Structure of Transformations of Domino Tilings

Adam Nielsen, Timo Strunk

Technische Universität Berlin

30. Januar 2010

Motivation - Zweiter Teil

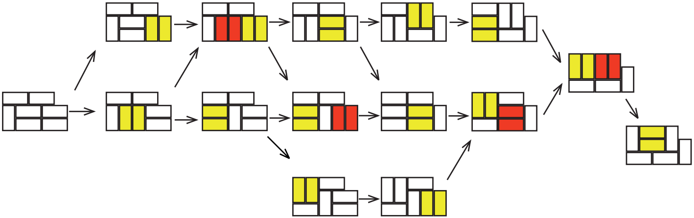
Wir haben eine Region R ohne Löcher mit einer Pflasterung gegeben und fragen uns, ob man die anderen Pflasterungen durch Flips leicht daraus erhält.

Vertikaler Domino Flip

Horizontaler Domino Flip

Motivation - Zweiter Teil

Beispiel

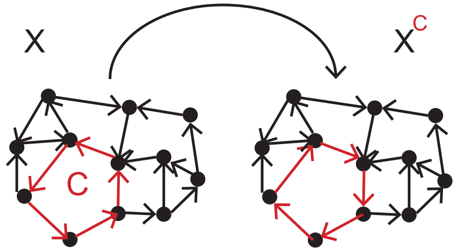


Vorgehensweise

1.Schritt : Untersuchen Flipsequenzen.
2.Schritt : Definieren eine Ordnungsrelation auf Orientierungen.
3.Schritt : Zeigen das die Relation ein distibutiven Verband ist.

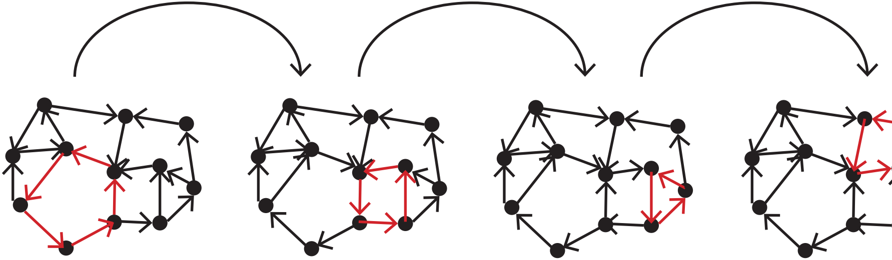
Definition

Ein FLIP (auf einer Orientierung X) ist eine Umorientierung von ccw (↺) in cw (↻) eines Essential-Zykels.



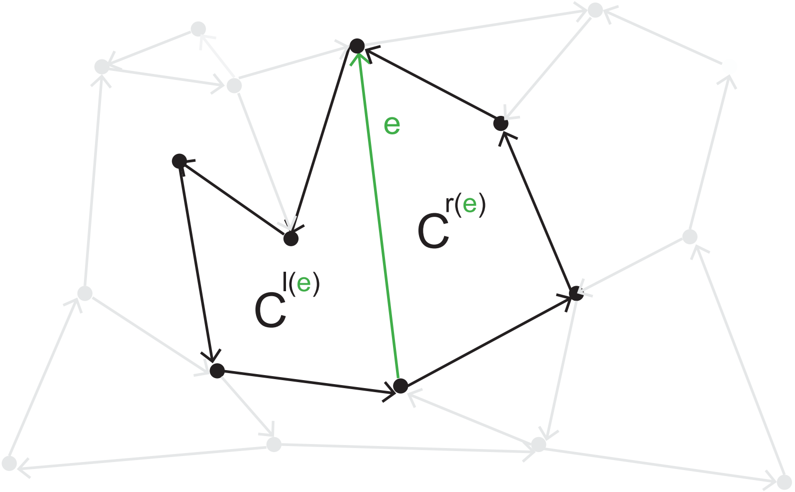
Definition

Eine FLIP SEQUENZ (auf einer Orientieung X) ist eine Sequenz $(C_1, C_2, \ldots, C_k)$, so dass
C_1 auf X, C_2 auf $X^{C_1} \ldots C_k$ auf $X^{(C_1, C_2, \ldots, C_{k-1})}$ geflippt werden kann



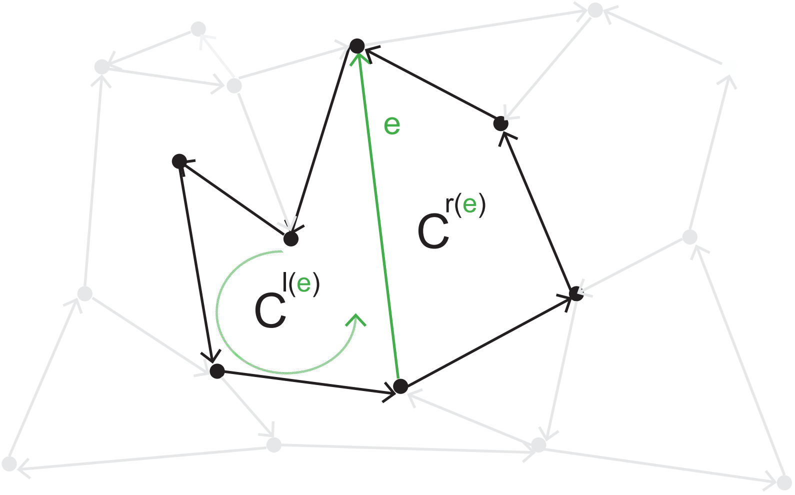
Lemma 8

Wenn $(C_1, C_2, \ldots, C_k)$ eine FLIP SEQEUENZ ist, e eine beliebige Kante, so alternieren $C^{l(e)}$ und $C^{r(e)}$ in der Sequenz. Das heißt $(\ldots, C^{l(e)}, \ldots, C^{l(e)}, \ldots) \Rightarrow (\ldots, C^{l(e)}, \ldots, C^{r(e)}, \ldots, C^{l(e)}, \ldots)$



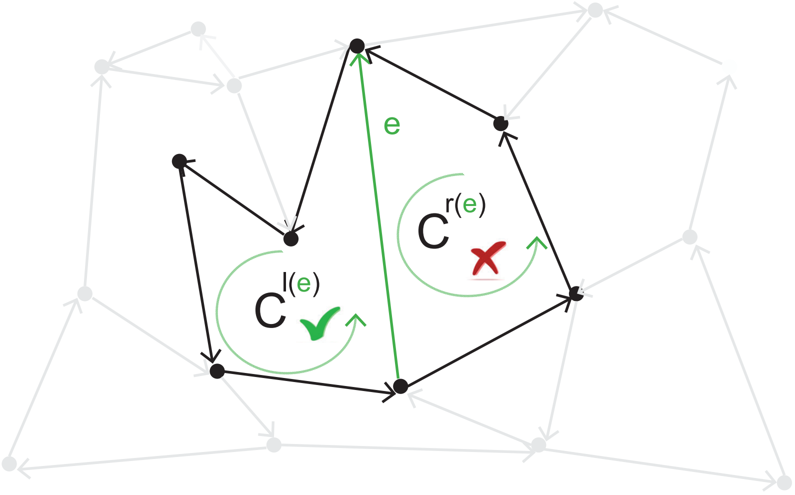
Lemma 8

Wenn $(C_1, C_2, \ldots, C_k)$ eine FLIP SEQEUENZ ist, e eine beliebige Kante, so alternieren $C^{l(e)}$ und $C^{r(e)}$ in der Sequenz. Das heißt $(\ldots, C^{l(e)}, \ldots, C^{l(e)}, \ldots) \Rightarrow (\ldots, C^{l(e)}, \ldots, C^{r(e)}, \ldots, C^{l(e)}, \ldots)$



