

Tilings

Exact Enumeration

Kristian Dannowski, Veit Wiechert

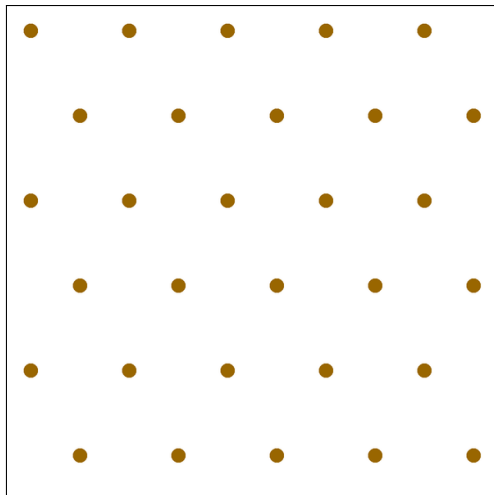
February 10, 2010

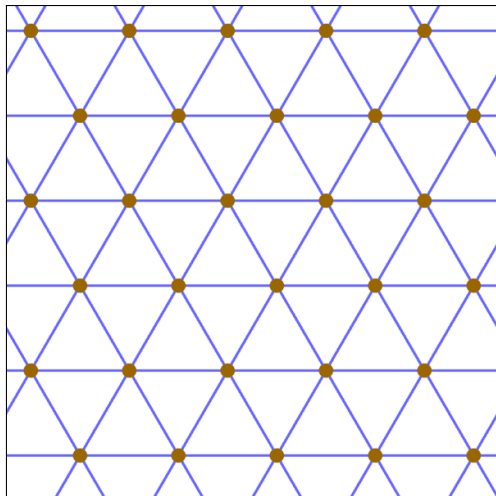
1 Einleitungen

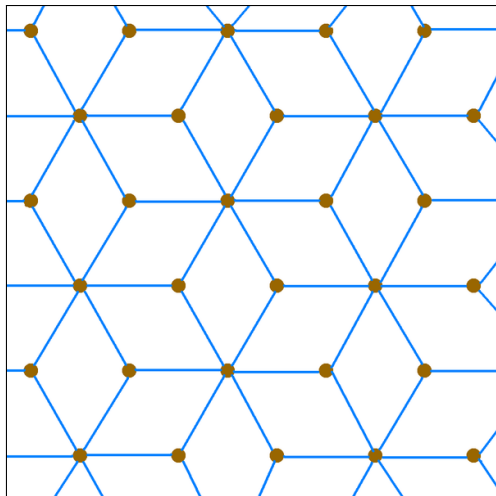
- Definition: Rhombus Tilings
- “Das Problem der Calissons”
- Bijektion zwischen Rhombus Tilings und Plane Partitions

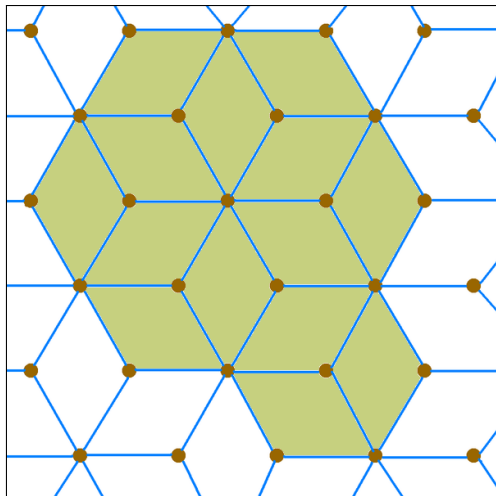
2 Exaktes Zählen aller möglichen Rhombus Tilings

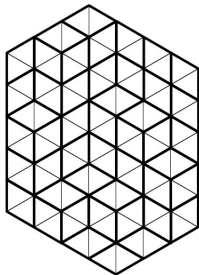
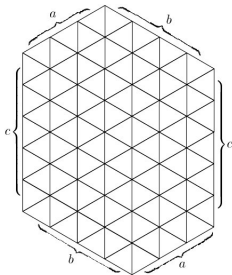
- Vom Rhombus Tiling zu den kreuzungsfreien Gitterpfaden
- Anzahl der kreuzungsfreien Gitterpfaden nach Lemma von Lindström Gessel-Viennot
- Herleitung der MacMahon Formel mit vollständiger Induktion











Definition: Rhombus Tiling eines Sechsecks

Seien a, b, c positive ganze Zahlen und ein Sechseck gegeben mit Seiten a, b, c, a, b, c dessen Winkel 120° sind. Wir betrachten Pflasterungen solcher Sechsecke mit Rhomben einheitlicher Kantenlänge 1 und Winkeln 60° und 120° , im folgenden genannt: Rhombus tilings.

