

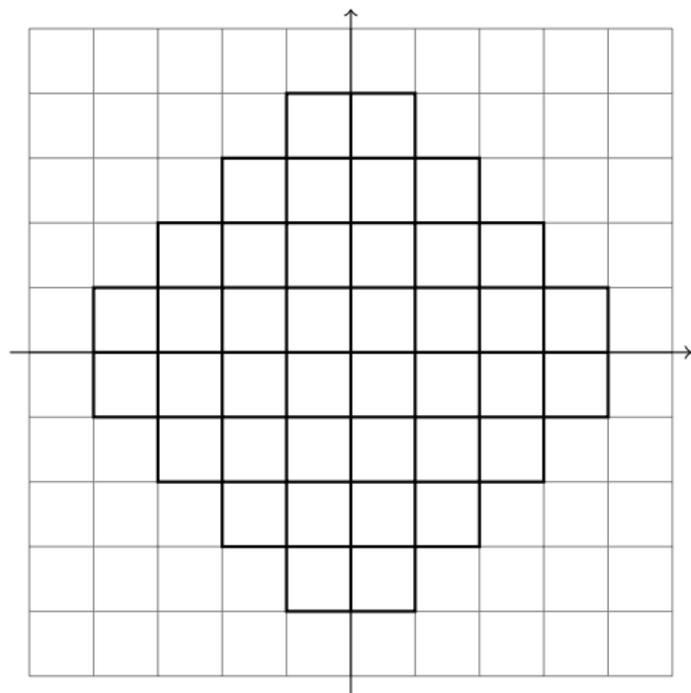
Graphical Condensation

Olga Heismann Hendrik Lüthen

31. Januar 2010

- 1 Beispiele
 - Anzahl der Pflasterungen eines aztekischen Diamanten
 - MacMahon-Formel
- 2 Allgemeine Formeln für Matchings in planaren Graphen
 - Später verwendete Spezialfälle
 - Allgemeines Theorem

Darstellung des aztekischen Diamanten



$$n = 4$$

Ein aztekischer Diamant der Ordnung n kann als Vereinigung aller Einheitsquadrate mit ganzzahligen Eckkoordinaten (x, y) mit $|x| + |y| \leq n + 1$ dargestellt werden.
Wir betrachten den dualen Graphen.

Überlagerung
von Matchings

Beispiele

Anzahl der
Pflasterungen eines
aztekischen
Diamanten

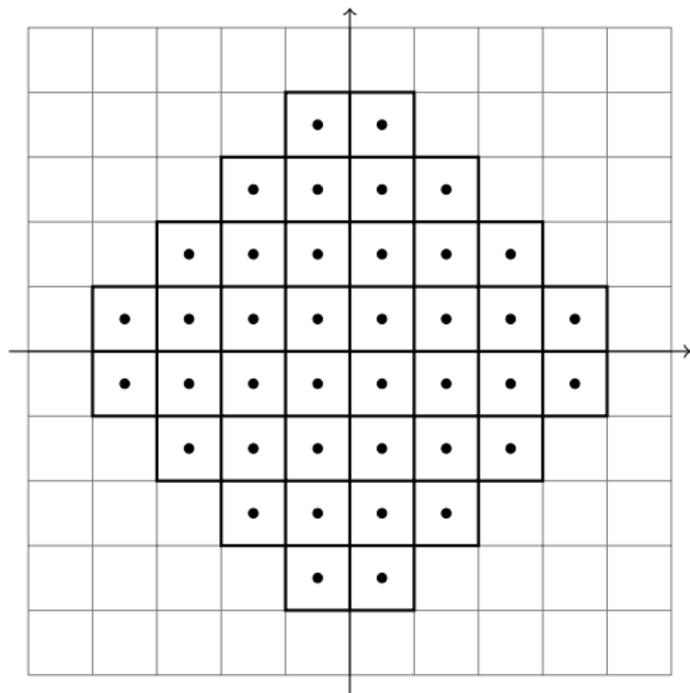
MacMahon-Formel

Allgemeine
Formeln für
Matchings in
planaren
Graphen

Später verwendete
Spezialfälle

Allgemeines Theorem

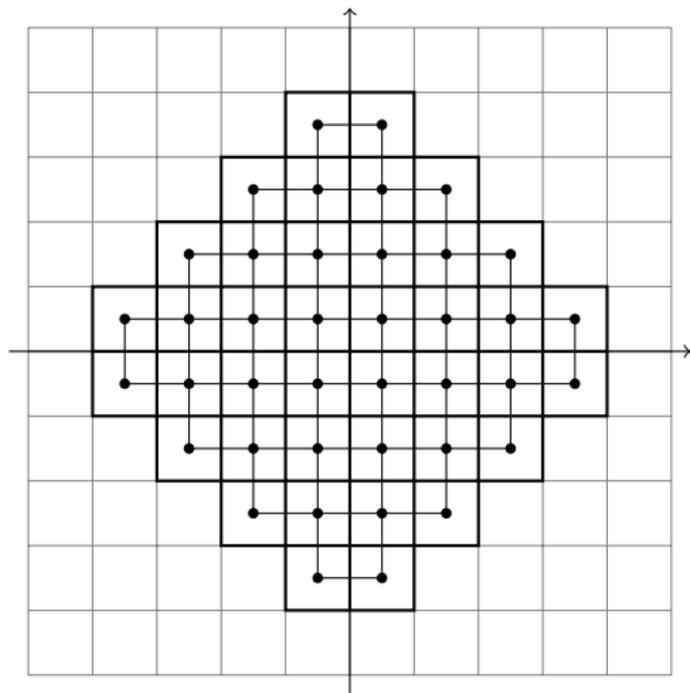
Darstellung des aztekischen Diamanten



$$n = 4$$

Ein aztekischer Diamant der Ordnung n kann als Vereinigung aller Einheitsquadrate mit ganzzahligen Eckkoordinaten (x, y) mit $|x| + |y| \leq n + 1$ dargestellt werden. Wir betrachten den dualen Graphen.