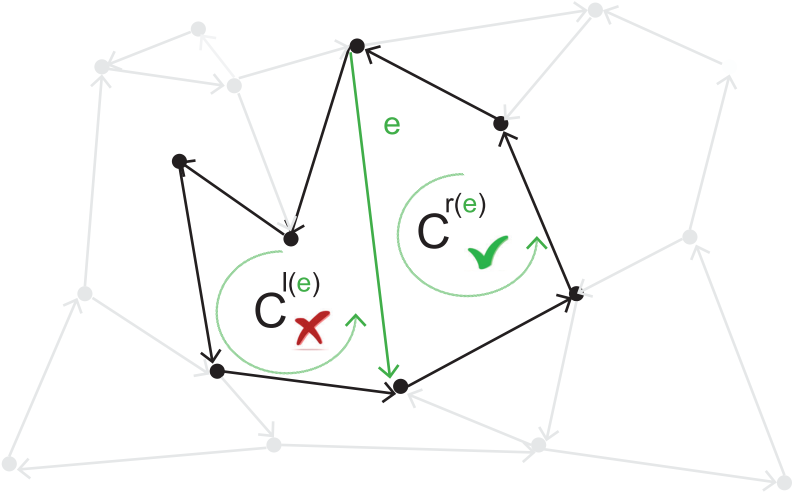
Lemma 8

Wenn $(C_1, C_2, \ldots, C_k)$ eine FLIP SEQEUENZ ist, e eine beliebige Kante, so alternieren $C^{l(e)}$ und $C^{r(e)}$ in der Sequenz. Das heißt $(\ldots, C^{l(e)}, \ldots, C^{l(e)}, \ldots) \Rightarrow (\ldots, C^{l(e)}, \ldots, C^{r(e)}, \ldots, C^{l(e)}, \ldots)$



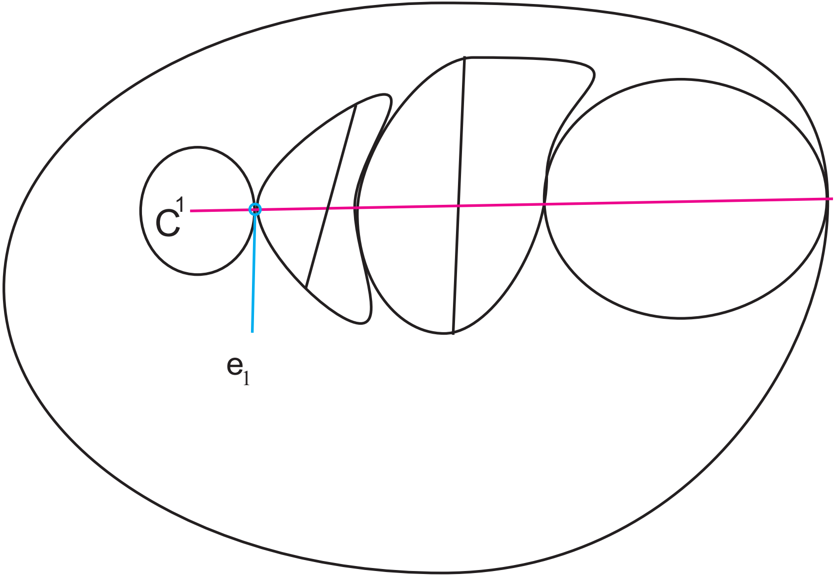
Lemma 8

Wenn $(C_1, C_2, \ldots, C_k)$ eine FLIP SEQEUENZ ist, e eine beliebige Kante, so alternieren $C^{l(e)}$ und $C^{r(e)}$ in der Sequenz. Das heißt $(\ldots, C^{l(e)}, \ldots, C^{l(e)}, \ldots) \Rightarrow (\ldots, C^{l(e)}, \ldots, C^{r(e)}, \ldots, C^{l(e)}, \ldots)$



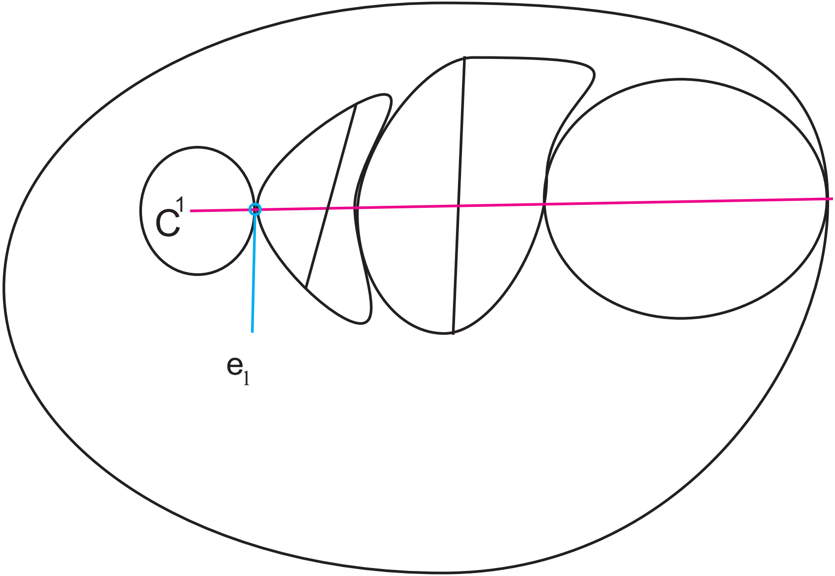
Lemma 9

Jede FLIP SEQEUENZ ist endlich.