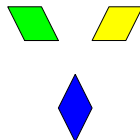
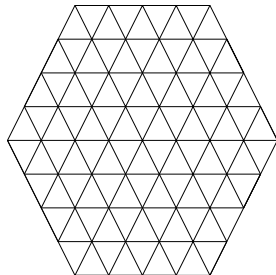
Calissons d'Aix

- Konfekt aus der Provence
- kommt auch in einer regulären $n \times n \times n$ Sechseckbox

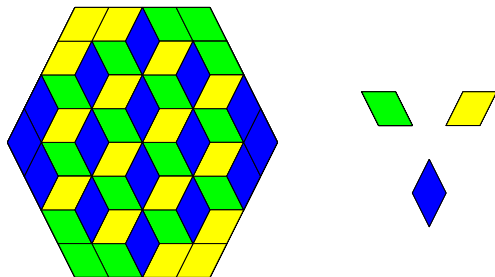


- Anordnung der Calissons entspricht einem Rhombus Tiling

- Anordnung der Calissons entspricht einem Rhombus Tiling
- Unterscheide drei Orientierungen nach Ausrichtung der langen Diagonalen

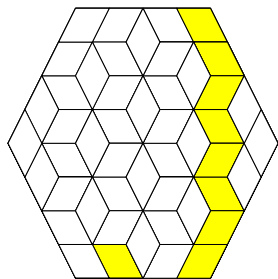
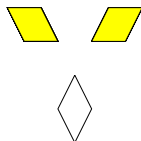


- Anordnung der Calissons entspricht einem Rhombus Tiling
- Unterscheide drei Orientierungen nach Ausrichtung der langen Diagonalen



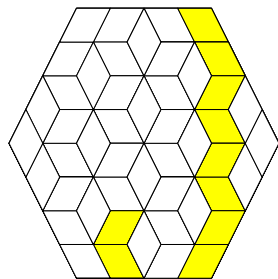
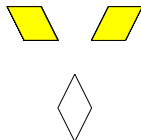
- Frage: Wieviel Frequenzen der drei Orientierungen gibt es?
(Beispiel Frequenz ? : (30 × blau, 10 × gelb, 8 × grün))

Die Lösung von Guy David und Carlos Thomei in "The Problem of the Calissons" [4]

 α 

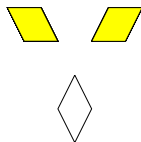
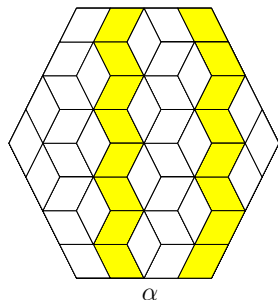
Definition: α -Kette

Sei α eine Seite des Sechsecks. Eine α -Kette ist eine Folge adjazenter Rhomben von der Seite α zur α gegenüberliegenden Seite, wobei das $(k + 1)$ -te Rhombus mit dem k -ten Rhombus eine Seite gemeinsam hat, die parallel zu α ist.

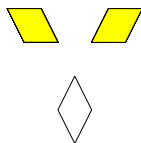
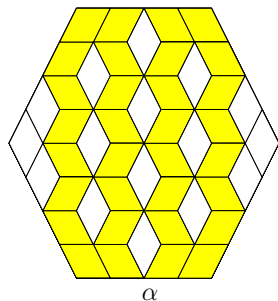
 α 

Definition: α -Kette

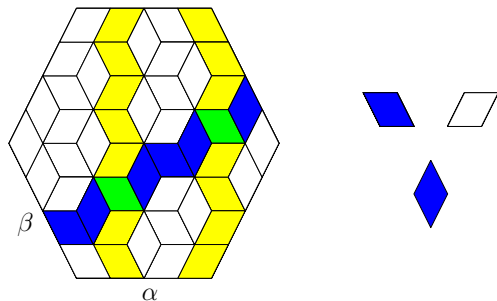
Sei α eine Seite des Sechsecks. Eine α -Kette ist eine Folge adjazenter Rhomben von der Seite α zur α gegenüberliegenden Seite, wobei das $(k + 1)$ -te Rhombus mit dem k -ten Rhombus eine Seite gemeinsam hat, die parallel zu α ist.



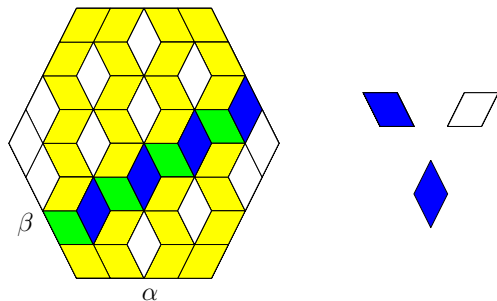
- α -Ketten laufen durch das Sechseck bis zur anderen Seite parallel zu α
- die Orientierung der Rhomben einer α -Kette ist nie senkrecht zu α
- verschiedene α -Ketten schneiden sich nie



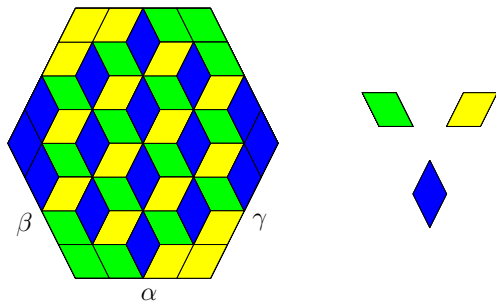
- α -Ketten laufen durch das Sechseck bis zur anderen Seite parallel zu α
- die Orientierung der Rhomben einer α -Kette ist nie senkrecht zu α
- verschiedene α -Ketten schneiden sich nie



- eine β -Kette hat mit jeder α -Kette einen Rhombus gemeinsam
- alle Rhomben die sowohl in α -Ketten als auch in β -Ketten enthalten sind haben die gleiche Orientierung
- Rhomben einer Orientierung gibt es gibt n^2 , also $\frac{1}{3}$ aller Rhomben, wobei $n = |\alpha| = |\beta|$