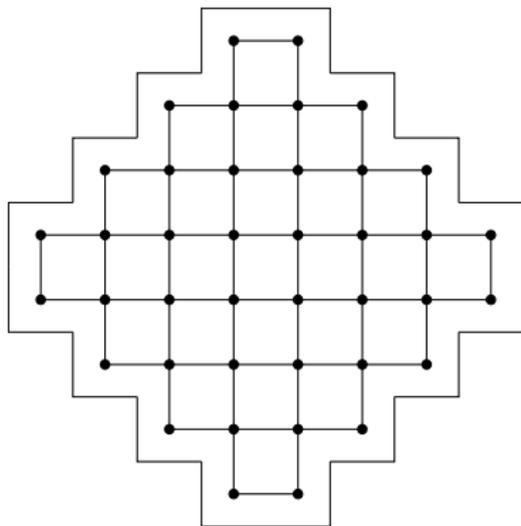
Darstellung des aztekischen Diamanten



$$n = 4$$

Ein aztekischer Diamant der Ordnung n kann als Vereinigung aller Einheitsquadrate mit ganzzahligen Eckkoordinaten (x, y) mit $|x| + |y| \leq n + 1$ dargestellt werden.
Wir betrachten den dualen Graphen.

Darstellung des aztekischen Diamanten



$$n = 4$$

Ein aztekischer Diamant der Ordnung n kann als Vereinigung aller Einheitsquadrate mit ganzzahligen Eckkoordinaten (x, y) mit $|x| + |y| \leq n + 1$ dargestellt werden.
Wir betrachten den dualen Graphen.

Überlagerung
von Matchings

Beispiele

Anzahl der
Pflasterungen eines
aztekischen
Diamanten

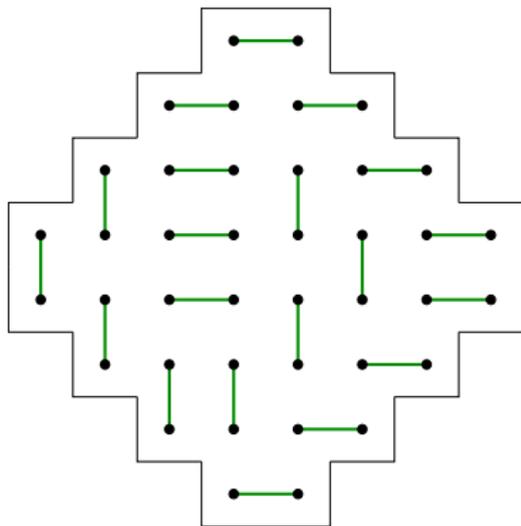
MacMahon-Formel

Allgemeine
Formeln für
Matchings in
planaren
Graphen

Später verwendete
Spezialfälle

Allgemeines Theorem

Darstellung des aztekischen Diamanten



$$n = 4$$

Ein aztekischer Diamant der Ordnung n kann als Vereinigung aller Einheitsquadrate mit ganzzahligen Eckkoordinaten (x, y) mit $|x| + |y| \leq n + 1$ dargestellt werden. Wir betrachten den dualen Graphen.

Überlagerung
von Matchings

Beispiele

Anzahl der
Pflasterungen eines
aztekischen
Diamanten

MacMahon-Formel

Allgemeine
Formeln für
Matchings in
planaren
Graphen

Später verwendete
Spezialfälle

Allgemeines Theorem

Definition

Ein aztekischer Diamant der Ordnung n ist der bipartite Graph $D_n = (V_n, E_n)$ mit

$$V_n = \{v_{x,y} : x, y \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, |x| + |y| \leq n + 1\}$$

und

$$E_n = \{\{v_{x_1, y_1}, v_{x_2, y_2}\} : |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = 1\}.$$

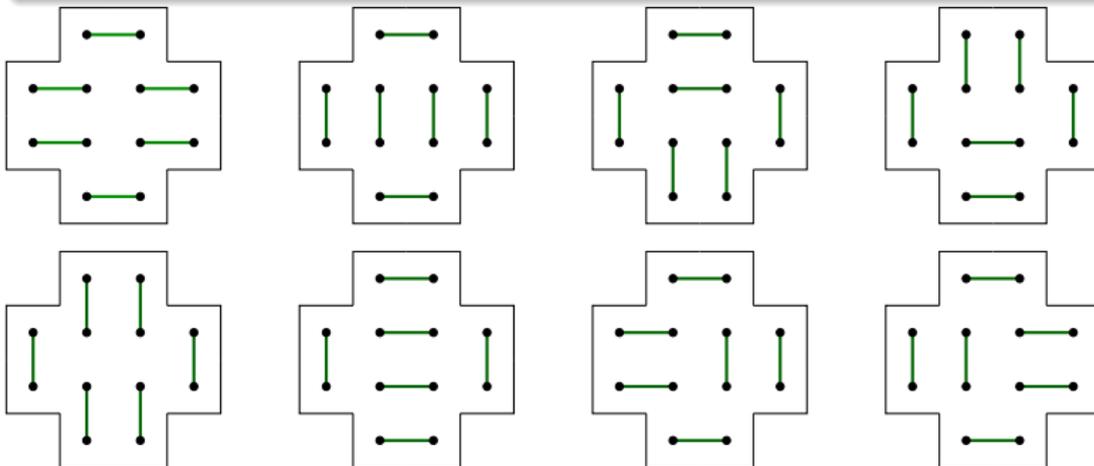
Wir bezeichnen ein perfektes Matching von D_n als eine Pflasterung des aztekischen Diamanten der Ordnung n .