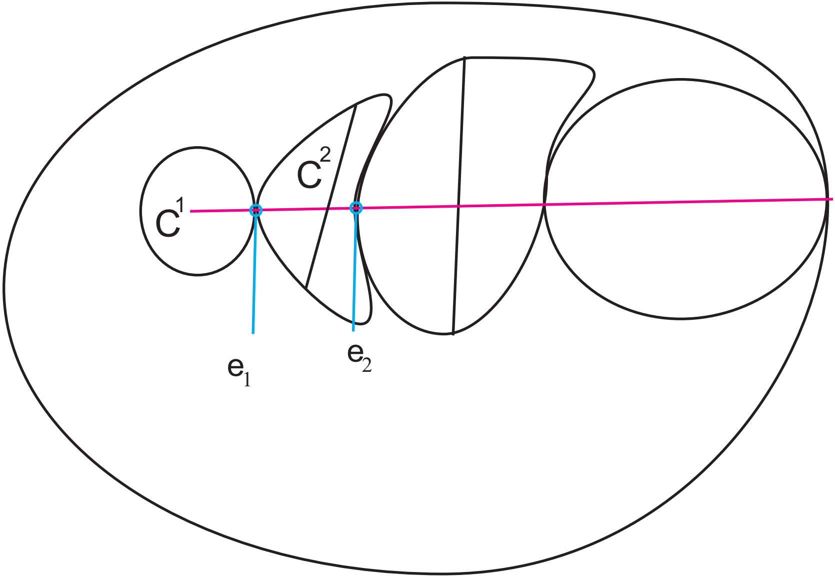


C^1
e_1

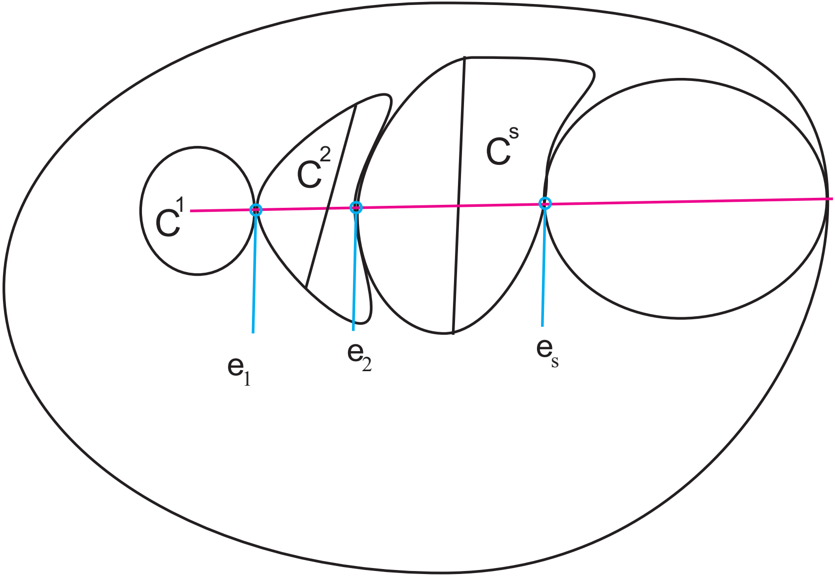
"On the Internet, nobody knows you're a dog."



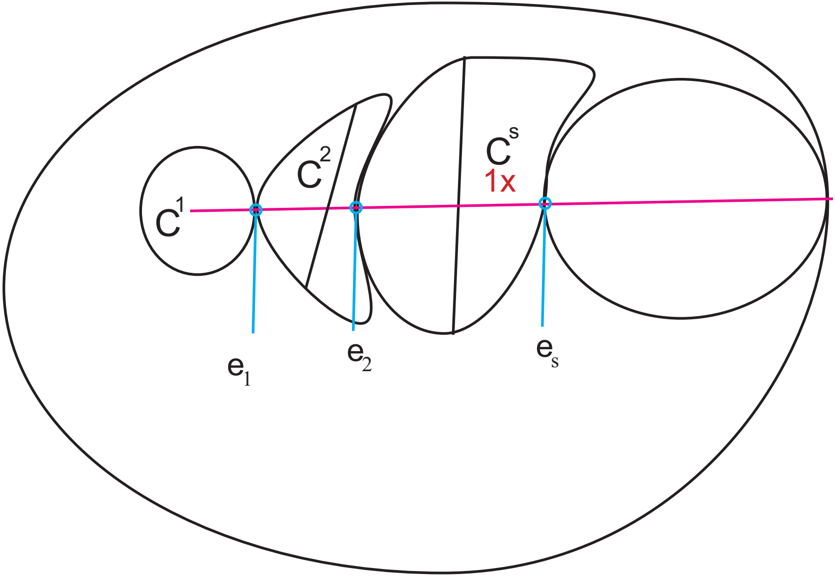
C^1
e_1

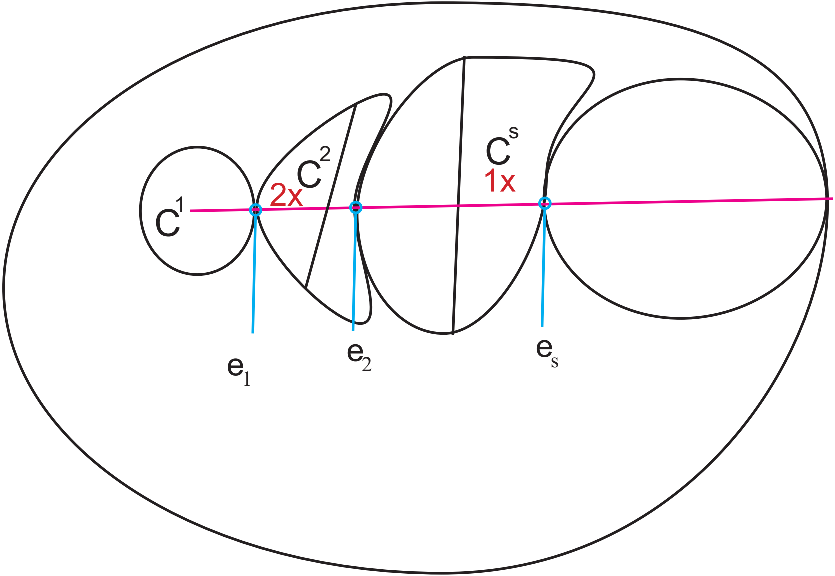


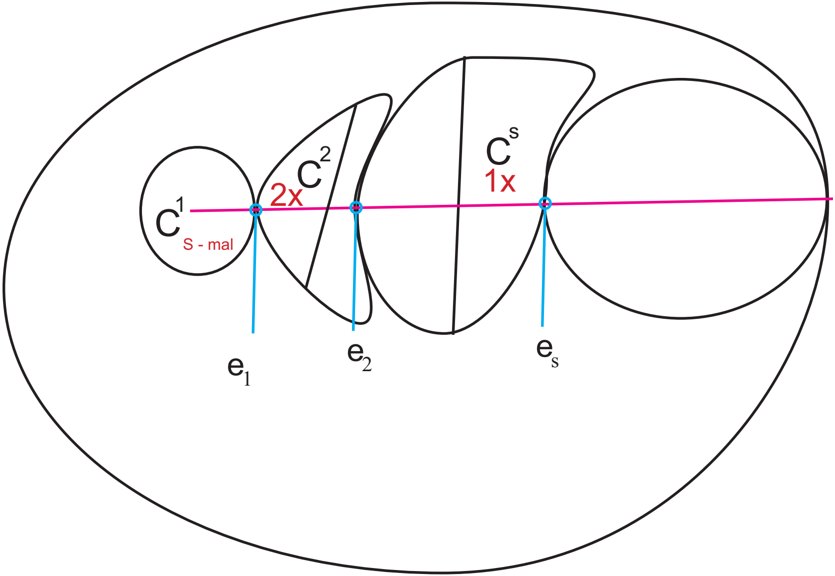
C^1
C^2
e_1
e_2



C1
C2
Cs
e1
e2
es


C^1
C^2
C^s
$1x$
e_1
e_2
e_s


C1
2x
C2
Cs
1x
e1
e2
es



C^1
S - mal
2x
C^2
C^s
1x
e_1
e_2
e_s

Ordnungsrelation

Wir definieren Relation für $\alpha-$Orienterungen X, Y.

$$Y < X$$

wenn Y durch eine FLIP SEQUENZ von X erreichbar ist.
Diese Relation ist antizyklisch.