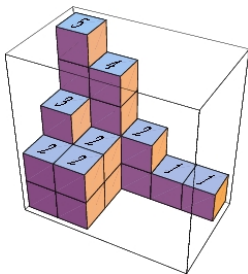


- eine β -Kette hat mit jeder α -Kette einen Rhombus gemeinsam
- alle Rhomben die sowohl in α -Ketten als auch in β -Ketten enthalten sind haben die gleiche Orientierung
- Rhomben einer Orientierung gibt es gibt n^2 , also $\frac{1}{3}$ aller Rhomben, wobei $n = |\alpha| = |\beta|$



- eine β -Kette hat mit jeder α -Kette einen Rhombus gemeinsam
- alle Rhomben die sowohl in α -Ketten als auch in β -Ketten enthalten sind haben die gleiche Orientierung
- Rhomben einer Orientierung gibt es gibt n^2 , also $\frac{1}{3}$ aller Rhomben, wobei $n = |\alpha| = |\beta|$

5	4	2	1	1
3	2			
2	2			



Definition: Plane Partition

Eine Plane Partition ist ein zweidimensionales Feld von positiven ganzen Zahlen $n_{i,j}$ die monoton fallen von links nach rechts und von oben nach unten. Es gilt also:

$$n_{i,j} \geq n_{i,j+1} \quad \text{und} \quad n_{i,j} \geq n_{i+1,j}$$

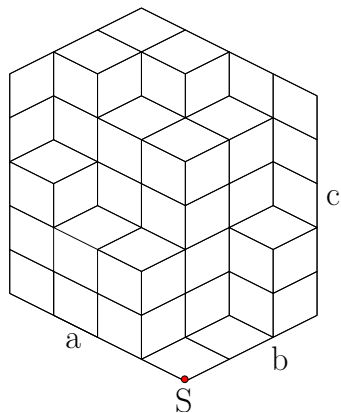


Abbildung sieht wie folgt aus:

- definieren Hebung
- Startpunkt in $S = (a, b, 0)$

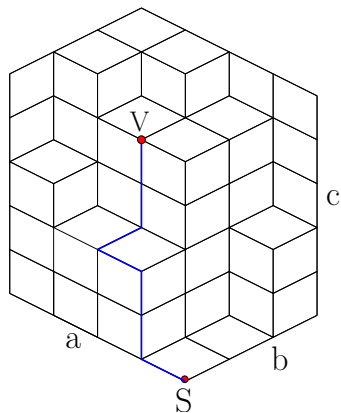
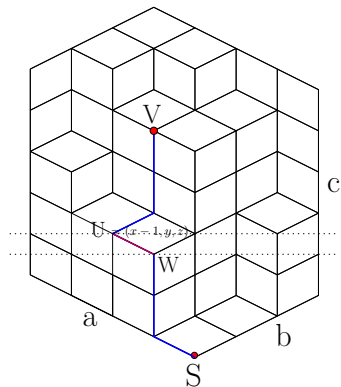


Abbildung sieht wie folgt aus:

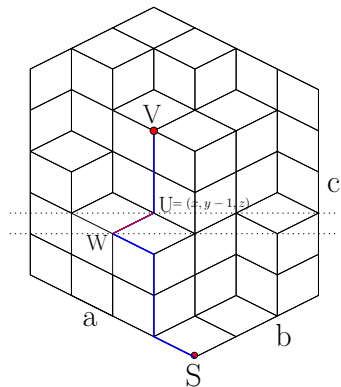
- definieren Hebung
- Startpunkt in $S = (a, b, 0)$
- Pfad von S zu einem beliebigen Punkt V



Regeln

Sei $W = (x, y, z)$

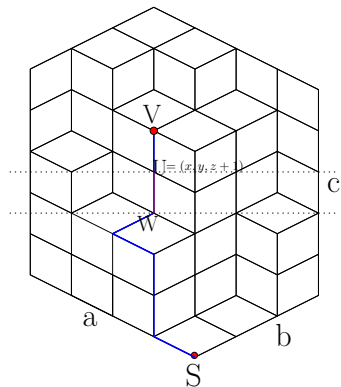
- 1 $WU \parallel a$, dann bekommt U die Koordinaten $(x-1, y, z)$, wenn U im Tiling höher ist als W, andernfalls $(x+1, y, z)$



Regeln

Sei $W = (x, y, z)$

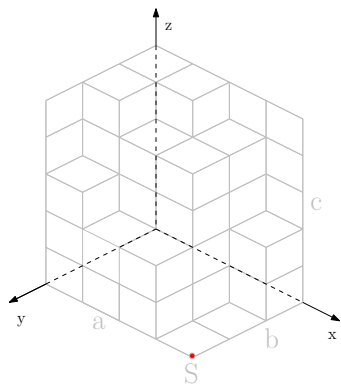
- ① $WU \parallel a$, dann bekommt U die Koordinaten $(x-1, y, z)$, wenn U im Tiling höher ist als W, andernfalls $(x+1, y, z)$
- ② $WU \parallel b$, dann bekommt U die Koordinaten $(x, y-1, z)$, wenn U im Tiling höher ist als W, andernfalls $(x, y+1, z)$



