

# Struktur von Pflasterungen mit Dominos

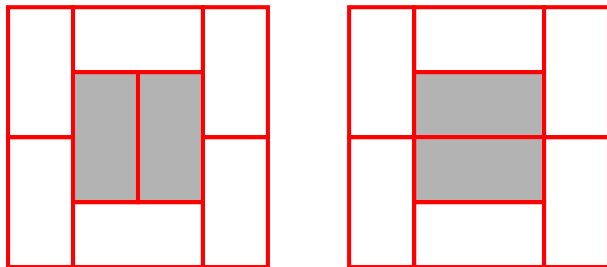
Adam Nielsen, Timo Strunk

Technische Universität Berlin

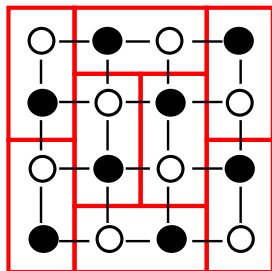
31. Januar 2010

# Motivation

Ziel: Eine Struktur aller Domino-Tilings einer gegebenen Fläche  
Idee: Betrachte einfache Modifikationen von Tilings.



Betrachte den Zellgraphen der Fläche, sowie dessen Bipartition (schwarze und weiße Knoten).

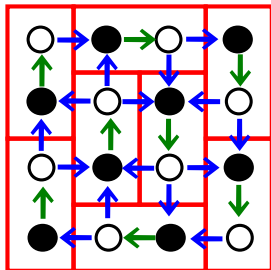


# Modell - Orientierung des Graphen

Orientiere den Graphen, so dass:

$e \in E$  ist von schwarz nach weiß gerichtet

$\Leftrightarrow$  die inzidenten Zellen werden vom gleichen Domino überdeckt.

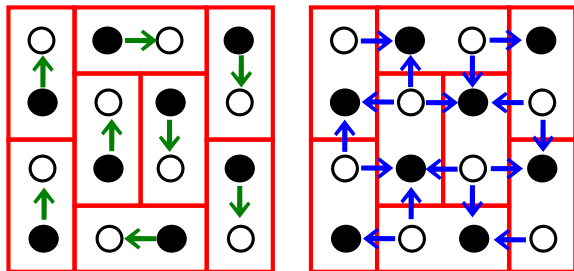


# Modell - Orientierung des Graphen

Die Fläche wird vollständig und überschneidungslos überdeckt.

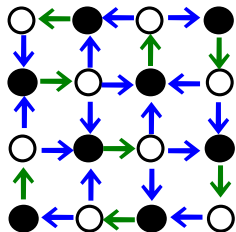
$\Rightarrow \text{outdeg}(v) = 1$  für alle schwarzen Knoten  $v$ ,

$\text{outdeg}(w) = \text{deg}(w) - 1$  für alle weißen Knoten  $w$ .

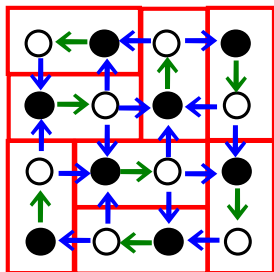


## Rückwärts

gegeben: Orientierung mit  $\text{outdeg}(v) = 1$  für schwarze Knoten  $v$ ,  
 $\text{outdeg}(w) = \text{deg}(v) - 1$  für weiße Knoten  $w$ :



## Induzierte Pflasterung



## Definition 1

Sei  $G = (V, E)$  ein planarer Graph mit fester Einbettung in die Ebene,  $\alpha$  eine Abbildung  $V \rightarrow \mathbb{N}$ . Dann ist eine Orientierung von  $G$  so dass für alle Knoten  $v$  gilt  $outdeg(v) = \alpha(v)$  eine  $\alpha$ -Orientierung.

Bemerkung: Wenn wir in Zukunft von  $\alpha$ -Orientierungen sprechen, werden wir dabei  $\alpha$  immer als fest gegeben voraussetzen.

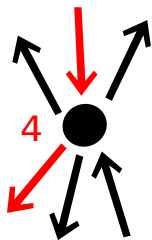
## Lemma 1

Sind  $A$  und  $B$   $\alpha$ -Orientierungen, so lassen sie sich durch sukzessives Umorientieren gerichteter Zyklen ineinander überführen.

