Studienschwerpunkt Diskrete Strukturen

Stefan Felsner

Diskrete Mathematik

http://www.math.tu-berlin.de/~felsner

Studienschwerpunkt: Diskrete Strukturen

Dieser Vorlesungszyklus wird in jedem 2ten Jahr gestartet.
Der neue Zyklus beginnt jetzt.
Das Angebot:

Sommersemester 2005:

- Diskrete Strukturen I – *Kombinatorik*
  http://www.math.tu-berlin.de/~felsner/Lehre/dsI.html

Wintersemester 2005/06:

- Diskrete Strukturen II – *Graphentheorie*

Sommersemester 2006:

- Diskrete Strukturen III –
  Das spezielle Thema wird später festgelegt.

Seminare in allen Semestern. Aktuell zum Thema *Graphen Zeichnen*.

Worum geht es in Diskrete Strukturen?

Objekte

- Permutationen
- Mengenfamilien
- Graphen und Relationen
- Spiele und Strategien
- usw.

Anwendungen

- Geometrie, Algebra, Topologie
- Optimierung
- Informatik
- usw.

Besonderes Merkmal: Ausgehend von Kopfnüssen und Denkspielereien die (fast) jeder verstehen kann kommt man zu attraktiven Modellen, schönen Theorien und interessanten Anwendungen.

Beispiel 1: Teilmengensummen

Beweise, dass jede 10-elementige Teilmenge T der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, 100$ zwei verschiedene Teilmengen mit der gleichen Summe enthält.

Beispiel. In der Menge $T = \{9, 23, 33, 36, 51, 70, 75, 79, 88, 93\}$ findet man $33+36+51+79 = 199 = 9+23+79+88$ aber auch $23+70 = 93$.

Beispiel 1: Teilmengensummen

Beweise, dass jede 10-elementige Teilmenge T der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, 100$ zwei verschiedene Teilmengen mit der gleichen Summe enthält.

Beispiel. In der Menge $T = \{9, 23, 33, 36, 51, 70, 75, 79, 88, 93\}$ findet man $33+36+51+79 = 199 = 9+23+79+88$ aber auch $23+70 = 93$.

Lösung.

- Es gibt $2^{10} = 1024$ verschiedene Teilmengen der 10-elementigen Menge T.
- Die Summe der Zahlen in T ist höchstens $100+99+\ldots+91 = 955$.
- Die Abbildung $S \mapsto \sum S$ bildet 1024 Teilmengen auf höchstens 955 Summenwerte ab und kann daher nicht injektiv sein, d.h. es gibt verschiedene Mengen $A, B \subseteq T$ mit $\sum A = \sum B$. *q.e.d.*

Beispiel 1: Teilmengensummen

Beweise, dass jede 10-elementige Teilmenge T der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, 100$ zwei verschiedene Teilmengen mit der gleichen Summe enthält.

Beispiel. In der Menge $T = \{9, 23, 33, 36, 51, 70, 75, 79, 88, 93\}$ findet man $33 + 36 + 51 + 79 = 199 = 9 + 23 + 79 + 88$ aber auch $23 + 70 = 93$.

Lösung.

- Es gibt $2^{10} = 1024$ verschiedene Teilmengen der 10-elementigen Menge T.
- Die Summe der Zahlen in T ist höchstens $100 + 99 + \ldots + 91 = 955$.
- Die Abbildung $S \mapsto \sum S$ bildet 1024 Teilmengen auf höchstens 955 Summenwerte ab und kann daher nicht injektiv sein, d.h. es gibt verschiedene Mengen $A, B \subseteq T$ mit $\sum A = \sum B$. *q.e.d.*

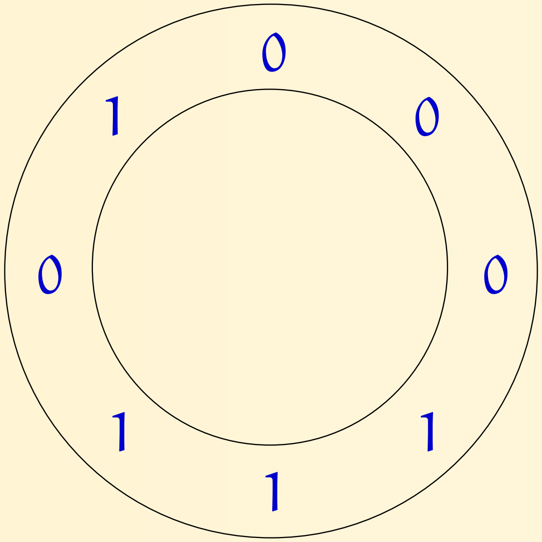
Dieses einfache *Schubfachprinzip* ist vielfach anwendbar und erlaubt tiefgehende Verallgemeinerungen.

Beispiel 2: Speicherworte

Ist es möglich sämtliche 0-1 Wörter der Länge n als Abschnitte in einem zyklischen Wort der Länge 2^n unterzubringen?