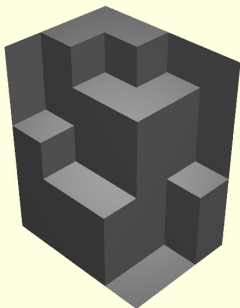
Regeln

Sei $W = (x, y, z)$

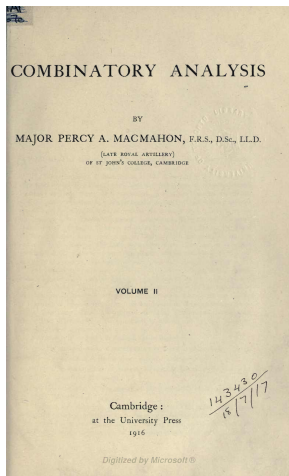
- ① $WU \parallel a$, dann bekommt U die Koordinaten $(x-1, y, z)$, wenn U im Tiling höher ist als W, andernfalls $(x+1, y, z)$
- ② $WU \parallel b$, dann bekommt U die Koordinaten $(x, y-1, z)$, wenn U im Tiling höher ist als W, andernfalls $(x, y+1, z)$
- ③ $WU \parallel c$, dann bekommt U die Koordinaten $(x, y, z+1)$, wenn U im Tiling höher ist als W, andernfalls $(x, y, z-1)$



- Koordinaten als Punkte in einem $a \times b \times c$ Quader



- Koordinaten als Punkte in einem $a \times b \times c$ Quader
- Plane Partition aus übereinanderliegenden Würfeln



Anzahl der Plane Partitions innerhalb eines $a \times b \times c$ Quader:

$$P(a, b, c) =$$

$$\prod_{i=1}^a \prod_{j=1}^b \prod_{k=1}^c \frac{i+j+k-1}{i+j+k-2}$$

[1]

Beweisskizze, Gliederung

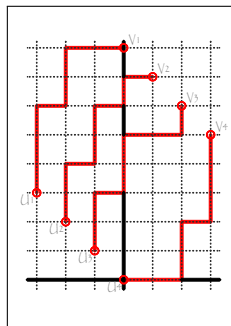
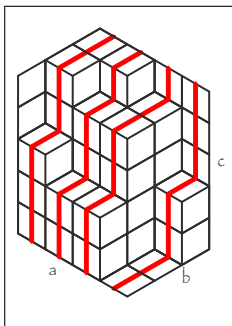
- Bijektion zwischen Rhombus Tilings und kreuzungsfreien Gitterpfaden

Beweisskizze, Gliederung

- Bijektion zwischen Rhombus Tilings und kreuzungsfreien Gitterpfaden
- Berechnung der Anzahl der kreuzungsfreien Gitterpfade

Beweisskizze, Gliederung

- Bijektion zwischen Rhombus Tilings und kreuzungsfreien Gitterpfaden
- Berechnung der Anzahl der kreuzungsfreien Gitterpfade
- Auswertung der Binomialdeterminante



Bemerkung

Die α -Ketten können identifiziert werden mit einem Pfad der vom Mittelpunkt der ersten Rhombusseite u_i bis zum Mittelpunkt der letzten Rhombusseite v_i führt, für alle $1 \leq i \leq |\alpha|$. Durch Normierung und Drehung erhält man monoton steigende Gitterpfade in \mathbb{Z}^2 . Diese können sich nicht kreuzen, da die entsprechende α -Ketten disjunkt sind.

Voraussetzungen(I):

- $G = (V, E)$ ist azyklischer gerichteter Graph
- $w : E \rightarrow K$ ist Gewicht auf den Kanten
- $U = (u_1 \dots u_n)$ und $V = (v_1 \dots v_n)$ geordnete Menge von Knoten des Graphen
- $M = (m_{i,j})$ ist Pfadmatrix mit Einträgen $m_{i,j} = w(P(i,j)) = \sum_{p:u_i \rightarrow v_j} w(p)$ wobei p ein Pfad mit $w(p) = \prod_{e \in p} w(e)$

Lemma von Lindström Gessel-Viennot[2]

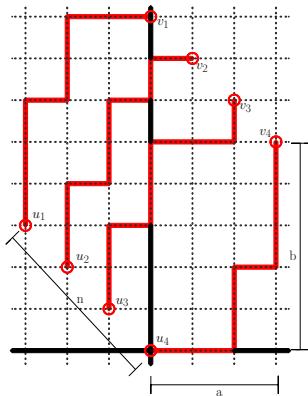
$$\det M = \sum_{P \in \mathcal{P}_{VD}(U,V)} \text{sgn}(P) \cdot w(P)$$

Voraussetzungen(II):

- $\mathcal{P}(U, V)$ ist Menge aller Pfadsysteme mit
 $P_1 : u_1 \rightarrow v_{\pi(1)} \dots P_n : u_n \rightarrow v_{\pi(n)}, \pi \in S_n$
- $\mathcal{P}_{VD}(U, V)$ Teilmenge von $\mathcal{P}(U, V)$ aus kreuzungsfreien Pfadsystemen
- Gewicht eines Pfadsystems $w(P) = \prod_{i=1}^n w(P_i)$
- Vorzeichen $sgn(P) = sgn(P_1, \dots, P_n) = sign(\pi)$

Lemma von Lindström Gessel-Viennot[2]

$$\det M = \sum_{P \in \mathcal{P}_{VD}(U, V)} sgn(P) \cdot w(P)$$



- Pfadssysteme sind kreuzungsfrei und monoton steigend

$$\Rightarrow \pi = id$$

$$\Rightarrow \text{sgn}(P) = 1, \quad \forall P \in \mathcal{P}_{VD}(U, V)$$

- $w(p : u_i \rightarrow v_j) \stackrel{\text{Def.}}{=} 1, \quad \forall 1 \leq i, j \leq n$

$$\begin{aligned} \Rightarrow m_{i,j} &= \sum_{p: u_i \rightarrow v_j} 1 \\ &= \#(p : u_i \rightarrow v_j) \\ &= \binom{a+b}{a-i+j} \end{aligned}$$