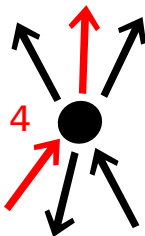
# Beziehungen zwischen $\alpha$ -Orientierungen

## Lemma 1 - Beweis

Ist  $C$  ein gerichteter Zykel in einer  $\alpha$ -Orientierung, erhalt man durch umdrehen aller Kanten von  $C$  wieder eine  $\alpha$ -Orientierung, da in jedem Knoten von  $C$  eine Innenkante und eine Außen­kante umgedreht wird.



Orientierung A



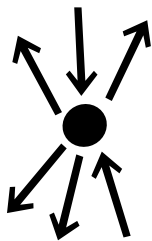
Orientierung B

# Beziehungen zwischen $\alpha$ -Orientierungen

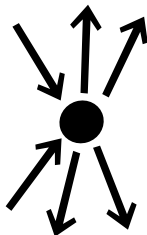
## Lemma 1 - Beweis

Die Symmetrische Differenz zweier  $\alpha$ -Orientierungen induziert einen gerichteten Eulerschen Subgraphen in jeweils beiden Orientierungen.

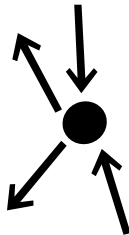
$$\#Out_{\Delta} = \#Out_A \cap In_B = \alpha - \#Out_A \cap Out_B = \#Out_B \cap In_A = \#In_{\Delta}$$



Orientierung A



Orientierung B

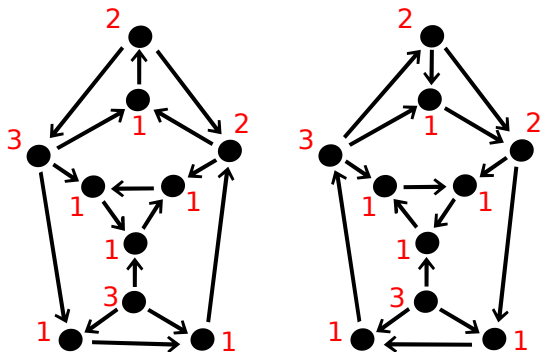


Differenz

# Beziehungen zwischen $\alpha$ -Orientierungen

## Lemma 1 - Beispiel

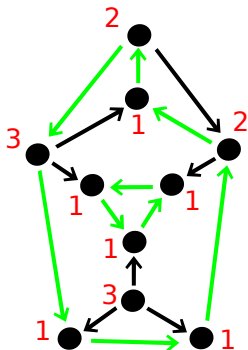
2 verschiedene  $\alpha$ -Orientierungen



# Beziehungen zwischen $\alpha$ -Orientierungen

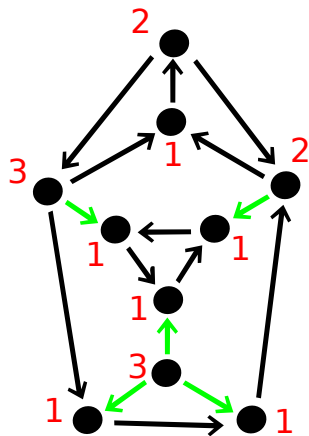
## Lemma 1 - Beispiel

Differenz



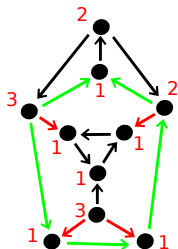
## Definition 2

Eine Kante, die in jeder  $\alpha$ -Orientierung gleich gerichtet ist, heisst starr.



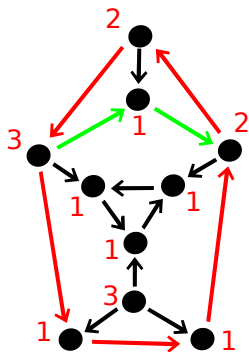
## Definition 3

Ein einfacher Kreis  $C$  in  $G$  heisst essenziell, wenn er keine Sehnen besitzt, in einer  $\alpha$ -Orientierung gerichtet ist und sein innerer Schnitt (die Kanten zwischen Punkten auf  $C$  und der von  $C$  eingeschlossenen Fläche) starr ist.



## Definition 4

Sei  $C$  ein Kreis in  $G$ ,  $\alpha$  eine Orientierung von  $G$ . Dann heißt ein Pfad  $P$  Sehnenpfad von  $C$  wenn er gerichtet ist, im Inneren von  $C$  liegt und sein erster und letzter Knoten auf  $C$  liegen.