Theorem und zu beweisendes Lemma

Überlagerung
von Matchings

Theorem

Die Anzahl $T(n)$ der Pflasterungen des aztekischen
Diamanten der Ordnung n ist $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$.



Lemma

$$T(n) \cdot T(n-2) = 2 \cdot T(n-1) \cdot T(n-1)$$

Das Theorem folgt durch vollständige Induktion.

Beispiele

Anzahl der
Pflasterungen eines
aztekischen
Diamanten

MacMahon-Formel

Allgemeine
Formeln für
Matchings in
planaren
Graphen

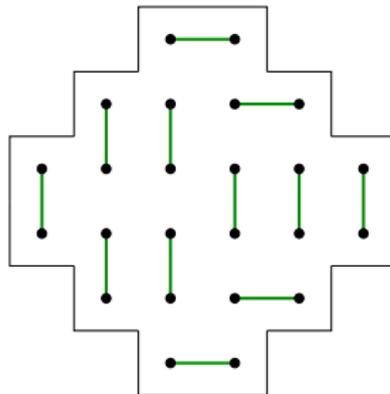
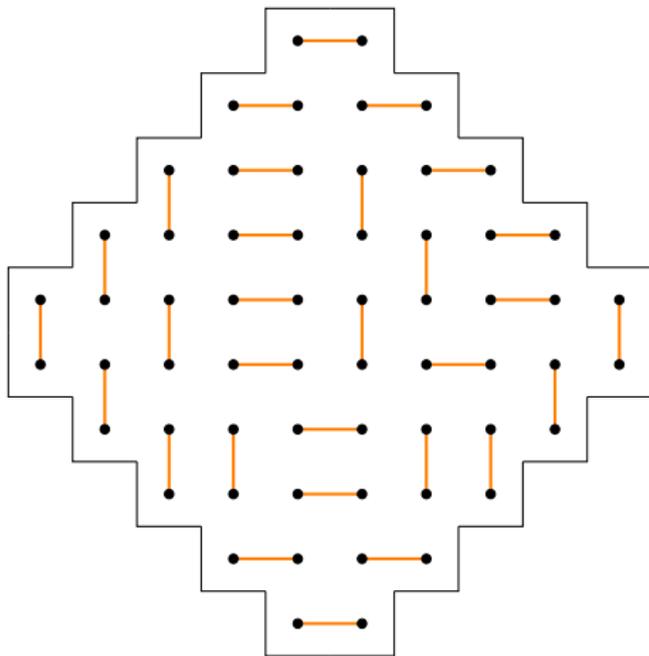
Später verwendete
Spezialfälle

Allgemeines Theorem

Beweisidee des Lemmas

Wir beweisen:

$$\begin{aligned} & \#\{(\text{Matching in } D_n, \text{ Matching in } D_{n-2})\} \\ &= 2\#\{(\text{Matching in } D_{n-1}, \text{ Matching in } D_{n-1})\}. \end{aligned}$$



Beispiele

Anzahl der
Pflasterungen eines
aztekischen
Diamanten

MacMahon-Formel

Allgemeine
Formeln für
Matchings in
planaren
Graphen

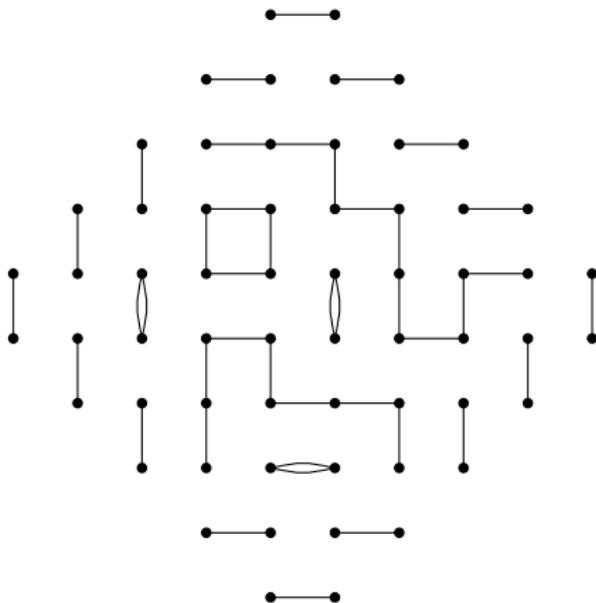
Später verwendete
Spezialfälle

Allgemeines Theorem

Beweisidee des Lemmas

Wir beweisen:

$$\begin{aligned} & \# \{ (\text{Matching in } D_n, \text{ Matching in } D_{n-2}) \} \\ &= 2 \# \{ (\text{Matching in } D_{n-1}, \text{ Matching in } D_{n-1}) \}. \end{aligned}$$



Beispiele

Anzahl der
Pflasterungen eines
aztekischen
Diamanten

MacMahon-Formel

Allgemeine
Formeln für
Matchings in
planaren
Graphen

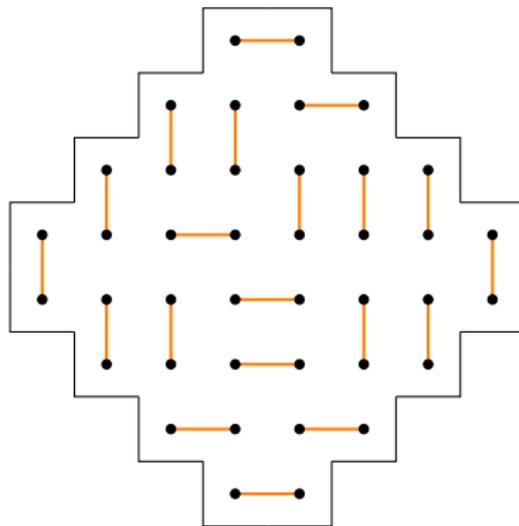
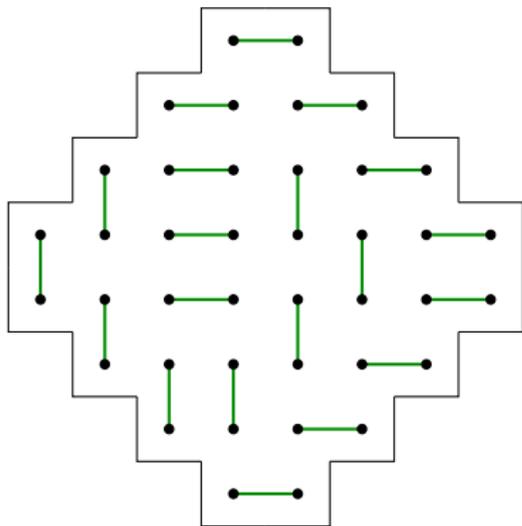
Später verwendete
Spezialfälle