Lemma 10

Es gibt eine eindeutige $\alpha -$ *Orientierung* X_{min}, in der jeder Zykel cw ($\circlearrowright$) orientiert ist.
Sei X eine beliebige α Orientierung. Wähle eine maximale FLIP SEQUENZ, und sei Y die erreichte Orientierung
1. Annahme es gibt ein Zykel der ccw ($\circlearrowleft$) ist

Lemma 10

Es gibt eine eindeutige $\alpha - Orientierung\ X_{min}$, in der jeder Zykel cw ($\circlearrowright$) orientiert ist.
Sei X eine beliebige α Orientierung. Wähle eine maximale FLIP SEQUENZ, und sei Y die erreichte Orientierung
1. Annahme es gibt ein Zykel der ccw ($\circlearrowleft$) ist $\Rightarrow$ Widerspruch

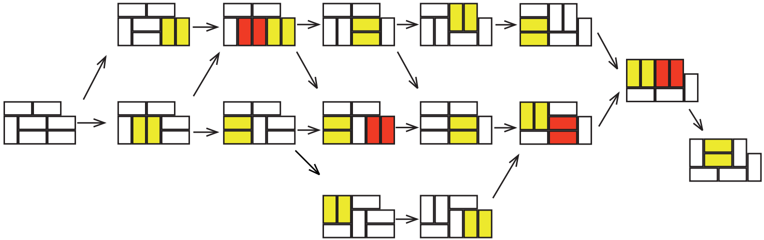
Lemma 10

Es gibt eine eindeutige $\alpha - \mathit{Orientierung}\ X_{min}$, in der jeder Zykel cw ($\circlearrowright$) orientiert ist.
Sei X eine beliebige α Orientierung. Wähle eine maximale FLIP SEQUENZ, und sei Y die erreichte Orientierung
1. Annahme es gibt ein Zykel der ccw ($\circlearrowleft$) ist $\Rightarrow$ Widerspruch
2. Annahme es zwei verschieden Orientieungen mit jeder Zykel ist cw ($\circlearrowright$) ist

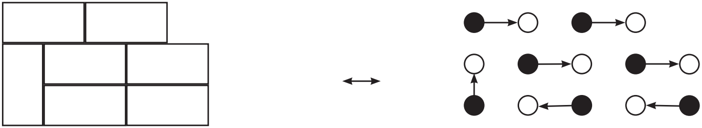
Lemma 10

Es gibt eine eindeutige $\alpha - \mathit{Orientierung}\ X_{min}$, in der jeder Zykel cw ($\circlearrowright$) orientiert ist.
Sei X eine beliebige α Orientierung. Wähle eine maximale FLIP SEQUENZ, und sei Y die erreichte Orientierung
1. Annahme es gibt ein Zykel der ccw ($\circlearrowleft$) ist $\Rightarrow$ Widerspruch
2. Annahme es zwei verschieden Orientieungen mit jeder Zykel ist cw ($\circlearrowright$) ist $\Rightarrow$ Widerspruch

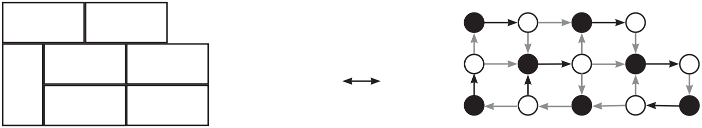
Das Ziel- Distributiver Verband



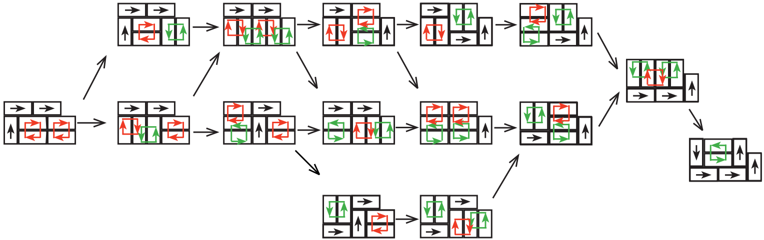
Modellierung



Modellierung



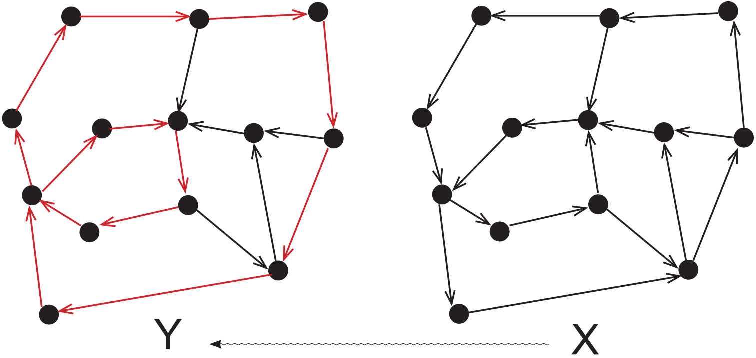
Das Ziel- Distributiver Verband



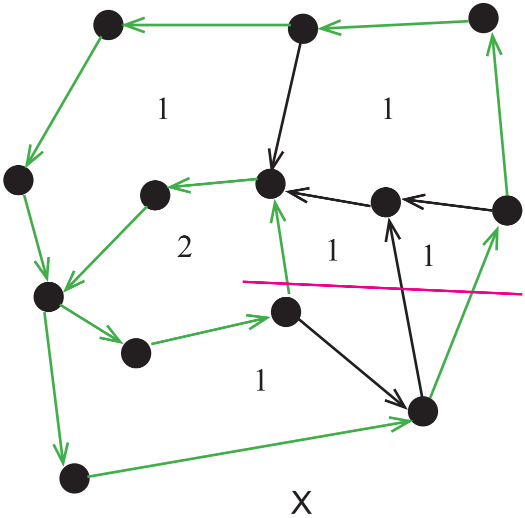
Lemma 11

Jede FLIPSEQUENZ von X nach Y führt die gleiche Anzahl an Flips auf jeden Essentiel Zyklel C aus.

