Reziprozitätsgesetz für Pflasterungen eines $(m \times n)$-Rechtecks mit Dominos

Moritz W. Schmitt

Blockseminar „Pflasterungen“
Januar 2010

Gliederung

1. Einführende Bemerkungen
2. Graphentheoretische Vorbereitungen
3. Rekursive Darstellung der Anzahl der Pflasterungen
4. Kombinatorische Erklärung der Reziprozität

Einführung

$T(m, n) :=$ # Pflasterungen eines $(m \times n)$-Rechtecks mit Dominos

- $T(m, n)$ kann als lineare Rekursion ausgedrückt werden.
- Rekursionen können auch ins Negative fortgesetzt werden.

Beispiel

Sei $m = 2$ und $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Dann gilt

$$T(2, n) = T(2, n-1) + T(2, n-2),$$

wir erhalten also die Folge

$$\ldots, -8, 5, -3, 2, -1, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$$

Wir erhalten $T(2, -2-n) = (-1)^n T(2, n)$.

Reziprozitätsgesetz

Allgemeiner gilt:

Theorem (Stanley 1984)

Seien $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $m \geq 1$. Dann gilt

$$T(m, -2-n) = \varepsilon_{m,n} \cdot T(m, n),$$

wobei

$$\varepsilon_{m,n} = \begin{cases} (-1)^n, & m \equiv_4 2 \\ 1, & \textit{sonst} \end{cases}$$

Obiger Satz stellt ein *Reziprozitätsgesetz* dar. Was heißt das?

- Reziprozität bedeutet „Wechselseitigkeit“.
- Es wird durch die Interpretation der Zählfunktion im Negativen eine Beziehung zwischen verschiedenen mathematischen Objekten hergestellt.

Reziprozitätsgesetz / Ziel des Vortrages

Konkret: Ausgehend von einem interessanten Objekt P, ist es in der Kombinatorik üblich

1. eine „kombinatorische“ Zählfunktion $f(t)$ von P anzugeben,
2. diese als Polynom in t darzustellen,
3. negative ganzzahlige Werte für t einzusetzen und
4. in $f(-t)$ die Zählfunktion eines neuen mathematischen Objektes zu erkennen.

In diesem Vortrag wird eine kombinatorische Interpretation des von Stanley bewiesenen Reziprozitätsgesetzes vorgestellt.

Graphentheoretische Vorbereitungen

Anstatt Pflasterungen betrachten wir perfekte Paarungen von Gittergraphen $\mathcal{G}(m, n)$.

Genauer: Wir betrachten *vorzeichenbehaftete* Paarungen, d. h.

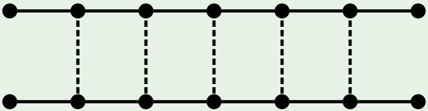
- der zugrundeliegende Graph besitzt $+1$ und -1 als Kantengewichte und
- eine Paarung wird abhängig von der Parität der negativen Kanten als positiv oder negativ gewertet.

Wir legen für einen Graphen G fest:

$$\#\{\textit{vorzeichenbehaftete Paarungen}\} := \#\{\textit{positive Paarungen}\} - \#\{\textit{negative Paarungen}\}$$

Vorzeichenbehaftete Graphen

Beispiel



Die Anzahl der vorzeichenbehafteten Paarungen ist -3.

Festlegungen:

- Für $m \geq 1$ und $n > 0$ ist $\mathcal{G}(m, n)$ der übliche Gittergraph.
- Für $m \geq 1$ und $n \leq 0$ ist $\mathcal{G}(m, n)$ der modifizierte Gittergraph $\mathcal{G}(m, 2 - n)$: linke und rechte vertikale Kante werden gelöscht, alle anderen vertikalen mit -1 gewichtet, alle horizontalen mit $+1$ gewichtet
- Unter einem „vorzeichenbehafteten Graphen der Breite m“ verstehen wir einen beliebigen Teilgraphen von $\mathcal{G}(m, n)$, dessen Kanten mit $+1$ und -1 gewichtet sind.

Adjunktion von Graphen

Die Anzahl der vorzeichenbehafteten Paarungen von $\mathcal{G}(m, n)$ ist $T(m, n)$.

Für den Beweis benötigen wir folgende Operation:

- Seien $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ vorzeichenbehaftete Graphen der Breite m.
- Dann sei $\mathcal{G}_1 * \mathcal{G}_2$ die Verbindung von $\mathcal{G}_1$ mit $\mathcal{G}_2$ durch m Kanten mit Gewicht $+1$.

$M(\mathcal{G}) := \#$ der vorzeichenbehafteten Paarungen

Lemma

Für $m, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$M(\mathcal{G}(m, n_1) * \cdots * \mathcal{G}(m, n_k)) = M(\mathcal{G}(m, n_1 + \cdots + n_k)),$$

wobei $*$ assoziativ und damit obiger Ausdruck wohldefiniert ist.