Allgemeines Theorem

Beweisidee des Lemmas

Wir beweisen:

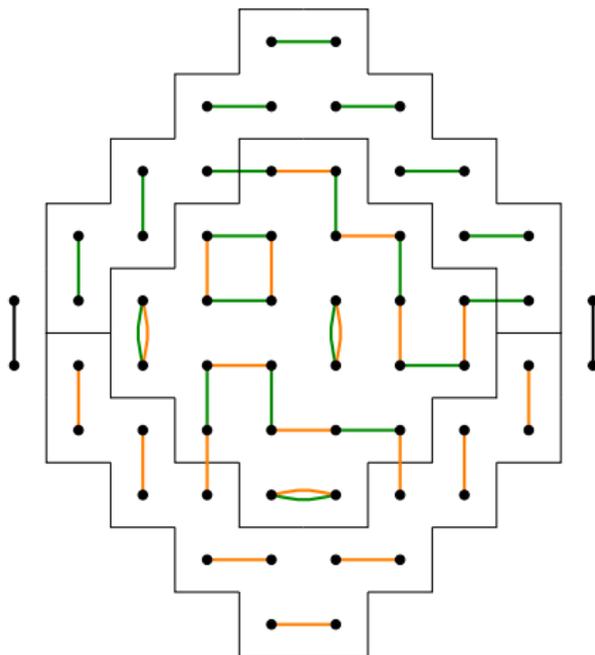
$$\begin{aligned} & \#\{(\text{Matching in } D_n, \text{ Matching in } D_{n-2})\} \\ &= 2\#\{(\text{Matching in } D_{n-1}, \text{ Matching in } D_{n-1})\}. \end{aligned}$$



Beweisidee des Lemmas

Wir beweisen:

$$\begin{aligned} & \#\{(\text{Matching in } D_n, \text{ Matching in } D_{n-2})\} \\ &= 2\#\{(\text{Matching in } D_{n-1}, \text{ Matching in } D_{n-1})\}. \end{aligned}$$



Beispiele

Anzahl der
Pflasterungen eines
aztekischen
Diamanten

MacMahon-Formel

Allgemeine
Formeln für
Matchings in
planaren
Graphen

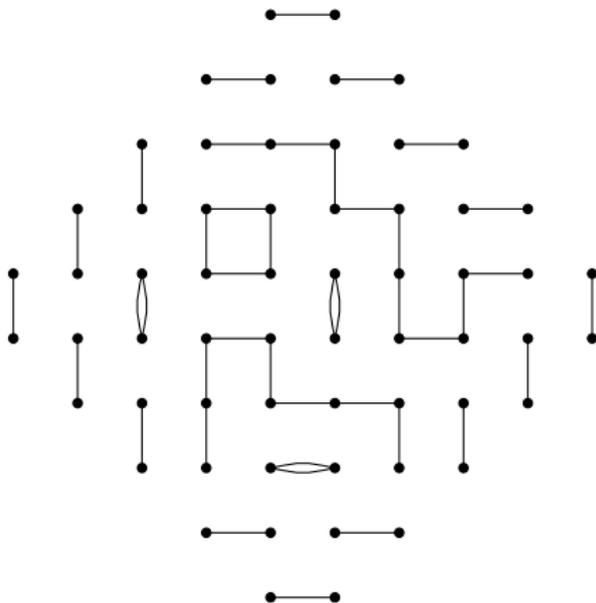
Später verwendete
Spezialfälle

Allgemeines Theorem

Beweisidee des Lemmas

Wir beweisen:

$$\begin{aligned} & \#\{(\text{Matching in } D_n, \text{ Matching in } D_{n-2})\} \\ &= 2\#\{(\text{Matching in } D_{n-1}, \text{ Matching in } D_{n-1})\}. \end{aligned}$$



Beispiele

Anzahl der
Pflasterungen eines
aztekischen
Diamanten

MacMahon-Formel

Allgemeine
Formeln für
Matchings in
planaren
Graphen

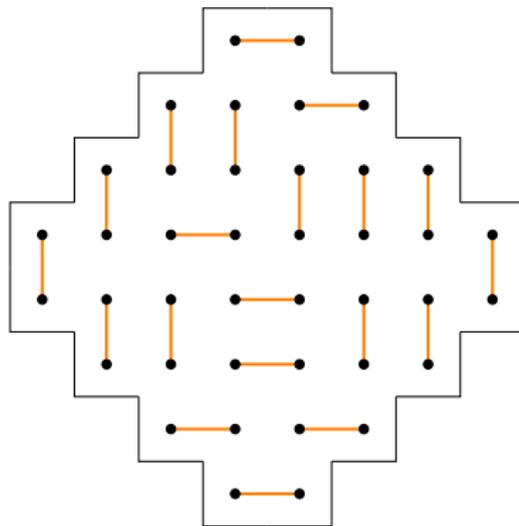
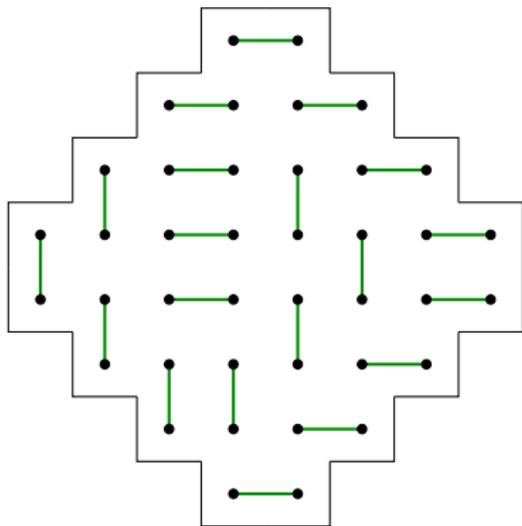
Später verwendete
Spezialfälle