Beispiel. Für $n = 3$ gibt es eine Lösung

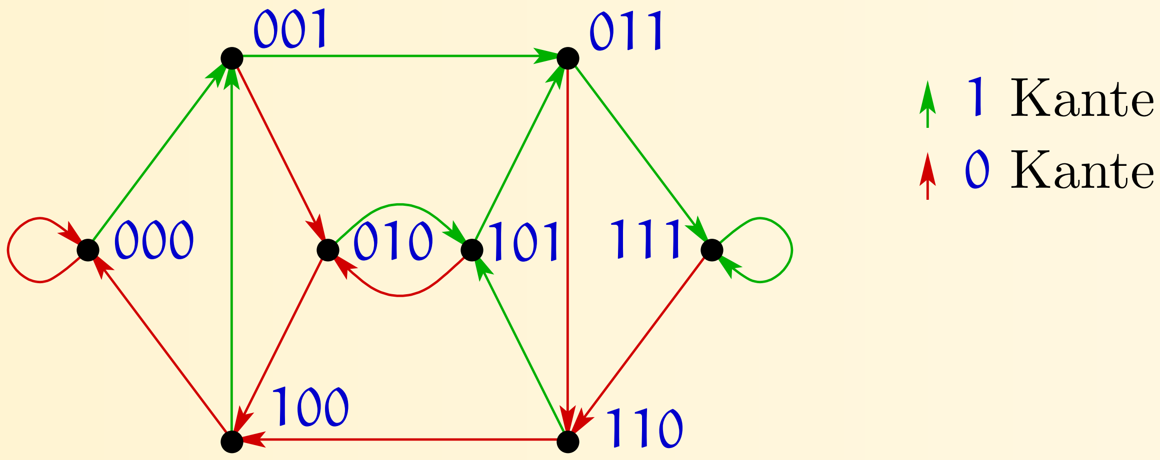
$$\begin{array}{ccc} 0&0&0\\ 0&0&1\\ 0&1&0\\ 0&1&1\\ 1&0&0\\ 1&0&1\\ 1&1&0\\ 1&1&1 \end{array}$$



$$\begin{array}{cccccccccc}
0&0&0&&&&&&&\\
&0&0&1&&&&&&\\
&&0&1&1&&&&&\\
&&&1&1&1&&&&\\
&&&&1&1&0&&&\\
&&&&&1&0&1&&\\
&&&&&&0&1&0&\\
&&&&&&&1&0&0
\end{array}$$

Speicherworte, die Lösung

Konstruiere einen gerichteten Graphen auf 0-1 Wörtern der Länge n.



- Dieser Graph besitzt einen Kantenzug der jede Kante genau einmal verwendet, einen sogenannten *Eulerkreis*.

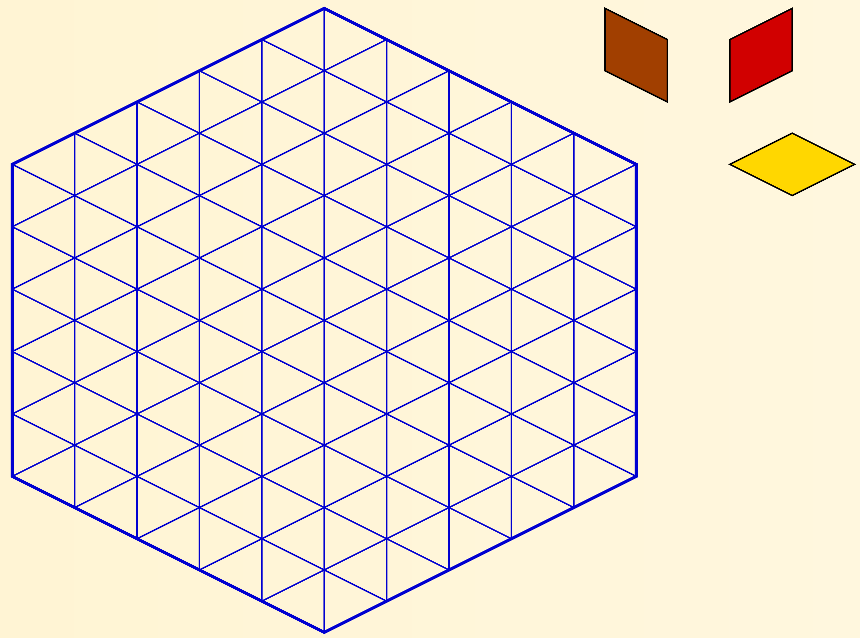
- So ein Eulerkreis eintspricht einer Lösung des Speicherwortproblems für Wörter der Länge $n + 1$.

Beispiel. Der in 000 beginnende Eulerkreis mit den Kantenbezeichnungen 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, $\ldots$ entspricht dem Anfang 0000, 0001, 0010, 0101, 1010, 0100, 1001 $\ldots$ eines Speicherwortes für Wörter der Länge 4.