Korollar

Die Anzahl kreuzungsfreier monoton steigender Gitterpfadsysteme

$$N(n, a, b) = \sum_{P \in \mathcal{P}_{VD}(U, V)} \text{sgn}(id) \cdot 1 = \det_{1 \leq i, j \leq n} \begin{pmatrix} a + b & & \\ & \ddots & \\ & & a - i + j \end{pmatrix}$$

Jetzt haben wir gezeigt, dass $N(n, a, b) = \det_{1 \leq i, j \leq n} \left(\binom{a+b}{a-i+j} \right)$

Zu zeigen bleibt

$$\det_{1 \leq i, j \leq n} \left(\binom{a+b}{a-i+j} \right) = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^a \prod_{k=1}^b \frac{i+j+k-1}{i+j+k-2}$$

Dies geschieht per vollständiger Induktion über n . [3]

Induktionsanfang $n=1$

Linke Seite:

$$\det_{i=j=1} \left(\binom{a+b}{a} \right) = \binom{a+b}{a} \quad (1)$$

Rechte Seite:

$$\begin{aligned} & \prod_{i=1}^1 \prod_{j=1}^a \prod_{k=1}^b \frac{i+j+k-1}{i+j+k-2} = \prod_{j=1}^a \prod_{k=1}^b \frac{j+k}{j+k-1} \quad (2) \\ &= \prod_{j=1}^a \frac{(j+b)(j+b-1)\cdots(j+1)}{(j+b-1)\cdots(j+1)(j)} = \prod_{j=1}^a \left(\frac{j+b}{j} \right) \\ &= \frac{(b+a)(b+a-1)\cdots(b+1)}{(a)(a-1)\cdots(2)(1)} = \binom{a+b}{a} \end{aligned}$$

Induktionsanfang $n=1$

Linke Seite:

$$\det_{i=j=1} \left(\binom{a+b}{a} \right) = \binom{a+b}{a} \quad (1)$$

Rechte Seite:

$$\begin{aligned} & \prod_{i=1}^1 \prod_{j=1}^a \prod_{k=1}^b \frac{i+j+k-1}{i+j+k-2} = \prod_{j=1}^a \prod_{k=1}^b \frac{j+k}{j+k-1} \quad (2) \\ &= \prod_{j=1}^a \frac{(j+b)(j+b-1)\cdots(j+1)}{(j+b-1)\cdots(j+1)(j)} = \prod_{j=1}^a \left(\frac{j+b}{j} \right) \\ &= \frac{(b+a)(b+a-1)\cdots(b+1)}{(a)(a-1)\cdots(2)(1)} = \binom{a+b}{a} \end{aligned}$$

Induktionsanfang $n=2$, linke Seite

$$\begin{aligned}
 \det_{1 \leq i, j \leq 2} \left(\binom{a+b}{a-i+j} \right) &= \det \begin{pmatrix} \binom{a+b}{a} & \binom{a+b}{a+1} \\ \binom{a+b}{a-1} & \binom{a+b}{a} \end{pmatrix} \\
 &= \binom{a+b}{a} \binom{a+b}{a} - \binom{a+b}{a+1} \binom{a+b}{a-1} \\
 &= \binom{a+b}{a}^2 - \binom{a+b}{a}^2 \cdot \frac{b}{a+1} \frac{a}{b+1} \\
 &= \binom{a+b}{a}^2 \cdot \frac{(b+a+1)}{(a+1)(b+1)}
 \end{aligned}$$

Induktionsanfang $n=2$, rechte Seite

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^2 \prod_{j=1}^a \prod_{k=1}^b \frac{i+j+k-1}{i+j+k-2} &= \left(\prod_{j=1}^a \prod_{k=1}^b \frac{j+k}{j+k-1} \right) \left(\prod_{j=1}^a \prod_{k=1}^b \frac{j+k+1}{j+k} \right) \\
&= \binom{a+b}{a} \prod_{j=1}^a \frac{(j+b+1)(j+b)\cdots(j+2)}{(j+b)\cdots(j+2)(j+1)} \\
&= \binom{a+b}{a} \prod_{j=1}^a \frac{(j+b+1)}{(j+1)} \\
&= \binom{a+b}{a} \frac{(b+a+1)(b+a)\cdots(b+2)}{(a+1)(a)\cdots(3)(2)} \\
&= \binom{a+b}{a} \frac{(b+a+1)!}{(b+1)!(a+1)!} \\
&= \binom{a+b}{a}^2 \frac{(b+a+1)}{(b+1)(a+1)}
\end{aligned}$$

Der Induktionsschritt

Condensation Formel (Dodgson, Desnanot, Jacobi)

Sei A eine $n \times n$ Matrix. Mit $A_{i_1, i_2, \dots, i_k}^{j_1, j_2, \dots, j_k}$ bezeichnen wir die Submatrix (Minor) von A , in der die Zeilen i_1, i_2, \dots, i_k und Spalten j_1, j_2, \dots, j_k weggelassen wurden. Dann gilt:

$$\det A \cdot \det A_{1,n}^{1,n} = \det A_1^1 \cdot \det A_n^n - \det A_1^n \cdot \det A_n^1$$

Eigenschaften der Matrix $M_n(a, b) := \left(\binom{a+b}{a-i+j} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$