Allgemeines Theorem

Beweisidee des Lemmas

Wir beweisen:

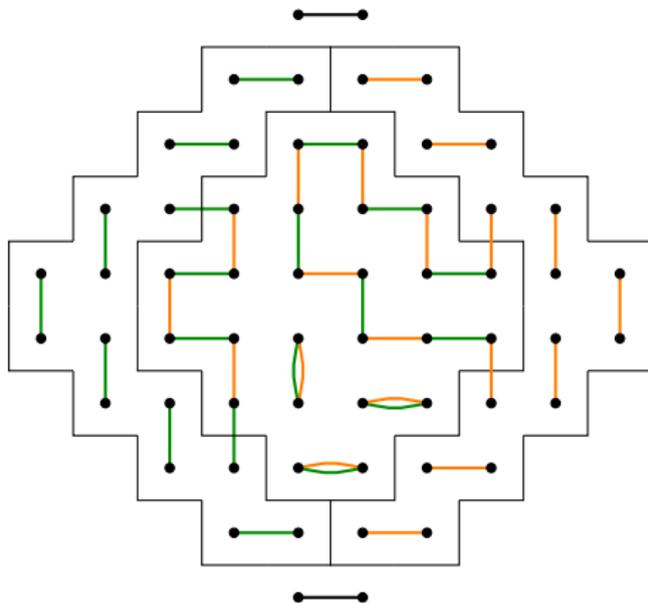
$$\begin{aligned} & \#\{(\text{Matching in } D_n, \text{ Matching in } D_{n-2})\} \\ &= 2\#\{(\text{Matching in } D_{n-1}, \text{ Matching in } D_{n-1})\}. \end{aligned}$$



Beweisidee des Lemmas

Wir beweisen:

$$\begin{aligned} & \#\{(\text{Matching in } D_n, \text{ Matching in } D_{n-2})\} \\ &= 2\#\{(\text{Matching in } D_{n-1}, \text{ Matching in } D_{n-1})\}. \end{aligned}$$



Beispiele

Anzahl der
Pflasterungen eines
aztekischen
Diamanten

MacMahon-Formel

Allgemeine
Formeln für
Matchings in
planaren
Graphen

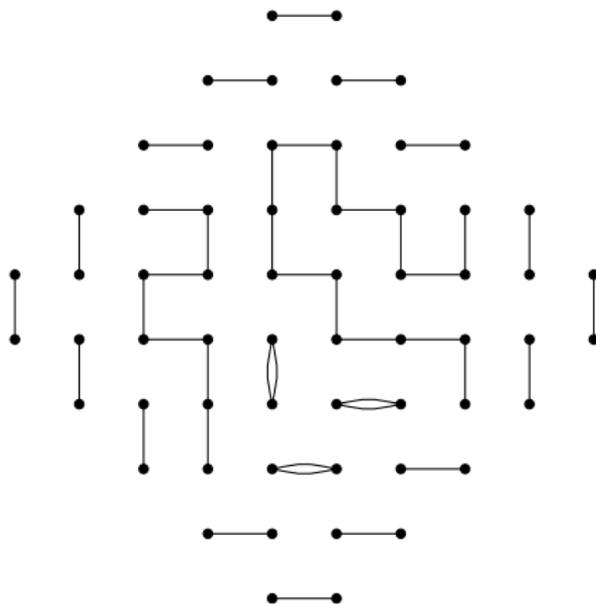
Später verwendete
Spezialfälle

Allgemeines Theorem

Beweisidee des Lemmas

Wir beweisen:

$$\begin{aligned} & \#\{(\text{Matching in } D_n, \text{ Matching in } D_{n-2})\} \\ &= 2\#\{(\text{Matching in } D_{n-1}, \text{ Matching in } D_{n-1})\}. \end{aligned}$$