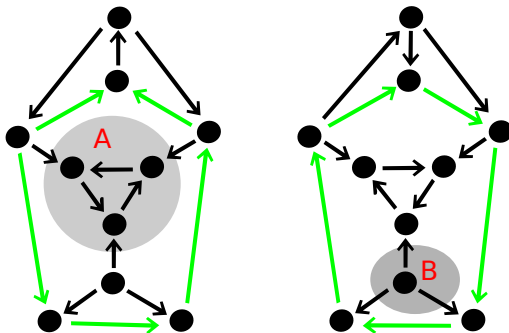
## Lemma 2

Sei  $C$  ein Kreis und es gibt eine  $\alpha$ -Orientierung sodass  $C$  keinen Sehnenpfad hat. Dann ist der innere Schnitt von  $C$  starr.

## Lemma 2 - Beweis

$A = \{ c \in \text{Int}(C) \mid v \text{ auf gerichtetem Pfad von } C \text{ erreichbar} \}$

$B = \{ c \in \text{Int}(C) \mid v \text{ nicht auf gerichtetem Pfad von } C \text{ erreichbar} \}$



## Lemma 2 - Beweis

Wir sehen: A hat keine ausgehenden Kanten, B keine eingehenden Kanten. Es gilt  $\sum_{v \in A} \alpha(v) = |E(A)|$ .

Diese Gleichung gilt für alle  $\alpha$ -Orientierungen, daher sind auch in jeder anderen  $\alpha$ -Orientierung alle Kanten im Schnitt von A eingehende Kanten. Durch Komplementbildung folgt analog, dass die Kanten im Schnitt von B in keiner  $\alpha$ -Orientierung eingehende Kanten sind.

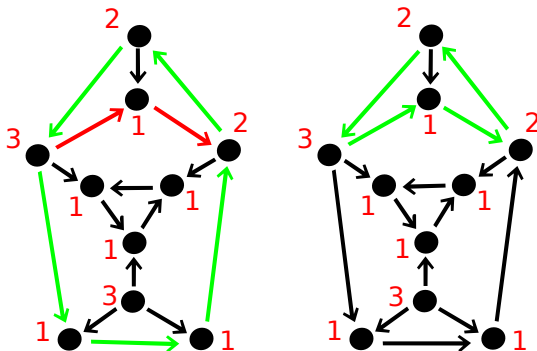
Damit sind diese Kanten starr.

## Lemma 3

Wenn für eine  $\alpha$ -Orientierung  $C$  gerichtet ist und einen Sehnenpfad hat, dann ist der innere Schnitt von  $C$  nicht starr.

## Lemma 3 - Beweis

Der Pfad bildet mit einem Segment von  $C$  einen gerichteten Zykel, Umorientieren liefert  $\alpha$ -Orientierung mit umgekehrter Orientierung



## Lemma 4

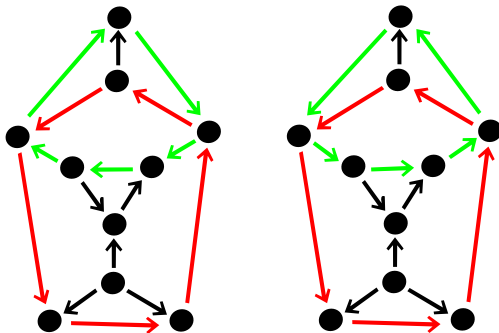
Wenn  $C$  und  $D$  essentielle Zykel sind gilt:  
Die eingeschlossenen Flächen von  $C$  und  $D$  überschneiden sich nicht oder ihre Knotenmengen sind disjunkt.

## Korollar

Jede Kante ist maximal Teil von 2 essentiellen Zykeln.

## Lemma 4 - Beweis

angenommen nicht, dann verläuft ein Teil eines Zyklus im Innern des anderen. Umdrehen des Zyklus liefert andere Orientierung der Kanten im Schnitt.



## Lemma 5

Seien  $A$  und  $B$  Orientierungen, die sich in der Orientierung eines gerichteten Zyklus  $C$  unterscheiden ( $B$  heißt dann  $A^C$ )

Dann kann man  $B$  durch sukzessives Umkehren von essentiellen Zykeln aus  $A$  erhalten.