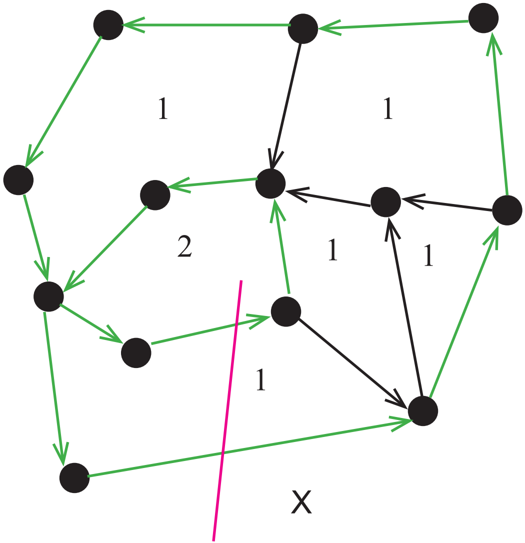
Beispiel Flips Zählen



Beispiel Flips Zählen

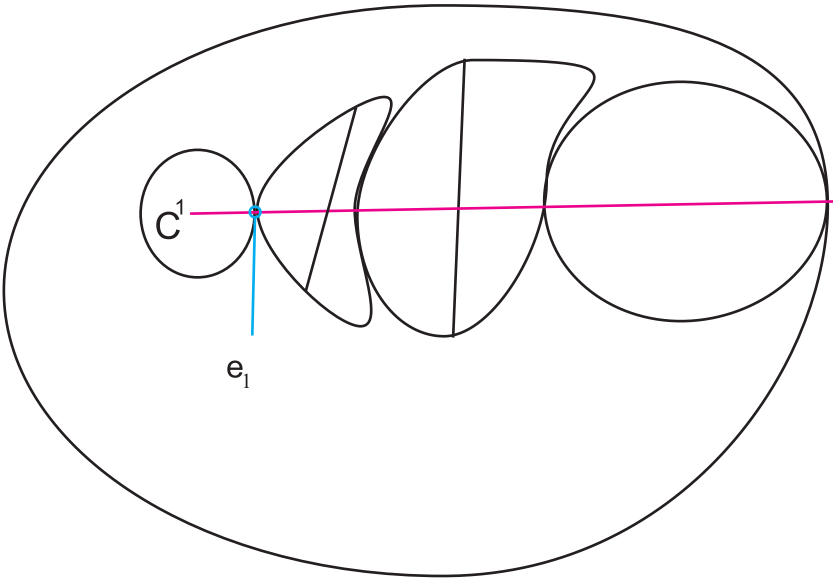


Beispiel Flips Zählen

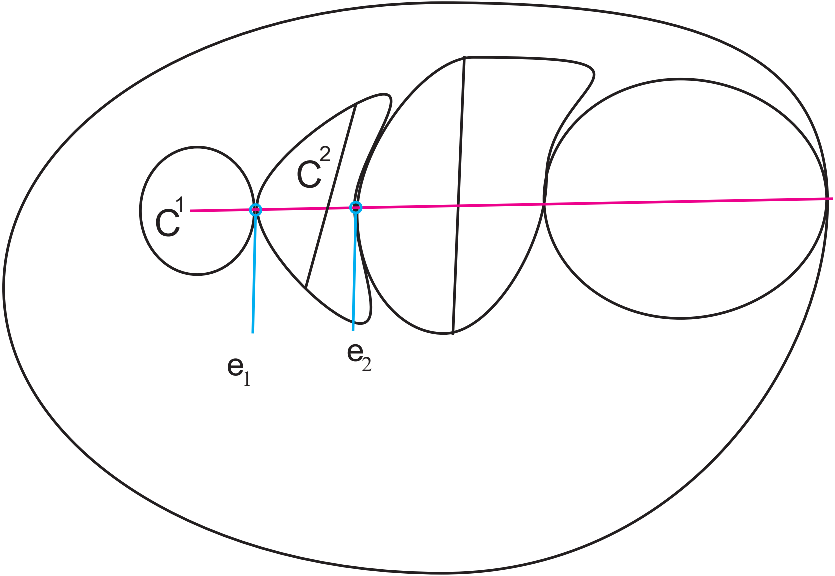


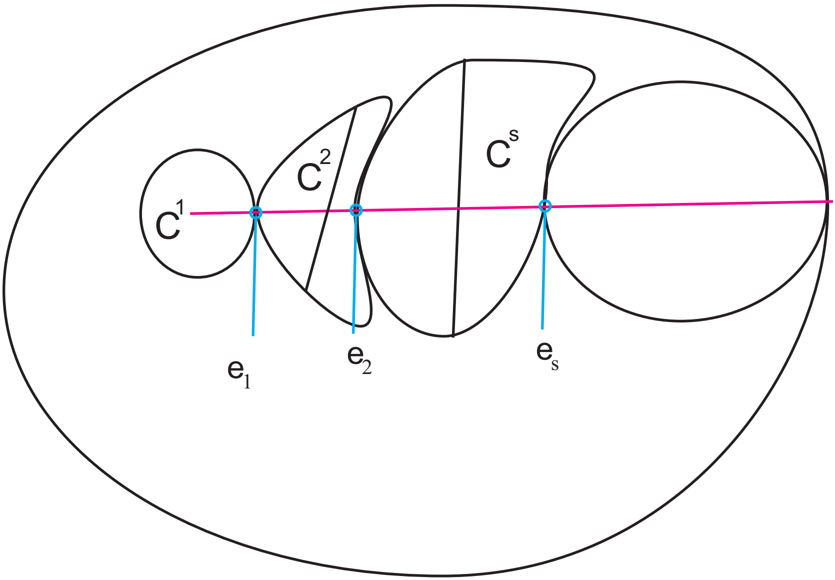
Lemma 11

Jede FLIPSEQUENZ von X nach Y führt die gleiche Anzahl an Flips auf jeden Essentiel Zyklel C aus.



C^1
e_1


C^1
C^2
e_1
e_2

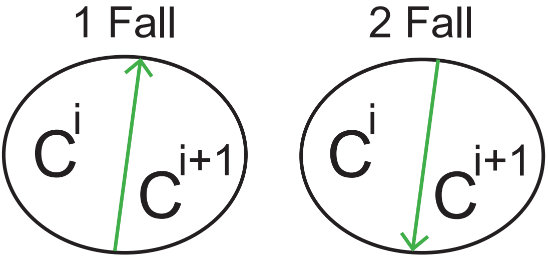


C^1
C^2
C^s
e_1
e_2
e_s

Beweis 11

Definiere $z_S(C^i) = |\{j : C_j = C^i\}|$
Dann gilt: $|z_S(C^i) - z_S(C^{i+1})| \leq 1$, $z_S(C^s) \leq 1$
Sei D Menge der verschieden Orientierten Kanten aaf X, Y.