Beispiele

Anzahl der
Pflasterungen eines
aztekischen
Diamanten

MacMahon-Formel

Allgemeine
Formeln für
Matchings in
planaren
Graphen

Später verwendete
Spezialfälle

Allgemeines Theorem

Definition des doppelten aztekischen Graphen und Knotenbeschriftung

Überlagerung
von Matchings

Beispiele

Anzahl der
Pflasterungen eines
aztekischen
Diamanten

MacMahon-Formel

Allgemeine
Formeln für
Matchings in
planaren
Graphen

Später verwendete
Spezialfälle

Allgemeines Theorem

Definition

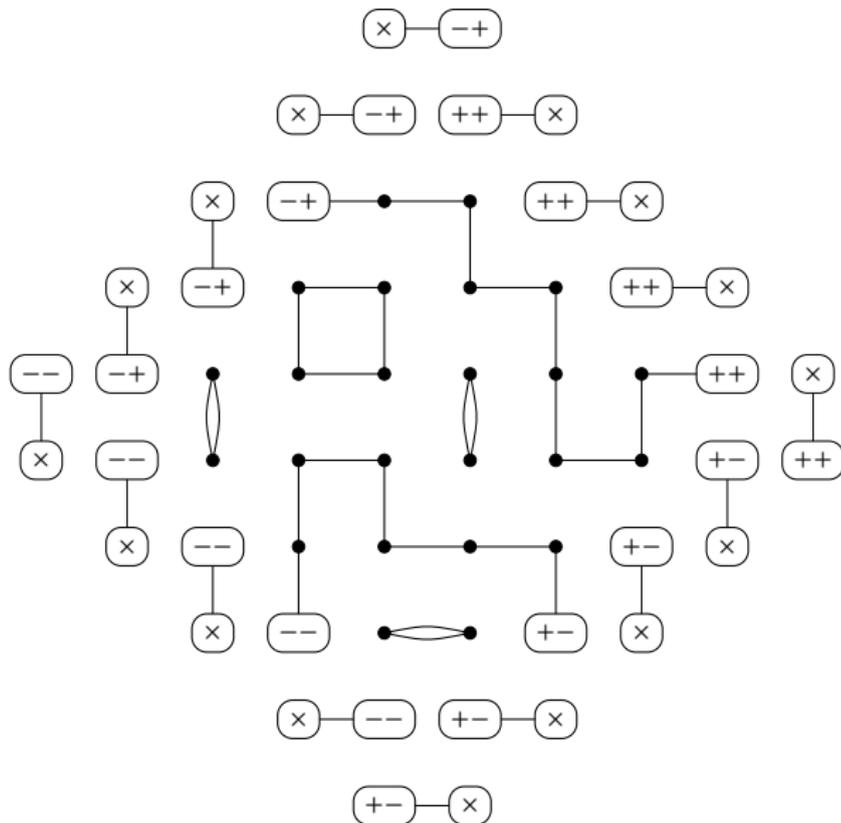
Ein doppelter aztekischer Graph der Ordnung n ist ein Multigraph $M_n = (V_n, A_n)$ mit Kanten $\{v_{x_1, y_1}, v_{x_2, y_2}\}$ aus E_n , sodass für alle $v_{x, y} \in V_n$ gilt:

$$\deg(v_{x, y}) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } |x| + |y| \in \{n, n+1\}, \\ 2 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir beschriften die Knoten $v_{x, y} \in V_n$ mit Grad 1.

$$L(v_{x, y}) = \begin{cases} ++, & \text{wenn } x = n, y = -1 \text{ oder } |x| + |y| = n+1, x > 0, y > 0, \\ +-, & \text{wenn } x = -1, y = -n \text{ oder } |x| + |y| = n+1, x > 0, y < 0, \\ -+, & \text{wenn } x = -n, y = 1 \text{ oder } |x| + |y| = n+1, x < 0, y > 0, \\ --, & \text{wenn } x = 1, y = n \text{ oder } |x| + |y| = n+1, x < 0, y < 0, \\ \times, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufteilung in Überlagerungen von Matchings



Überlagerung
von Matchings

Beispiele

Anzahl der
Pflasterungen eines
aztekischen
Diamanten

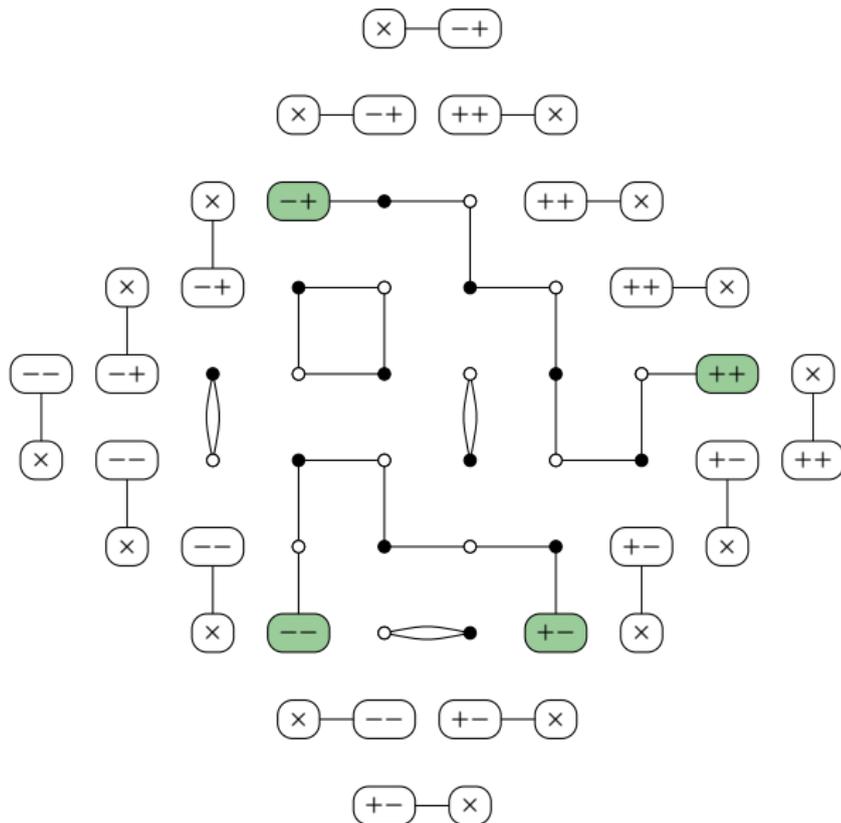
MacMahon-Formel

Allgemeine
Formeln für
Matchings in
planaren
Graphen

Später verwendete
Spezialfälle

Allgemeines Theorem

Aufteilung in Überlagerungen von Matchings



Überlagerung
von Matchings

Beispiele

Anzahl der
Pflasterungen eines
aztekischen
Diamanten

MacMahon-Formel

Allgemeine
Formeln für
Matchings in
planaren
Graphen

Später verwendete
Spezialfälle

Allgemeines Theorem

Definition einer ebenen Partition

Überlagerung
von Matchings

Definition

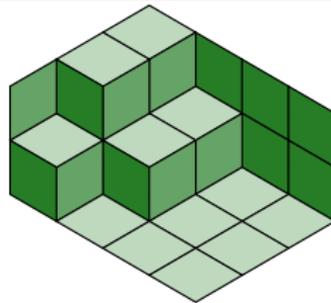
Eine ebene Partition, die in eine $r \times s \times t$ -Box passt, ist eine Funktion $\pi : \{1, \dots, r\} \times \{1, \dots, s\} \rightarrow \{0, \dots, t\}$, sodass $\pi(i, j) \geq \pi(i, j+1)$ und $\pi(i, j) \geq \pi(i+1, j)$.

