Über die Zerlegung eines Quadrats in Dreiecke gleicher Fläche

Moritz W. Schmitt

Blockseminar „Pflasterungen“
Januar 2010

Gliederung

1. Einführende Bemerkungen
2. Grundlagen der Bewertungstheorie
3. Satz von Thomas-Monsky
4. Bewertung fortsetzen

Einführung

Fixiere eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$.

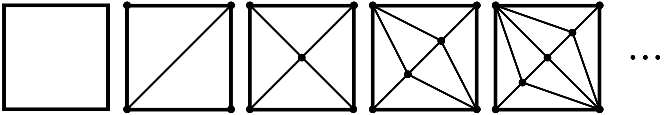
Frage:

Kann man das Einheitsquadrat mit n Dreiecken der Fläche $1/n$ pflastern?

Antwort:

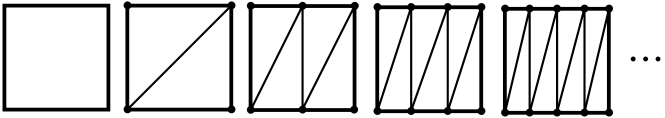
Hängt von der Parität von n ab.

Angenommen $n = 2q$. Die Lösung ist einfach:



Einführung

Eine weitere Lösung ist:



Was, wenn $n = 2q + 1$?

Theorem (Monsky 1970, Vorarbeit durch Thomas 1968)

Es ist nicht möglich, ein Quadrat in eine ungerade Anzahl von Dreiecken gleicher Fläche zu zerlegen.

Ziel des Vortrages: Beweis verstehen!

Offene Frage: Falls n gerade ist, gibt es nur endlich viele Zerlegungen?

Bewertungstheorie

Bewertungstheorie ist ein Teilgebiet der Algebra.

Definition

Sei K ein Körper. Eine Abbildung $|\cdot| : K \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt *Absolutbetrag*, falls Folgendes gilt:

1. $|x| \geq 0$ und $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
2. $|xy| = |x||y|$,
3. $|x+y| \leq |x| + |y|$

für alle $x, y \in K$.

Beispiele:

- Der übliche Betrag auf $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.
- Fixiere $p \in \mathbb{P}$. Definiere $|\cdot|_p : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ durch

$$|r|_p = \begin{cases} 1/e^k, & \text{falls } r \neq 0 \text{ und } r = p^k \frac{m}{n} \text{ mit } k \in \mathbb{Z} \\ & \text{und } m, n \text{ relativ prim zu } p \\ 0, & \text{falls } r = 0 \end{cases}$$

Bewertungstheorie

$|\cdot|_p : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt *p-adischer Absolutbetrag* auf $\mathbb{Q}$. Für diesen gilt

$$|r+s|_p \leq \max\{|r|_p, |s|_p\},$$

er besitzt die *nicht-archimedische* Eigenschaft.

Definition

Sei Γ eine angeordnete, abelsche Gruppe und ∞ ein Symbol für das

$$\infty = \infty + \infty = \infty + x = x + \infty$$

für alle $x \in \Gamma$ gelten möge. Weiter sei K ein Körper und $v : K \longrightarrow \Gamma$ eine surjektive Abbildung. Dann heißt v Bewertung auf K, falls gilt:

(i) $v(x) = \infty \;\Leftrightarrow\; x = 0$

(ii) $v(xy) = v(x) + v(y)$

(iii) $v(x+y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$

Bewertungstheorie

Bewertungen sind eine Verallgemeinerung von nicht-archimedischen Absolutbeträgen.

Ist K ein Körper, Γ eine abelsche geordnete Gruppe und $v : K \longrightarrow \Gamma$ eine Bewertung. Dann gilt

- $v(1) = 0$ und $v(-1) = 0$.
- $v(-x) = v(x)$ und $v(x^{-1}) = -v(x)$ für $x \neq 0$.
- $v(x) < v(y) \implies v(x+y) = v(x)$.

Im Folgenden bezeichen v_p die Bewertung

$$v_p : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad v_p(x) = -\ln |x|_p,$$

wir erhalten also $v_p(p^k \frac{m}{n}) = k$.

Man kann jede Bewertung auf $\mathbb{Q}$ zu einer Bewertung auf $\mathbb{R}$ fortsetzen.
Wie das geht, diskutieren wir später...

Satz von Thomas-Monsky

Theorem (Thomas 1968, Monsky 1970)

Es ist nicht möglich, ein Quadrat in eine ungerade Anzahl von Dreiecken gleicher Fläche zu zerlegen.