- $e_i \notin D \Rightarrow z_S(C^i) = z_S(C^{i+1})$
- $e_i \in D$
  - 1 Fall C^i wird vor C^{i+1} geflippt. $\Rightarrow z_S(C^i) = z_S(C^{i+1}) + 1$
  - 2 Fall C^{i+1} wird vor C^i geflippt. $\Rightarrow z_S(C^i) = z_S(C^{i+1}) - 1$



Beweis 11

Damit ist $z_S(C^1)$ eindeutig bestimmt.

$$z_S(C^i) = \begin{cases} z_S(C^{i+1}) & e_i \notin D \\ z_S(C^{i+1}) + 1, & \text{pinke Linie von links zu } e_i, e_i \in D \\ z_S(C^{i+1}) - 1, & \text{pinke Linie von rechts zu } e_i, e_i \in D \end{cases}$$

Daraus ergiebt sich also
$z_S(C^1) = |\{\ e_i : e_i \in D$ die pinke Linie kommt von rechts, vom Standpunkt der Kante $e_i\ \}\ | - |\ \{\ e_i : e_i \in D$ die pinke Linie kommt von links, vom Standpunkt der Kante $e_i\ \}|$

Kurzer Überblick

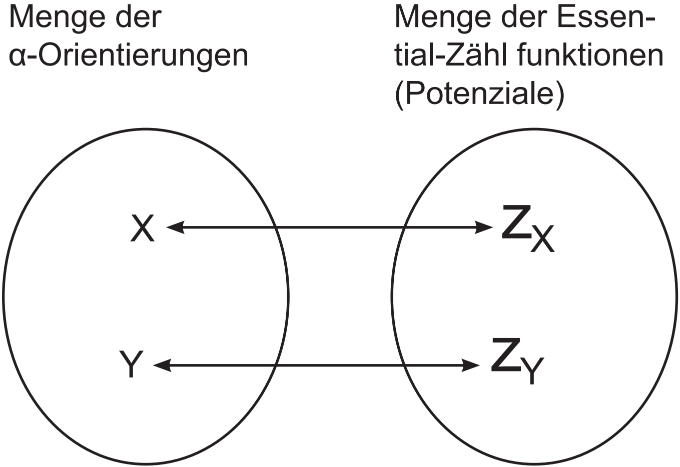
- Wir haben gezeigt, jede Orientierung besitzt eine Sequenz zur Orientierung X_{min}
- Wir haben gezeigt, zwei Sequenzen von einer Orientierung X zu Y, unterscheiden sich höchstens in der Reihenfolge der FLIPS.

Für beliebige α-Orientierung X sei
$\mathbb{E}_\alpha =$ Menge aller essential Zykel, S eine Sequenz von X nach X_{min}

$$Z_X : \mathbb{E}_\alpha \to \mathbb{N}, \text{ mit } Z_X(C) = z_S(C)$$

Weiteres Vorgehen - basteln des distibutiven Verbandes

Wir wollen eine Bijektion auf



Weiteres Vorgehen - basteln des distibutiven Verbandes

1.Schritt : Wir verallgemeinern die Zählfunktionen.
2.Schritt : Wir zeigen das die Zuordung $\alpha-$Orientiertung X $\rightarrow Z_X$ Bijektiv und Ordnungserhaltend ist.
3.Schritt : Wir kriegen einen distibutiven Verband.

Potenzial - Verallgemeinerung von Zählfunktionen

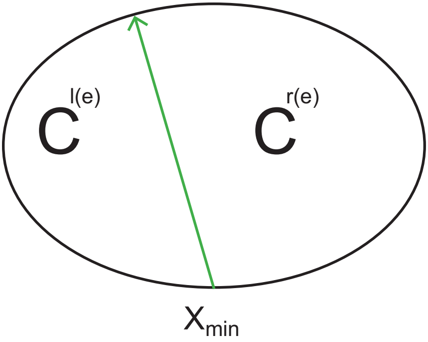
Ein α Potenzial φ für einen Graphen G ist eine Abbildung $\varphi : \mathbb{E}_\alpha \rightarrow \mathbb{N}$ mit folgenden Eigenschaften:

- $|\varphi(C) - \varphi(C')| \leq 1$,wenn C und C' eine gemeinsame Kante haben
- $\varphi(C) \leq 1$,wenn eine Kante e existiert, so dass C der einzige essentiele Zykel ist, der e enthält.
- $\varphi(C^{l(e)}) \leq \varphi(C^{r(e)})$,wenn die entsprechenden Zykel in X_{min} existieren, bzgl der Kante e.

Lemma 12 - Zählfunktion sind Potenziale

$z_X : \mathbb{E}_\alpha \to \mathbb{N}$ ist ein $\alpha-$Potential

- $|z_X(C) - z_X(C')| \leq 1$,wenn C und C' eine gemeinsame Kante haben
- $z_X(C) \leq 1$,wenn eine Kante e existiert, so dass C der einzige essentiele Zykel ist, der e enthält.
- $z_X(C^{l(e)}) \leq z_X(C^{r(e)})$,wenn die entsprechenden Zykel in X_{min} existieren, bzgl der Kante e.



Lemma 13 - Potenziale sind Zählfunktion

Für jedes $\alpha-$Potential $\varphi : \mathbb{E}_\alpha \to \mathbb{N}$ existiert eine $\alpha-$Orientierung X_φ mit $z_{X_\varphi} = \varphi$

Wir zeigen das Lemma in 3 Schritten

- 1. Konstruiere X_φ
- 2. Zeige X_φ ist $\alpha-$Orientierung
- 3. Zeige $z_{X_\varphi} = \varphi$

Lemma 13 - 1. Konstruiere X_φ

Sei $e \in E$:

- Wenn e in keinem essential Zykel, setze $X_\varphi(e) = X_{min}(e)$
- Wenn e in nur einem essential Zykel C^e, setze $X_\varphi(e) = X_{min}(e)$, wenn $\varphi(C^e) = 0$ sonst andersrum.
- Wenn e Kante von zwei essential Zykel $C^{l(e)}$,$C^{r(e)}$ in $X_{min}(e)$, so setze $X_\varphi(e) = X_{min}(e)$ wenn $\varphi(C^{l(e)}) = \varphi(C^{r(e)})$ sonst andersrum.

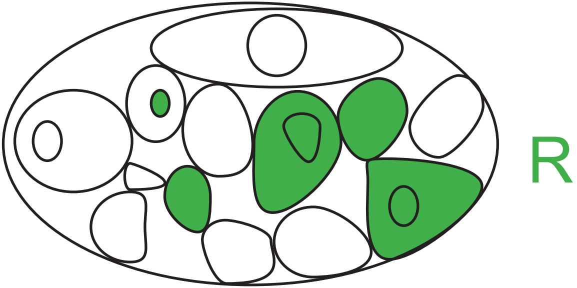
Lemma 13 - 2. Zeige X_φ ist $\alpha-$Orientierung

2.Schritt Induktion nach $\sum_{C \in \mathbb{E}_\alpha} \varphi(C)$ Induktionsbehauptung: X_φ ist $\alpha-$Orientierung

IA $\sum\limits_{C \in \mathbb{E}_\alpha} \varphi(C) = 0 \Rightarrow X_\varphi = X_{min}$