Die Menge aller solcher Partitionen bezeichnen wir als $\Pi_{r,s,t}$ und definieren

$$|\pi| := \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \pi(i, j).$$

2	2	1
1	1	0
0	0	0
0	0	0

$$r = 3, s = 4, t = 2$$
$$|\pi| = 7$$



Beispiele

Anzahl der
Pflasterungen eines
aztekischen
Diamanten

MacMahon-Formel

Allgemeine
Formeln für
Matchings in
planaren
Graphen

Später verwendete
Spezialfälle

Allgemeines Theorem

Definition einer ebenen Partition

Überlagerung
von Matchings

Definition

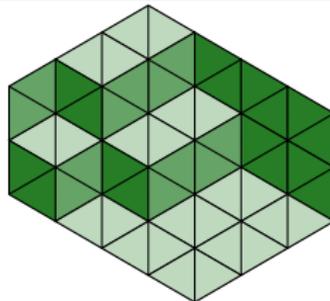
Eine ebene Partition, die in eine $r \times s \times t$ -Box passt, ist eine Funktion $\pi : \{1, \dots, r\} \times \{1, \dots, s\} \rightarrow \{0, \dots, t\}$, sodass $\pi(i, j) \geq \pi(i, j+1)$ und $\pi(i, j) \geq \pi(i+1, j)$.

Die Menge aller solcher Partitionen bezeichnen wir als $\Pi_{r,s,t}$ und definieren

$$|\pi| := \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \pi(i, j).$$

2	2	1
1	1	0
0	0	0
0	0	0

$$r = 3, s = 4, t = 2$$
$$|\pi| = 7$$



Beispiele

Anzahl der
Pflasterungen eines
aztekischen
Diamanten

MacMahon-Formel

Allgemeine
Formeln für
Matchings in
planaren
Graphen

Später verwendete
Spezialfälle

Allgemeines Theorem

Definition einer ebenen Partition

Überlagerung
von Matchings

Definition

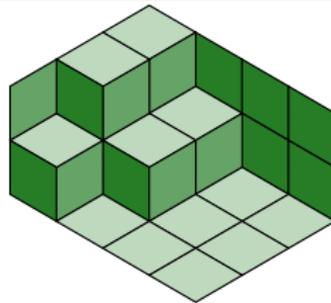
Eine ebene Partition, die in eine $r \times s \times t$ -Box passt, ist eine Funktion $\pi : \{1, \dots, r\} \times \{1, \dots, s\} \rightarrow \{0, \dots, t\}$, sodass $\pi(i, j) \geq \pi(i, j+1)$ und $\pi(i, j) \geq \pi(i+1, j)$.

Die Menge aller solcher Partitionen bezeichnen wir als $\Pi_{r,s,t}$ und definieren

$$|\pi| := \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \pi(i, j).$$

2	2	1
1	1	0
0	0	0
0	0	0

$$r = 3, s = 4, t = 2$$
$$|\pi| = 7$$



Beispiele

Anzahl der
Pflasterungen eines
aztekischen
Diamanten

MacMahon-Formel

Allgemeine
Formeln für
Matchings in
planaren
Graphen

Später verwendete
Spezialfälle

Allgemeines Theorem

Definition einer ebenen Partition

Überlagerung
von Matchings

Definition

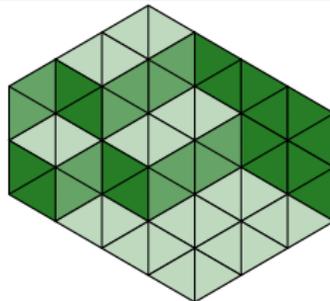
Eine ebene Partition, die in eine $r \times s \times t$ -Box passt, ist eine Funktion $\pi : \{1, \dots, r\} \times \{1, \dots, s\} \rightarrow \{0, \dots, t\}$, sodass $\pi(i, j) \geq \pi(i, j+1)$ und $\pi(i, j) \geq \pi(i+1, j)$.

Die Menge aller solcher Partitionen bezeichnen wir als $\Pi_{r,s,t}$ und definieren

$$|\pi| := \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \pi(i, j).$$

2	2	1
1	1	0
0	0	0
0	0	0

$$r = 3, s = 4, t = 2$$
$$|\pi| = 7$$



Beispiele

Anzahl der
Pflasterungen eines
aztekischen
Diamanten

MacMahon-Formel

Allgemeine
Formeln für
Matchings in
planaren
Graphen

Später verwendete
Spezialfälle

Allgemeines Theorem

Definition einer ebenen Partition

Überlagerung
von Matchings

Definition

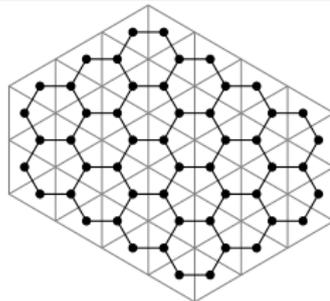
Eine ebene Partition, die in eine $r \times s \times t$ -Box passt, ist eine Funktion $\pi : \{1, \dots, r\} \times \{1, \dots, s\} \rightarrow \{0, \dots, t\}$, sodass $\pi(i, j) \geq \pi(i, j+1)$ und $\pi(i, j) \geq \pi(i+1, j)$.