Beweisidee:

1. Setze $v_2 : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ fort.
2. Konstruiere mit dieser Fortsetzung 3-Färbung des $\mathbb{R}^2$.
3. Für die Fläche A_Δ jedes *Regenbogendreiecks* Δ gilt $v_2(A_\Delta) < 0$, d. h. $A_\Delta \neq \frac{1}{n}$ für ungerades n.
4. Jede Zerlegung des Einheitsquadrates enthält Regenbogendreieck.

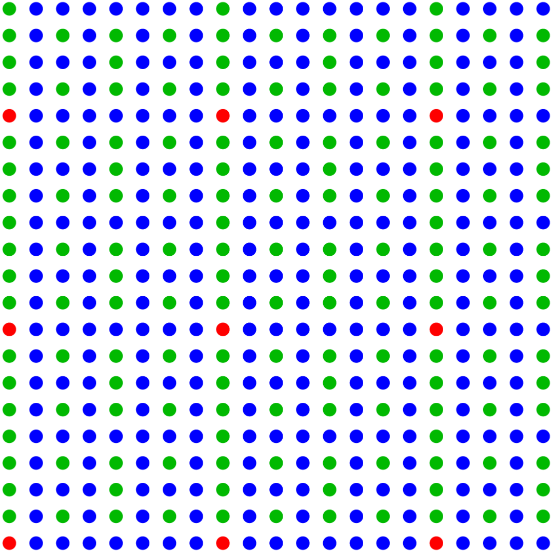
Beweis des Satzes

Schritt 1: Fortsetzung von v_2 nach $\mathbb{R}$ diskutieren wir später, sei $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine solche.

Schritt 2: Sei $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und betrachte $(\,\phi(x), \phi(y), \phi(1)\,)$. Färbe (x, y) je nachdem in welcher *Position* der minimale Wert des Tripels *zuerst* auftaucht.

$$(x, y) \text{ färben wir } \begin{cases} \text{rot}, & \text{falls } \phi(x) > \phi(1) \text{ und } \phi(y) > \phi(1), \\ \text{grün}, & \text{falls } \phi(x) > \phi(y) \text{ und } \phi(y) \leq \phi(1), \\ \text{blau}, & \text{falls } \phi(x) \leq \phi(y) \text{ und } \phi(x) \leq \phi(1) \end{cases}$$

3-Färbung von $[0,1]^2$



Schritt 3

Lemma

Für jeden roten Punkt $p_r = (x_r, y_r)$, jeden grünen Punkt $p_g = (x_g, y_g)$ und jeden blauen Punkt $p_b = (x_b, y_b)$ ist

$$\phi\left(\det\begin{bmatrix} x_r & y_r & 1 \\ x_g & y_g & 1 \\ x_b & y_b & 1 \end{bmatrix}\right) \leq 0.$$

Beweis.

$$\begin{aligned}\phi(\det[\cdots]) &= \phi(x_b y_g 1 - x_b y_r 1 + x_g y_r 1 - x_g y_b 1 + x_r y_b 1 - x_r y_g 1) \\ &= \phi(x_b y_g 1) \leq \phi(1) + \phi(1) + \phi(1) = 0\end{aligned}$$

□

Schritt 3 (Fortsetzung)

Korollar

Auf jeder Geraden im $\mathbb{R}^2$ gibt es höchstens zwei verschiedene Farben. Die Fläche eines Regenbogendreiecks ist ungleich 0 und für ungerades n ungleich $1/n$.

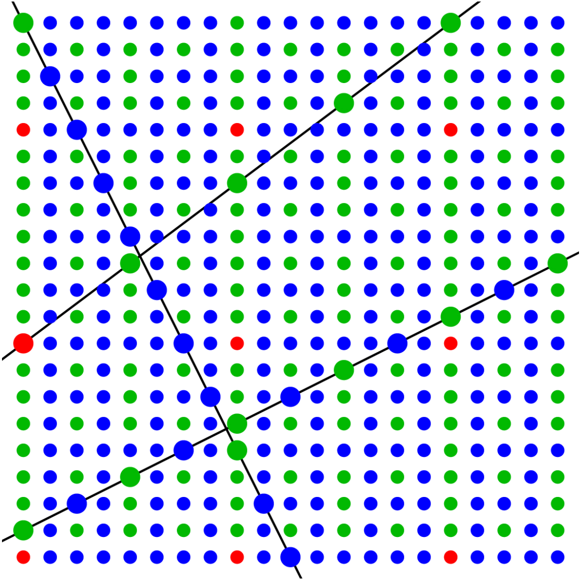
Beweis.

Sei $\Delta = \Delta(p_b, p_g, p_r)$ ein Regenbogendreieck mit Färbung entsprechend der Indizes. Dann ist $A(\Delta) = \pm\frac{1}{2}\det(p_b - p_r, p_g - p_r)$. Zusammen mit obigem Lemma folgt die Aussage, da

- $\phi(0) = \infty$ und
- $A(\Delta) = 1/n \;\Rightarrow\; \phi(\det(p_b - p_r, p_g - p_r)) = \phi(\pm 2/n) = 1 - \phi(n)$.