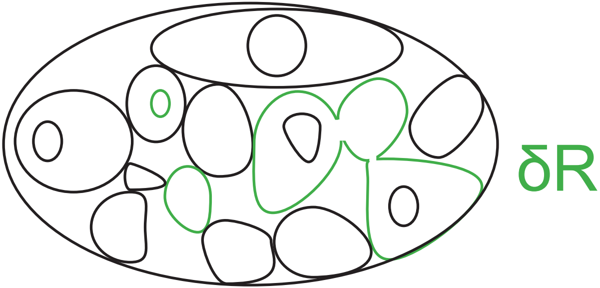
IS $\sum\limits_{C \in \mathbb{E}_\alpha} \varphi(C) > 0$

Setze $m := max\{\varphi(C) | C \in \mathbb{E}_\alpha\}$ $R := \cup_{C \in \mathbb{E}_\alpha, \varphi(C) = m} Int(C)$



Lemma 13 - 2. Zeige X_φ ist $\alpha-$Orientierung

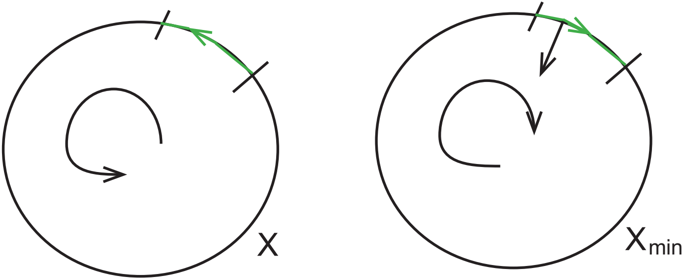
Bestimme Orientierung der Kanten auf δR



Lemma 13 - 2. Zeige X_φ ist $\alpha-$Orientierung

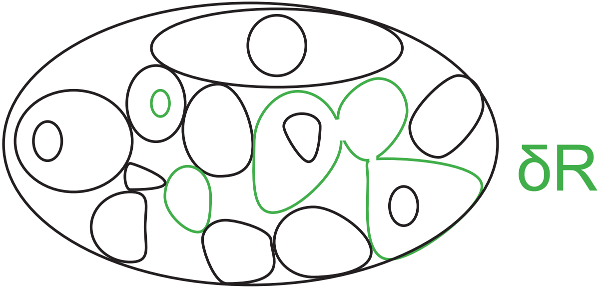
Sei $e \in \delta R$ und e nur auf einem essential Zykel.

Wähle X so: Int(C) ist rechts von e



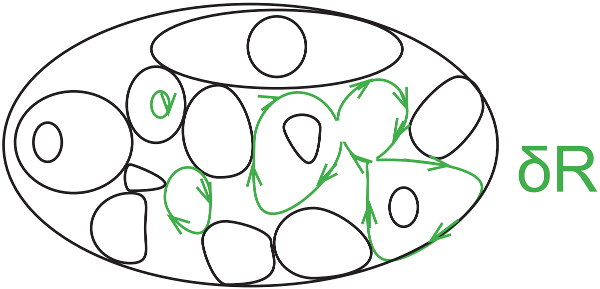
Lemma 13 - 2. Zeige X_φ ist $\alpha-$Orientierung

Sei $e \in \delta R$ und e auf zwei essential Zykel.
Es gilt $\varphi(C^{l(e)}) \leq \varphi(C^{r(e)})$. Gleichheit kann wegen Konstruktion nicht sein, also $\varphi(C^{l(e)}) < \varphi(C^{r(e)})$



Lemma 13 - 2. Zeige X_φ ist $\alpha-$Orientierung

$\Rightarrow \delta R$ ist cw ($\circlearrowright$) orientiert in X_{min} und zerfällt in einfache Zykel.



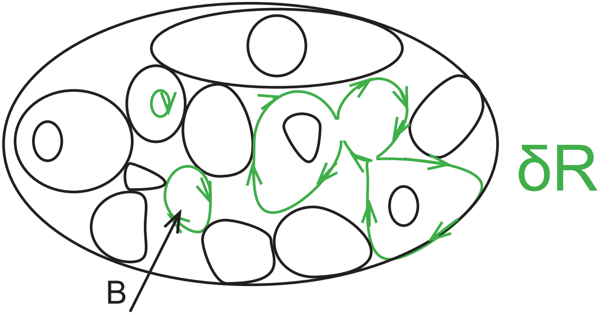
Lemma 13 - 2. Zeige X_φ ist $\alpha-$Orientierung

$\Rightarrow \delta R$ ist ccw ($\circlearrowleft$) in X_φ (entgegengesetzt zu X_{min})
Für $e \in \delta R$ gilt :

- Wenn e in nur einem essential Zykel C^e, so ist $\varphi(C^e) = 1$ also $X_\varphi(e) \neq X_{min}(e)$
- Wenn e Kante von zwei essential Zykel, so gilt $\varphi(C^{l(e)}) < \varphi(C^{r(e)})$, also $X_\varphi(e) \neq X_{min}(e)$.

Lemma 13 - 2. Zeige X_φ ist $\alpha-$Orientierung

Wähle Zykel B, dieser zerfällt in essential Zykel $\mathbb{E}_B$
Definiere $\varphi^*(C) = \varphi(C) - 1$ für $C \in \mathbb{E}_B$ sonst $\varphi^*(C) = \varphi(C)$



Lemma 13 - 2. Zeige X_φ ist $\alpha-$Orientierung

Es gilt, dass φ^* ein Potenzial ist.

- Für $e \notin \mathbb{E}_B$
  $\varphi^*(C) = \varphi(C)$
- Für $e \in B$
  $\varphi^*(C^{l(e)}) = \varphi(C^{l(e)}) = \varphi(C^{r(e)}) - 1 = \varphi^*(C^{r(e)})$
- Für $e \in \mathbb{E}_B \setminus B$
  $\varphi^*(C^{l(e)}) = \varphi(C^{l(e)}) - 1$
  $\varphi^*(C^{r(e)}) = \varphi(C^{r(e)}) - 1$

Lemma 13 - 2. Zeige X_φ ist $\alpha-$Orientierung

Es gilt, dass φ^* ein Potenzial ist.

- Für $e \notin \mathbb{E}_B$
  $\varphi^*(C) = \varphi(C)$
- Für $e \in B$
  $\varphi^*(C^{l(e)}) = \varphi(C^{l(e)}) = \varphi(C^{r(e)}) - 1 = \varphi^*(C^{r(e)})$
- Für $e \in \mathbb{E}_B \setminus B$
  $\varphi^*(C^{l(e)}) = \varphi(C^{l(e)}) - 1$
  $\varphi^*(C^{r(e)}) = \varphi(C^{r(e)}) - 1$

Nach *IV* ist X_{φ^*} $\alpha-$Orientierung
X_{φ^*} und X_φ unterscheiden sich nur in einem gerichteten essential Zykel