Eigenschaften der Matrix $M_n(a, b) := \left(\binom{a+b}{a-i+j} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$

$$M_n(a, b) = \begin{pmatrix} \binom{a+b}{a-1+1} & \binom{a+b}{a-1+2} & \cdots & \binom{a+b}{a-1+n} \\ \binom{a+b}{a-2+1} & \binom{a+b}{a-2+2} & \cdots & \binom{a+b}{a-2+n} \\ \binom{a+b}{a-3+1} & \binom{a+b}{a-3+2} & \ddots & \\ \binom{a+b}{a-4+1} & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \\ \binom{a+b}{a-n+1} & & \cdots & \binom{a+b}{a-n+n} \end{pmatrix}$$

Eigenschaften der Matrix $M_n(a, b) := \left(\binom{a+b}{a-i+j} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$

$$M_n(a, b) = \begin{pmatrix} \binom{a+b}{a} & \binom{a+b}{a+1} & \binom{a+b}{a+2} & \cdots & \binom{a+b}{a-1+n} \\ \binom{a+b}{a-1} & \binom{a+b}{a} & \binom{a+b}{a+1} & \cdots & \binom{a+b}{a-2+n} \\ \binom{a+b}{a-2} & \binom{a+b}{a-1} & \ddots & & \\ \binom{a+b}{a-3} & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \binom{a+b}{a} & \binom{a+b}{a+1} \\ \binom{a+b}{a-n+1} & \binom{a+b}{a-n+2} & \cdots & \binom{a+b}{a-1} & \binom{a+b}{a} \end{pmatrix}$$

$$M_n(a, b) = \begin{pmatrix} \binom{a+b}{a} & \binom{a+b}{a+1} & \binom{a+b}{a+2} & \cdots & \binom{a+b}{a+n-2} & \binom{a+b}{a+n-1} \\ \binom{a+b}{a-1} & \binom{a+b}{a} & \binom{a+b}{a+1} & \cdots & \binom{a+b}{a+n-3} & \binom{a+b}{a+n-2} \\ \binom{a+b}{a-2} & \binom{a+b}{a-1} & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \binom{a+b}{a+1} & \vdots \\ \binom{a+b}{a-n+2} & \binom{a+b}{a-n+3} & \cdots & \binom{a+b}{a-1} & \binom{a+b}{a} & \binom{a+b}{a+1} \\ \binom{a+b}{a-n+1} & \binom{a+b}{a-n+2} & \cdots & & \binom{a+b}{a-1} & \binom{a+b}{a} \end{pmatrix}$$

$$(M_n(a, b))_n^n = M_{n-1}(a, b)$$

$$M_n(a, b) = \begin{pmatrix} \binom{a+b}{a} & \binom{a+b}{a+1} & \binom{a+b}{a+2} & \cdots & \binom{a+b}{a+n-1} \\ \binom{a+b}{a-1} & \binom{a+b}{a} & \binom{a+b}{a+1} & \cdots & \binom{a+b}{a+n-2} \\ \binom{a+b}{a-2} & \binom{a+b}{a-1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \\ \binom{a+b}{a-n+2} & & & & \binom{a+b}{a+1} \\ \binom{a+b}{a-n+1} & \binom{a+b}{a-n+2} & \cdots & \binom{a+b}{a-1} & \binom{a+b}{a} \end{pmatrix}$$

$$(M_n(a, b))_n^n = M_{n-1}(a, b)$$

$$(M_n(a, b))_1^1 = M_{n-1}(a, b)$$

$$M_n(a, b) = \begin{pmatrix} \binom{a+b}{a} & \binom{a+b}{a+1} & \binom{a+b}{a+2} & \cdots & \binom{a+b}{a+n-1} \\ \binom{a+b}{a-1} & \binom{a+b}{a} & \binom{a+b}{a+1} & \cdots & \binom{a+b}{a+n-2} \\ \binom{a+b}{a-2} & \binom{a+b}{a-1} & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \binom{a+b}{a-n+2} & \binom{a+b}{a-n+3} & \cdots & \binom{a+b}{a} & \binom{a+b}{a+1} \\ \binom{a+b}{a-n+1} & \binom{a+b}{a-n+2} & \cdots & \binom{a+b}{a-1} & \binom{a+b}{a} \end{pmatrix}$$

$$(M_n(a, b))_n^n = M_{n-1}(a, b)$$

$$(M_n(a, b))_1^1 = M_{n-1}(a, b)$$

$$(M_n(a, b))_n^1 = M_{n-1}(a+1, b-1)$$

$$M_n(a, b) = \begin{pmatrix} \binom{a+b}{a} & \binom{a+b}{a+1} & \binom{a+b}{a+2} & \cdots & & \binom{a+b}{a+n-1} \\ \binom{a+b}{a-1} & \binom{a+b}{a} & \binom{a+b}{a+1} & \cdots & \binom{a+b}{a+n-2} & \binom{a+b}{a+n-2} \\ \binom{a+b}{a-2} & \binom{a+b}{a-1} & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ \binom{a+b}{a-n+2} & & & & \binom{a+b}{a} & \binom{a+b}{a+1} \\ \binom{a+b}{a-n+1} & \binom{a+b}{a-n+2} & \cdots & & \binom{a+b}{a-1} & \binom{a+b}{a} \end{pmatrix}$$