Beweis des Lemmas

Lemma

Für $m, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$M(\mathcal{G}(m, n_1) * \cdots * \mathcal{G}(m, n_k)) = M(\mathcal{G}(m, n_1 + \cdots + n_k)),$$

wobei $*$ assoziativ und damit obiger Ausdruck wohldefiniert ist.

Beweis.

Wir beschränken uns auf den Fall $k = 2$.

- $n_1, n_2 > 0$: Klar.
- $n_1, n_2 < 0$: Fast klar.
- $n_1 < 0, n_2 > 0$ oder andersherum: Hmm.

□

$(T(m,n))_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}}$ als Rekursionsgleichung

Lemma

Sei $\mathcal{H}$ ein vorzeichenbehafteter Graph der Breite m. Dann erfüllt die Folge $M(\mathcal{H} * \mathcal{G}(m,n))$ für $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ eine lineare Rekursion der Ordnung $\leq 2^m$, die nur von m abhängt und nicht von $\mathcal{H}$.

Beweis.

Sei $\mathcal{H}$ ein entsprechender Graph, $c = (c_1, \ldots, c_m) \in \{0,1\}^m$ und $n \geq 1$.

- Weiter sei $S(n,c) := \#\{c\text{-Paarungen von } \mathcal{H} * \mathcal{G}(m,n)\}$.
- Fasse alle $S(n,c)$ in Zeilenvektor $S(n)$ zusammen.
- Es existiert $M \in \mathbb{Z}^{2^m \times 2^m}$, sodass $S(n+1) = S(n) \cdot M$ gilt.
- Damit folgt $S(n) = S(1) \cdot M^{n-1}$.
- Cayley-Hamilton liefert passende Rekursion für $S(n)$, d. h. auch für $M(\mathcal{H} * \mathcal{G}(m,n))$.

$\square$

$(T(m,n))_{n\in\mathbb{Z}}$ als Rekursionsgleichung

Auch die beidseitige Folge $T(m,n)$ erfüllt diese Rekursionsgleichung:

- Wähle $N \gg 0$ und $\mathcal{H} := \mathcal{G}(m,-N)$.
- Es gilt $M(\mathcal{G}(m,-N) * \mathcal{G}(m,n)) = M(\mathcal{G}(m,n-N)) = T(m,n-N)$.
- $(T(m,n))_{n\in\mathbb{Z}_{\geq N}}$ erfüllt die Rekursionsgleichung.
- Da N beliebig war, gilt dies auch für die Folge $(T(m,n))_{n\in\mathbb{Z}}$.

Reziprozität neu formuliert

Ausgangspunkt war das von Stanley bewiesene Reziprozitätsgesetz:

Original

Seien $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $m \geq 1$. Dann gilt

$$T(m, -2-n) = \varepsilon_{m,n} \cdot T(m,n), \quad \text{wobei} \quad \varepsilon_{m,n} = \begin{cases} (-1)^n, & m \equiv_4 2 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir müssen also beweisen:

Übersetzt

Seien $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $m \geq 1$. Dann gilt

$$M(\mathcal{G}(m, -2-n)) = \varepsilon_{m,n} \cdot M(\mathcal{G}(m,n)), \quad \text{wobei} \quad \varepsilon_{m,n} = \begin{cases} (-1)^n, & m \equiv_4 2 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis der Reziprozität

Seien $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $m \geq 1$. Dann gilt

$$M(\mathcal{G}(m, -2-n)) = \varepsilon_{m,n} \cdot M(\mathcal{G}(m, n)), \quad \text{wobei} \quad \varepsilon_{m,n} = \begin{cases} (-1)^n, & m \equiv_4 2 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis.

- Betrachte $\mathcal{G}(m, -2-n)$ mit $n > 0$.
- Links- und rechtsseitige Kanten müssen in Paarung enthalten sein.
- Entfernt man diese, erhält man eine vorzeichenbehafteten $\mathcal{G}(m, n)$.
- Tilings können durch 2×2-Drehungen ineinander überführt werden („flip theorem“).
- Diese Drehungen ändern nicht die Parität der Anzahl der vertikalen Dominos, alle Paarungen besitzen dasselbe Vorzeichen.
- Welches?

$\square$

Literatur

Vortrag basiert auf:

- J. Propp: *A reciprocity theorem for domino tilings*, Elec. J. Comb., vol. 8 (2001), R18
- D. Klarner, J. Pollack: *Domino Tilings of Rectangles with Fixed Width*, Disc. Math., 32 (1980), pp. 45–52

Die Folien können heruntergeladen werden unter

`www.math.tu-berlin.de/~schmitt/100130_2.pdf`