Lemma 13 - 3. Zeige $z_{X_\varphi} = \varphi$

3 Schritt Induktion nach $\sum_{C \in \mathbb{E}_\alpha} \varphi(C)$
Induktionsbehauptung: $z_{X_\varphi} = \varphi$

IA $\sum\limits_{C \in \mathbb{E}_\alpha} \varphi(C) = 0 \Rightarrow$

$$X_\varphi = X_{min}, z_{X_{min}}(C) = 0 = \varphi(C)$$

IS Mache alles so wie eben...
Es folgt dann für $C \in \mathbb{E}_\alpha \setminus \mathbb{E}_B$

$$z_{X_\varphi}(C) = z_{X_{\varphi^*}}(C) = \varphi^*$$

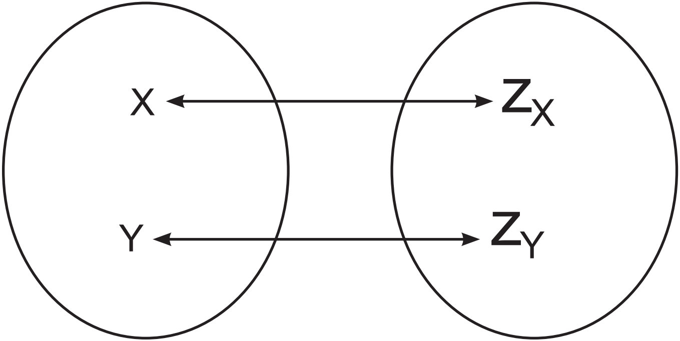
und für $C \in \mathbb{E}_B$

$$z_{X_\varphi}(C) = z_{X_{\varphi^*}}(C) + 1 = \varphi^*(C) + 1 = \varphi(C)$$

Fast fertig ..

Menge der α-Orientierungen

Menge der Essen-tial-Zähl funktionen (Potenziale)



Injektiv

Sei $z_X = z_Y$.
Auf den Weg von X_{min} nach X wird jede Kante so oft umorientiert wie von X_{min} nach Y.
$X = Y$.

WO bleibt der Verband?!

Ein distibutiver Verband ist ein Poset $P = (X, \leq)$ mit:

- Es existieren 0,1, so dass $0 \leq x \leq 1 \forall x \in X$
- $\forall x,y \in X$ existiert eine eindeutige
  - kleinste obere Schranke $max(x,y)$
  - größte untere Schranke $min(x,y)$
- $max(a,min(b,c)) = min(max(a,b),max(a,c))$
- $min(a,max(b,c)) = max(min(a,b),min(a,c))$

Lemma 14 - wir kriegen einen Distributiven Verband

Die Menge X alle $\alpha-$Potenziale $\varphi : \mathbb{E} \to \mathbb{N}$ zusammen mit

$$\varphi_1 \leq \varphi_2 :\Leftrightarrow \varphi_1(C) \leq \varphi_2(C) \forall C \in \mathbb{E}_\alpha$$

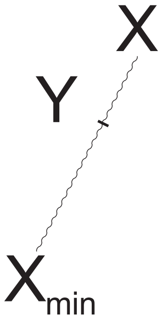
ist ein distributiver Verband.
Wähle

$$min(\varphi_1,\varphi_2)(C) := min(\varphi_1(C), \varphi_2(C))$$

$$max(\varphi_1,\varphi_2)(C) := max(\varphi_1(C), \varphi_2(C))$$

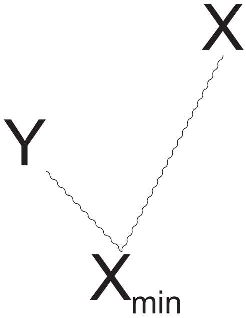
Ordnungserhaltend

- $Y < X \Rightarrow z_Y < z_X$



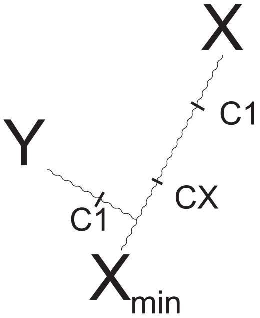
Ordnungserhaltend

- $Y < X \Rightarrow z_Y < z_X$
- Sei $z_Y < z_X$



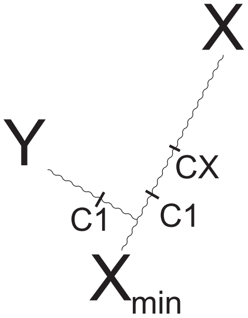
Ordnungserhaltend

- $Y < X \Rightarrow z_Y < z_X$
- Sei $z_Y < z_X$



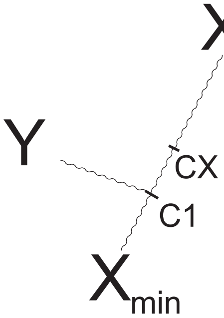
Ordnungserhaltend

- $Y < X \Rightarrow z_Y < z_X$
- Sei $z_Y < z_X$



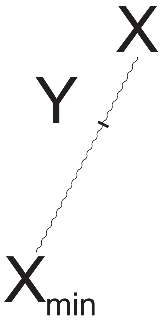
Ordnungserhaltend

- $Y < X \Rightarrow z_Y < z_X$
- Sei $z_Y < z_X$



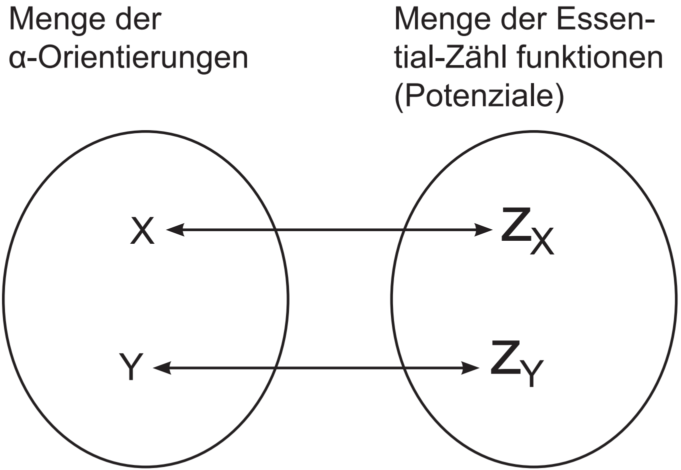
Ordnungserhaltend

- $Y < X \Rightarrow z_Y < z_X$
- Sei $z_Y < z_X$

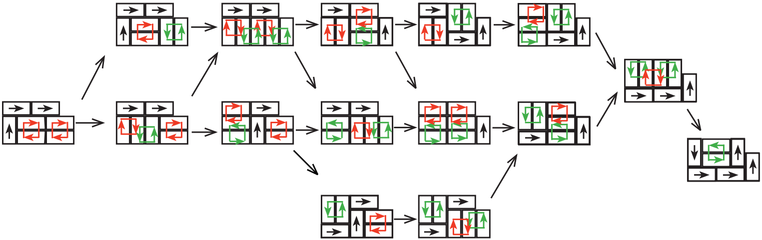


Ordnungserhaltend

- $Y < X \Rightarrow z_Y < z_X$
- $z_Y < z_X \Rightarrow Y < X$



Wir sind am Ziel



- Stefan Felsner, *Lattice Structures from Planar Graphs*
- Peter Lam and Heping Zhang, *A Distributive Lattice on the Set of Perfect Matchings of a Plane Bipartite Graph*
- James Propp, *Lattice Structure for Orientations of Graphs*