quad (119)$$

(iv) Der von Ad induzierte Liealgebren-Homomorphismus

$$\text{ad} := \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}), X \mapsto \text{ad}_X$$

heißt die adjungierte Darstellung von \mathfrak{g} . Es gilt für alle $X, Y \in \mathfrak{g}$

$$\text{ad}_X Y = [X, Y], \quad (120)$$

$$\text{Ad}_{\exp X} = e^{\text{ad}_X}. \quad (121)$$

Beweis. Zu (i). Weil a_h ein Automorphismus ist, ist auch da_h invertierbar und damit ist Ad_h ein Automorphismus. Nach Satz 154 sind X und $d\phi(X)$ ϕ -verwandt. Daraus folgt (116).

Zu (ii). Aus $a_{gh} = a_g \circ a_h$ folgt die Homomorphie von $\text{Ad} : G \rightarrow GL(\mathfrak{g})$. Die Differenzierbarkeit folgt aus der von $(g, h) \mapsto h g h^{-1}$.

Zu (iii). Gleichung (117) folgt aus der Definition von Ad_h zusammen mit

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_0 \exp(tX) = X.$$

Nach Satz 150 ist $\Phi_t = R_{\exp(tX)}$ der maximale Fluß von X . Benutzen wir die Formel für die

Lieklammer aus [VL Mannigfaltigkeiten], so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
[X, Y]_e &= \frac{d}{dt}(-(\Phi_{t*}Y)_e)|_0 \\
&= \frac{d}{dt}(-(R_{\exp(tX)*}Y)_e)|_0 \\
&= \frac{d}{dt}(-dR_{\exp(tX)}(Y_{\exp(-tX)}))|_0 \\
&= \frac{d}{dt}(-dR_{\exp(tX)}(dL_{\exp(-tX)}(Y_e)))|_0 \\
&= \frac{d}{dt}(-da_{\exp(-tX)}(Y_e))|_0 \\
&= \frac{d}{dt}(Ad_{\exp(tX)}Y)|_0
\end{aligned}$$

Gleichung (119) schließlich ist Satz 154 angewendet auf a_h .

Zu (iv). Aus (118) folgt unmittelbar (120), und (121) ergibt sich durch Anwendung von Satz 154 auf $Ad : G \rightarrow GL(\mathfrak{g})$. \square

Beispiel 156. Für die linearen Gruppen sind a_h und Ad_h durch die Konjugation mit h gegeben. \square

Wir schließen mit zwei Sätzen, die wir hier nicht beweisen können, die aber sehr nützlich bzw. interessant sind:

Ist H eine Lieuntergruppe der Liegruppe G , d.h. eine Untergruppe, versehen mit der Struktur einer Liegruppe, so daß die Inklusion $i : H \subset G$ eine Immersion ist, so ist auf die offenbare Weise \mathfrak{h} eine Unteralgebra von \mathfrak{g} . Umgekehrt läßt sich jede Lieunteralgebra von \mathfrak{g} so realisieren, wie der folgende Satz zeigt:

Satz 157. *Seien G eine Liegruppe und $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine Lieunteralgebra der Liealgebra von G . Dann gibt es genau eine zusammenhängende Lieuntergruppe H von G mit Liealgebra \mathfrak{h} .*

Satz 158. *Sei H eine Untergruppe der Liegruppe G . Ist H (als Teilmenge in G) abgeschlossen, so ist H eine Lieuntergruppe von G .*

Beispiel 159. Für alle $X, Y \in \mathfrak{g}$ ist die Funktion

$$GL(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathfrak{g}, F \mapsto F[X, Y] - [FX, FY]$$

stetig. Daher ist die Menge

$$\text{Aut}(\mathfrak{g}) := \{F \in GL(\mathfrak{g}) \mid F[X, Y] - [FX, FY] = 0 \text{ für alle } X, Y \in \mathfrak{g}\}$$

abgeschlossen. Sie ist offenbar auch eine Untergruppe, also eine Lieuntergruppe von $GL(\mathfrak{g})$, die *Automorphismengruppe von \mathfrak{g}* .

\square