Beispiel 3: Hexagons

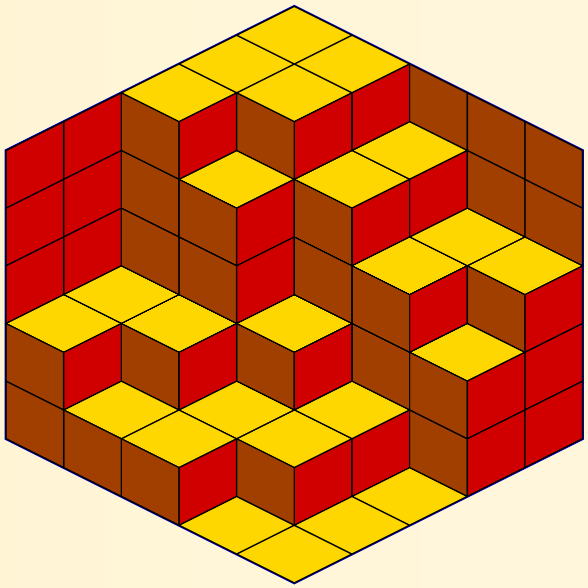
Aus dem Dreiecksgitter ist ein regelmäßiges Sechseck geschnitten. Das Sechseck kann mit Rhomben, die aus je zwei der Gitterdreiecke bestehen, gepflastert werden. Die Rhomben kommen in drei verschiedenen Orientierungen/Farben vor.

Zeige: Jede solche Pflasterung enthält von jeder Farbe die gleiche Anzahl Rhomben.



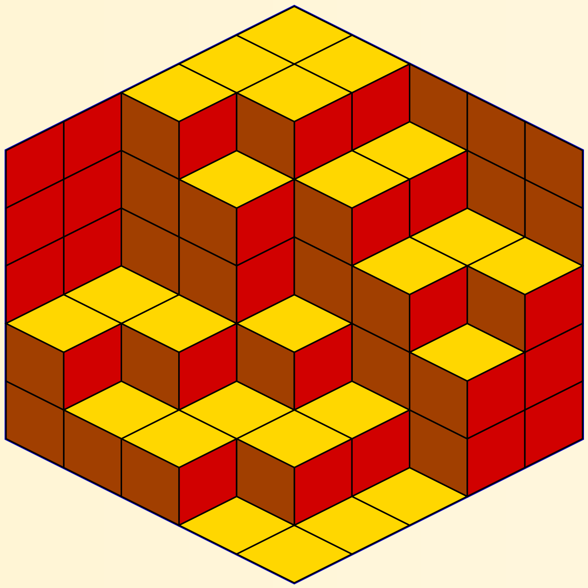
Hexagons die Lösung

Die Pflasterung ist eine Ansicht eines Stapels von Würfeln.



Hexagons die Lösung

Die Pflasterung ist eine Ansicht eines Stapels von Würfeln.



Die Anzahl der Pflasterungen des Sechsecks mit Seitenlänge fünf ist 267227532. Dies ist der Fall $a = 5$, $b = 5$, $c = 5$ in einer Formel von MacMahon

$$T(a, b, c) = \prod_{i=0}^{a-1} \prod_{j=0}^{b-1} \prod_{k=0}^{c-1} \frac{i + j + k + 2}{i + j + k + 1}.$$

Beispiel 4: Winklers Geheimnis

Zwei Kandidaten bekommen je eine 2-elementige Teilmenge einer 8-elementigen Grundmenge, sie wissen auch, dass ihre beiden Mengen genau ein Element X gemeinsam haben.

Können sich die beiden (die sich vorher nicht abgesprochen haben) in einem offenen Gespräch auf das gemeinsame Element X verständigen, ohne dass es Zuhörern möglich ist X zu identifizieren?

Beispiel 4: Winklers Geheimnis

Zwei Kandidaten bekommen je eine 2-elementige Teilmenge einer 8-elementigen Grundmenge, sie wissen auch, dass ihre beiden Mengen genau ein Element X gemeinsam haben.

Können sich die beiden (die sich vorher nicht abgesprochen haben) in einem offenen Gespräch auf das gemeinsame Element X verständigen, ohne dass es Zuhörern möglich ist X zu identifizieren?

Das ist tatsächlich möglich. Peter Winkler beschreibt ein geeignetes kombinatorisches Kryptoverfahren in seinem Buch *Mathematical Puzzles*.

Beispiel 4: Winklers Geheimnis

Zwei Kandidaten bekommen je eine 2-elementige Teilmenge einer 8-elementigen Grundmenge, sie wissen auch, dass ihre beiden Mengen genau ein Element X gemeinsam haben.

Können sich die beiden (die sich vorher nicht abgesprochen haben) in einem offenen Gespräch auf das gemeinsame Element X verständigen, ohne dass es Zuhörern möglich ist X zu identifizieren?

Das ist tatsächlich möglich. Peter Winkler beschreibt ein geeignetes kombinatorisches Kryptoverfahren in seinem Buch *Mathematical Puzzles*.

Ich freue mich auf viele Hörer in Diskrete Strukturen I.

Bis dann,
Ihr Stefan Felsner