$$(M_n(a, b))_n^n = M_{n-1}(a, b)$$

$$(M_n(a, b))_1^1 = M_{n-1}(a, b)$$

$$(M_n(a, b))_n^1 = M_{n-1}(a+1, b-1)$$

$$(M_n(a, b))_1^n = M_{n-1}(a-1, b+1)$$

$$M_n(a, b) = \begin{pmatrix} \binom{a+b}{a} & \binom{a+b}{a+1} & \binom{a+b}{a+2} & \cdots & \binom{a+b}{a+n-1} \\ \binom{a+b}{a-1} & \binom{a+b}{a} & \binom{a+b}{a+1} & \cdots & \binom{a+b}{a+n-2} \\ \binom{a+b}{a-2} & \binom{a+b}{a-1} & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \binom{a+b}{a-n+2} & & & & \binom{a+b}{a+1} \\ \binom{a+b}{a-n+1} & \binom{a+b}{a-n+2} & \cdots & \binom{a+b}{a-1} & \binom{a+b}{a} \end{pmatrix}$$

$$(M_n(a, b))_n^n = M_{n-1}(a, b)$$

$$(M_n(a, b))_1^1 = M_{n-1}(a, b)$$

$$(M_n(a, b))_n^1 = M_{n-1}(a+1, b-1)$$

$$(M_n(a, b))_1^n = M_{n-1}(a-1, b+1)$$

$$(M_n(a, b))_{1,n}^{1,n} = M_{n-2}(a, b)$$

Damit lässt sich mit Hilfe der Desnanot-Identität für $A = M_n(a, b)$ die Rekursionsformel für $\det M_n(a, b)$ in Abhängigkeit von Termen der Form $\det M_{n-1}(a, b)$ und $\det M_{n-2}(a, b)$ angeben:

$$\det M_n(a, b) =$$

$$\frac{\det M_{n-1}(a, b) \cdot \det M_{n-1}(a, b) - \det M_{n-1}(a-1, b+1) \cdot \det M_{n-1}(a+1, b-1)}{\det M_{n-2}(a, b)}$$

Es bleibt noch die Rekursion für die rechte Seite zu zeigen. Der Übersichtlichkeit halber sei $f(i, j, k) = \binom{i+j+k-1}{i+j+k-2}$

$$\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^a \prod_{k=1}^b \frac{i+j+k-1}{i+j+k-2} =$$

$$\frac{\left(\prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=1}^a \prod_{k=1}^b f(i, j, k) \right)^2 - \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=1}^{a-1} \prod_{k=1}^{b+1} f(i, j, k) \cdot \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=1}^{a+1} \prod_{k=1}^{b-1} f(i, j, k)}{\prod_{i=1}^{n-2} \prod_{j=1}^a \prod_{k=1}^b f(i, j, k)}$$

Dazu forme ich die vier eingefärbten Terme in solche der Form $\prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=1}^a \prod_{k=1}^b f(i, j, k) \cdot X$ um und sammle die Faktoren X , im Folgenden grün und rot ein. .

$$\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^a \prod_{k=1}^b f(i, j, k) = \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=1}^a \prod_{k=1}^b f(i, j, k) \cdot \prod_{j=1}^a \prod_{k=1}^b f(n, j, k) \quad (1)$$

$$\prod_{i=1}^{n-2} \prod_{j=1}^a \prod_{k=1}^b f(i, j, k) = \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=1}^a \prod_{k=1}^b f(i, j, k) / \prod_{j=1}^a \prod_{k=1}^b f(n-1, j, k) \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
& \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=1}^{a-1} \prod_{k=1}^{b+1} f(i, j, k) \\
&= \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=2}^a \prod_{k=0}^b f(i, j, k) \\
&= \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=2}^a \prod_{k=1}^b f(i, j, k) \cdot \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=2}^a \left(\frac{i+j-1}{i+j-2} \right) \\
&= \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=1}^a \prod_{k=1}^b f(i, j, k) \cdot \frac{\prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=2}^a \left(\frac{i+j-1}{i+j-2} \right)}{\prod_{i=1}^{n-1} \prod_{k=1}^b \left(\frac{i+k-1}{i+k-1} \right)} \tag{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=1}^{a+1} \prod_{k=1}^{b-1} f(i, j, k) \\
&= \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=0}^a \prod_{k=2}^b f(i, j, k) \\
&= \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=1}^a \prod_{k=2}^b f(i, j, k) \cdot \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{k=2}^b \left(\frac{i+k-1}{i+k-2} \right) \\
&= \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=1}^a \prod_{k=1}^b f(i, j, k) \cdot \frac{\prod_{i=1}^{n-1} \prod_{k=2}^b \left(\frac{i+k-1}{i+k-2} \right)}{\prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=1}^a \left(\frac{i+j}{i+j-1} \right)} \tag{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=1}^a \prod_{k=1}^b f(i, j, k) \right)^2 \cdot \frac{\prod_{j=1}^a \prod_{k=1}^b \frac{n+j+k-1}{n+j+k-2}}{\prod_{j=1}^a \prod_{k=1}^b \frac{(n-1)+j+k-1}{(n-1)+j+k-2}} \\
&= \left(\prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=1}^a \prod_{k=1}^b f(i, j, k) \right)^2 \\
&- \left(\prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=1}^a \prod_{k=1}^b f(i, j, k) \right)^2 \cdot \frac{\prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=2}^a \binom{i+j-1}{i+j-2}}{\prod_{i=1}^{n-1} \prod_{k=1}^b \binom{i+k}{i+k-1}} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{n-1} \prod_{k=2}^b \binom{i+k-1}{i+k-2}}{\prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=1}^a \binom{i+j}{i+j-1}}
\end{aligned}$$