# Zerlegen von gerichteten Zykeln

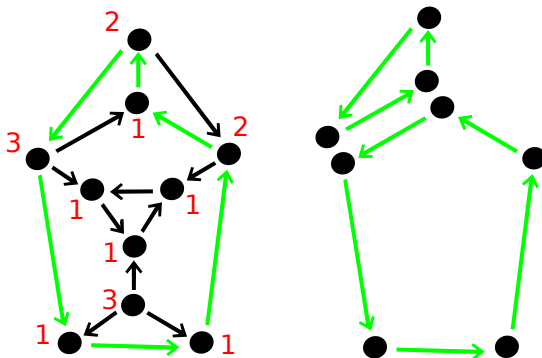
## Lemma 5 - Beweis

Fall 1: C ist bereits essenziell. Dann kehre C um.

Fall 2: C ist nicht essenziell  $\Rightarrow$  innerer Schnitt ist nicht starr.

Lemma 2  $\Rightarrow \exists$  Sehnenpfad  $\rightarrow$  zerlegt C in zwei kleinere Kreise.

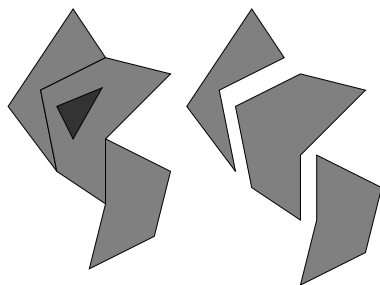
Rekursives Anwenden der Fallunterscheidung.



# Zerlegen von gerichteten Zykeln

## Lemma 6

Sei  $A$  eine  $\alpha$ -Orientierung,  $C$  ein im Uhrzeigersinn gerichteter Zykel. Dann kann man  $A^C$  durch sukzessives Umkehren im Uhrzeigersinn gerichteter essenzieller Zykel erhalten und die Auswahl (nicht die Reihenfolge) dieser Zykel ist eindeutig und es ist die Minimale Menge so dass ihre Innenflächen die Innenfläche von  $C$  überdecken.



# Zerlegen von gerichteten Zykeln

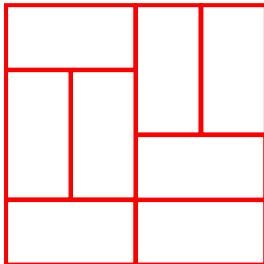
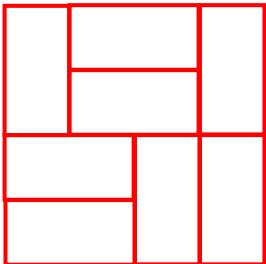
## Lemma 6 - Beweis

Existenz: Lemma 5 liefert die gewünschte Zerlegung.

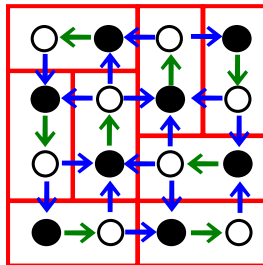
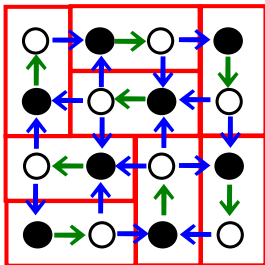
Eindeutigkeit: Betrachte Menge  $M$  von Zykeln die eine von dem Inneren des Zyklus verschiedene Fläche überdecken  $\Rightarrow$  Rand wird umgekehrt.

Betrachte mehr als minimale Menge: Enthält innere Zykel.