$\square$

Jede Gerade enthält höchstens zwei Farben



Schritt 4

Lemma

Jede Zerlegung von $[0,1]^2$ in endlich viele Dreiecke enthält eine ungerade Anzahl von Regenbogendreiecken.

Jede Zerlegung enthält also mindestens ein Regenbogendreick.

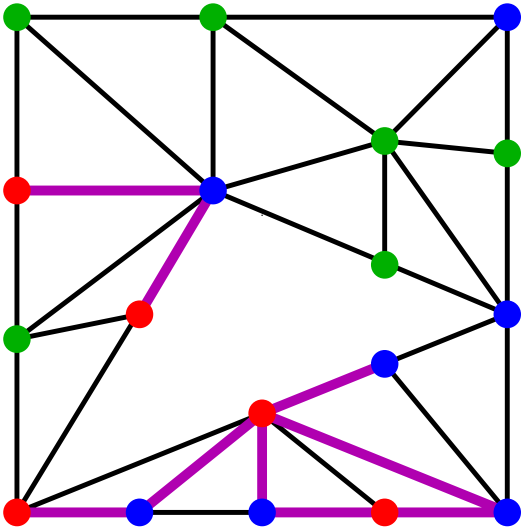
Beweis.

Die Parität der Anzahl der rot-blau-Segmente auf dem unteren Rand von $[0,1]^2$ ist gleich der Parität der Anzahl der Regenbogendreiecke der Zerlegung.

- Rand enthält ungerade Anzahl von rot-blau-Segmenten.
- Nicht-Regenbogendreieck besitzt gerade Anzahl an rot-blau-Segmenten, Regenbogendreieck ungerade Anzahl.

□

Mindestens ein Regenbogendreieck



Übersicht noch einmal

Theorem (Thomas 1968, Monsky 1970)

Es ist nicht möglich, ein Quadrat in eine ungerade Anzahl von Dreiecken gleicher Fläche zu zerlegen.

Beweisidee:

1. Setze $v_2 : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ fort.
2. Konstruiere mit dieser Fortsetzung 3-Färbung des $\mathbb{R}^2$.
3. Für die Fläche A_Δ jedes *Regenbogendreiecks* Δ gilt $v_2(A_\Delta) < 0$, d. h. $A_\Delta \neq \frac{1}{n}$ für ungerades n.
4. Jede Zerlegung des Einheitsquadrates enthält Regenbogendreieck.

Bewertung fortsetzen

Sei L/K eine Körpererweiterung, Γ eine angeordnete abelsche Gruppe und $v : K \longrightarrow \Gamma$ eine Bewertung auf K.

- v induziert einen lokalen Unterring $\mathcal{O}_v \subseteq K$. Dieser Ring besitzt die Eigenschaft:
$$\forall x \in K^* : x \in \mathcal{O}_v \text{ oder } x^{-1} \in \mathcal{O}_v \tag{1}$$
- Unterringe mit Eigenschaft (1) heißen *Bewertungsringe*.
- Bewertungsringe $\xleftrightarrow{\text{1-zu-1}}$ Bewertungen (bis auf Isomorphie von Γ)
- Es gilt der Satz von Chevally: Sei $R \subseteq K$ ein Unterring und $\mathfrak{p} \subseteq R$ ein Primideal von R. Dann existiert ein Bewertungsring $\mathcal{O}$ von K, sodass
$$R \subseteq \mathcal{O} \quad \text{and} \quad \mathcal{M} \cap R = \mathfrak{p},$$
wobei $\mathcal{M}$ das maximale Ideal von $\mathcal{O}$ ist.
- v lässt sich also von K nach L fortsetzen.

Literatur

Satz von Thomas-Monsky

- J. Thomas: *A dissection problem*, Math. Mag., 41 (1968), pp. 187–190
- P. Monsky: *On Dividing a Square into Triangles*, Amer. Math. Monthly, Vol. 77, No. 2 (1970), pp. 161–164
- M. Aigner, G. M. Ziegler: *Das BUCH der Beweise*, 3. Auflage, Springer-Verlag, 2010
- S. Stein, S. Szabó: *Algebra and Tiling*, MAA, 1996

Bewertungstheorie

- A. Engler, A. Prestel: *Valued Fields*, Springer-Verlag, 2005
- S. Lang: *Algebra*, 3. Auflage, Springer-Verlag, 2002

Dieser Vortrag ist zu finden unter

`www.math.tu-berlin.de/~schmitt/100130_1.pdf`