Nach dem Kürzen versuche erhalten wir

$$\frac{\prod_{j=1}^a \prod_{k=1}^b \left(\frac{n+j+k-1}{n+j+k-2} \right)}{\prod_{j=1}^a \prod_{k=1}^b \left(\frac{(n-1)+j+k-1}{(n-1)+j+k-2} \right)} = 1 - \frac{\prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=2}^a \left(\frac{i+j-1}{i+j-2} \right)}{\prod_{i=1}^{n-1} \prod_{k=1}^b \left(\frac{i+k}{i+k-1} \right)} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{n-1} \prod_{k=2}^b \left(\frac{i+k-1}{i+k-2} \right)}{\prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=1}^a \left(\frac{i+j}{i+j-1} \right)}$$

Die bunten Terme werden noch weiter vereinfacht.

zuerst grün: Indexverschiebung und Ausklammern

$$\begin{aligned}
 & \frac{\prod_{j=1}^a \prod_{k=1}^b \frac{n+j+k-1}{n+j+k-2}}{\prod_{j=0}^{a-1} \prod_{k=1}^b \frac{n+j+k-1}{n+j+k-2}} \\
 &= \frac{\prod_{j=1}^a \prod_{k=1}^b \frac{n+j+k-1}{n+j+k-2}}{\prod_{j=1}^{a-1} \prod_{k=1}^b \frac{n+j+k-1}{n+j+k-2}} \cdot \frac{1}{\prod_{k=1}^b \frac{n+k-1}{n+k-2}} \\
 &= \frac{\prod_{j=1}^a \prod_{k=1}^b \frac{n+j+k-1}{n+j+k-2}}{\prod_{j=1}^a \prod_{k=1}^b \frac{n+j+k-1}{n+j+k-2}} \cdot \frac{\prod_{k=1}^b \frac{n+a+k-1}{n+a+k-2}}{\prod_{k=1}^b \frac{n+k-1}{n+k-2}} \\
 &= \frac{\frac{n+a+b-1}{n+a-1}}{\frac{n+b-1}{n-1}} = \left(\frac{n+a+b-1}{n+a-1} \right) \cdot \left(\frac{n-1}{n+b-1} \right)
 \end{aligned}$$

$$\left(\frac{n+a+b-1}{n+a-1}\right) \cdot \left(\frac{n-1}{n+b-1}\right) = 1 - \frac{\prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=2}^a \binom{i+j-1}{i+j-2} \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{k=2}^b \binom{i+k-1}{i+k-2}}{\prod_{i=1}^{n-1} \prod_{k=1}^b \binom{i+k}{i+k-1} \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=1}^a \binom{i+j}{i+j-1}}$$

dann rot

Indexverschiebung und Binomialformel

$$\begin{aligned}
 & \frac{\prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=2}^a \binom{i+j-1}{i+j-2}}{\prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=1}^a \binom{i+j}{i+j-1}} \\
 &= \frac{\prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=1}^{a-1} \binom{i+j}{i+j-1}}{\prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=1}^a \binom{i+j}{i+j-1}} \\
 &= \binom{(n-1) + (a-1)}{(n-1)} / \binom{(n-1) + a}{(n-1)} \\
 &= \frac{((n-1) + (a-1))!}{(n-1)! \cdot (a-1)!} \cdot \frac{(n-1)! \cdot a!}{((n-1) + a)!} = \frac{a}{a + (n-1)}
 \end{aligned}$$

$$\left(\frac{n+a+b-1}{n+a-1}\right) \cdot \left(\frac{n-1}{n+b-1}\right) = 1 - \frac{\prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=2}^a \binom{i+j-1}{i+j-2} \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{k=2}^b \binom{i+k-1}{i+k-2}}{\prod_{i=1}^{n-1} \prod_{k=1}^b \binom{i+k}{i+k-1} \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=1}^a \binom{i+j}{i+j-1}}$$

Analog verfare ich für die restlichen roten Terme und komme auf

$$\left(\frac{n+a+b-1}{n+a-1} \right) \cdot \left(\frac{n-1}{n+b-1} \right) = 1 - \frac{a}{a+n-1} \cdot \frac{b}{b+n-1}$$

$$\Leftrightarrow (n+a+b-1) \cdot (n-1) + (ab) = (n+a-1) \cdot (n+b-1)$$

$$\Leftrightarrow (n+a-1) \cdot (n-1) + b \cdot (n-1+a) = (n+a-1) \cdot (n+b-1)$$

$$\Leftrightarrow (n+a-1) \cdot (n+b-1) = (n+a-1) \cdot (n+b-1)$$






□

Damit ist der Induktionsschritt vollzogen und folgender Satz bewiesen:

Satz

Die Anzahl aller möglichen Rhombus Tilings des Sechsecks mit der Kantenlängen a, b, c ist:

$$N(a, b, c) = \prod_{i=1}^a \prod_{j=1}^b \prod_{k=1}^c \frac{i+j+k-1}{i+j+k-2}$$

-  Percy MacMahon, *Combinatory Analysis, vol.II*, (1915), p.243
-  Ira M. Gessel and X. G. Viennot, *Determinants, Paths, and Plane Partitions*, preprint (1989)
-  C. Krattenthaler and G. Andrews, *Advanced Determinant Calculus*, Seminaire Lotharingien Combin. **42** (1999)
-  Guy David and C.Tomei, *The Problem of the Calissons*, Amer.Math.Montly **96** (1989), 429-431
-  M.Fulmek and C. Krattenthaler, *The Number of Rhombus Tilings of a Symmetric Hexagon which Contain a Fixed Rhombus on the Symmetry Axis, I*, Annals of Combinatorics **2** (1998) 19-41