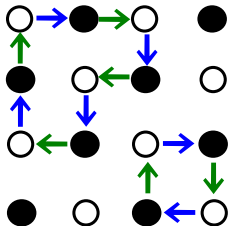
# Anwendungsbeispiel



# Anwendungsbeispiel



# Anwendungsbeispiel

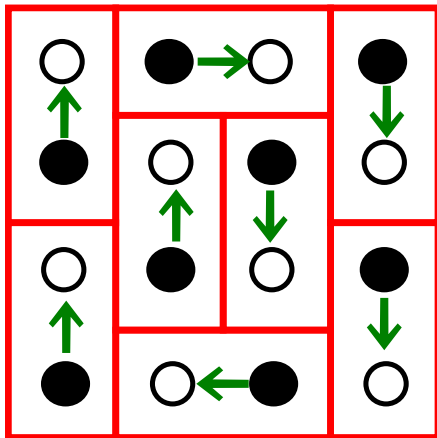




# Anwendung des Modells

## Gesehen

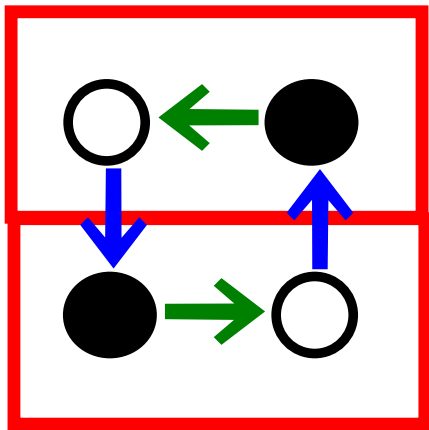
Tilings  $\leftrightarrow$   $\alpha$ -Orientierungen



# Anwendung des Modells

sehen leicht

parallele Dominos → essenzieller Zykel

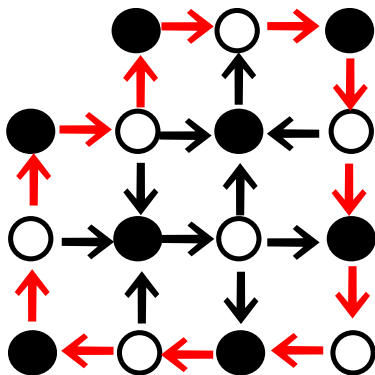


# Anwendung des Modells

zeigen

parallele Dominos  $\leftarrow$  essenzieller Zykel (bei vollständigem Inneren)

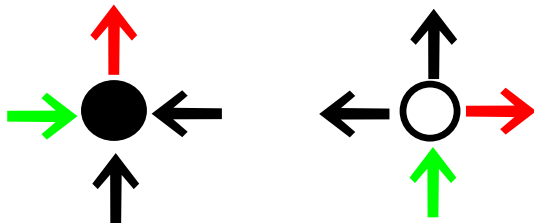
Sei  $C$  Zykel, keine Zelle. Zeige:  $\exists$  Sehnenpfad.



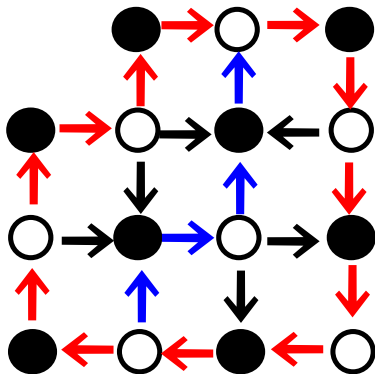
# Anwendung des Modells

## Konstruktion

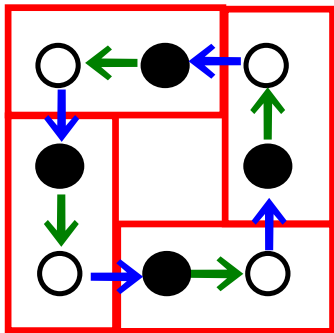
Wählen Richtung durch erste Kante; finden von weißen Knoten immer Kanten in Richtung, von schwarzen Knoten keine Kanten gegen Richtung.



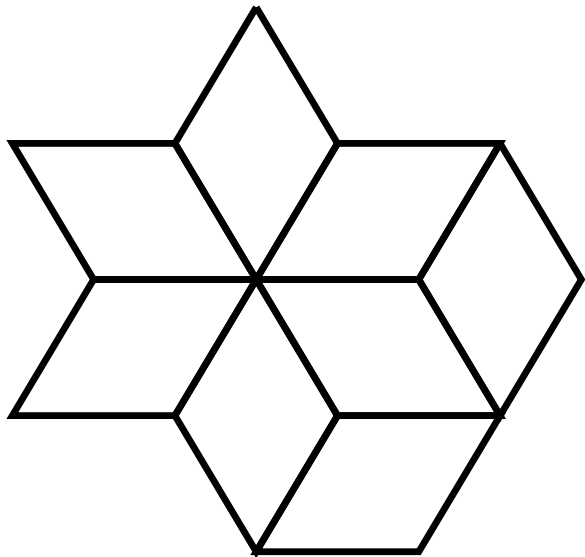
# Anwendung des Modells



# Anwendung des Modells



# Weitere Modellierungen



# Weitere Modellierungen