Die Menge aller solcher Partitionen bezeichnen wir als $\Pi_{r,s,t}$ und definieren

$$|\pi| := \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \pi(i, j).$$

2	2	1
1	1	0
0	0	0
0	0	0

$$r = 3, s = 4, t = 2$$
$$|\pi| = 7$$



Beispiele

Anzahl der
Pflasterungen eines
aztekischen
Diamanten

MacMahon-Formel

Allgemeine
Formeln für
Matchings in
planaren
Graphen

Später verwendete
Spezialfälle

Allgemeines Theorem

MacMahon-Formel und zu beweisendes Lemma

Überlagerung
von Matchings

Theorem (MacMahon-Formel)

Die erzeugende Funktion

$$P(r, s, t) := \sum_{\pi \in \Pi_{r,s,t}} q^{|\pi|}$$

ist

$$\prod_{i=1}^r \prod_{j=1}^s \frac{1 - q^{i+j+t-1}}{1 - q^{i+j-1}}.$$

Beispiele

Anzahl der
Pflasterungen eines
aztekischen
Diamanten

MacMahon-Formel

Allgemeine
Formeln für
Matchings in
planaren
Graphen

Später verwendete
Spezialfälle

Allgemeines Theorem

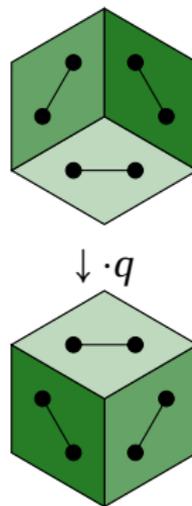
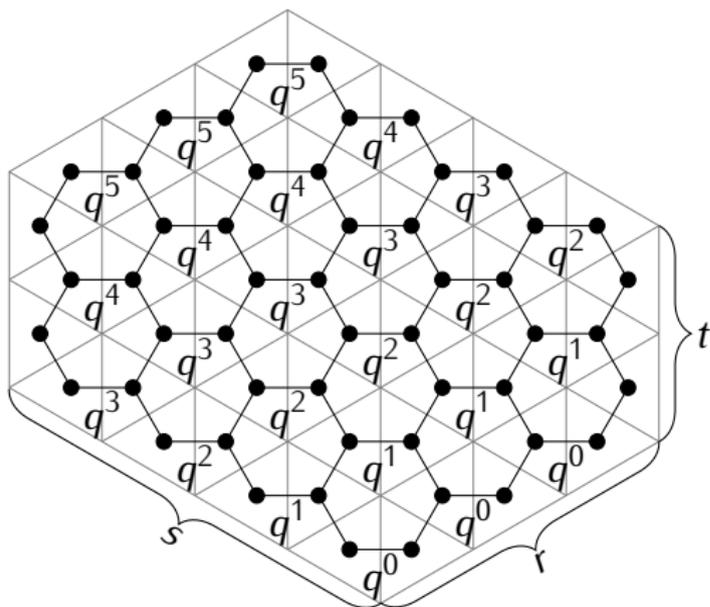
Lemma

$$P(r+1, s+1, t)P(r, s, t) = q^t P(r, s+1, t)P(r+1, s, t) \\ + P(r+1, s+1, t-1)P(r, s, t+1)$$

Die MacMahon-Formel folgt durch vollständige Induktion
über $r + s + t$.

Gewichtungen zum Beweis des Lemmas

Überlagerung
von Matchings



- Wir gewichten die Kanten.

Beispiele

Anzahl der
Pflasterungen eines
aztekischen
Diamanten

MacMahon-Formel

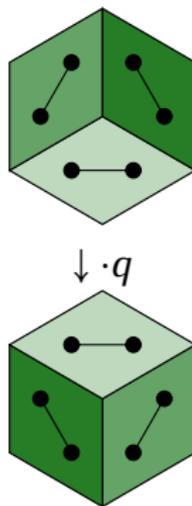
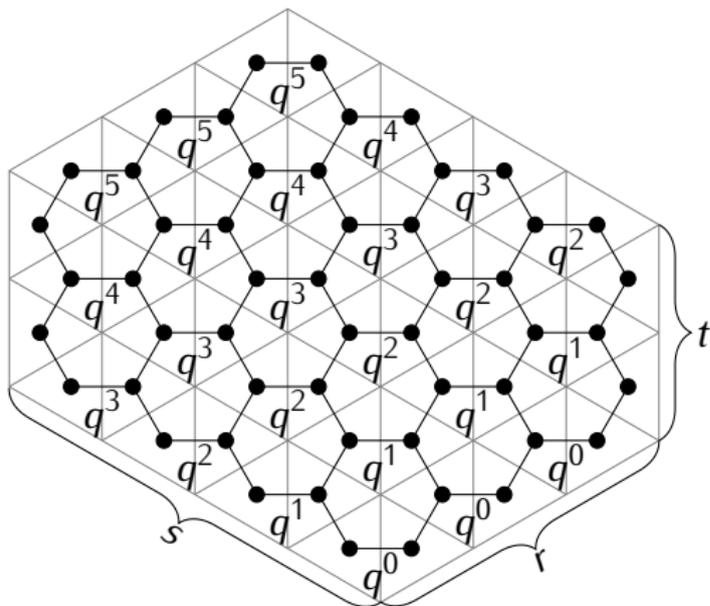
Allgemeine
Formeln für
Matchings in
planaren
Graphen

Später verwendete
Spezialfälle

Allgemeines Theorem

Gewichtungen zum Beweis des Lemmas

Überlagerung
von Matchings



- Wir gewichten die Kanten.
- Das Gewicht des Matchings ist das Produkt der Kantengewichte.

Beispiele

Anzahl der
Pflasterungen eines
aztekischen
Diamanten

MacMahon-Formel

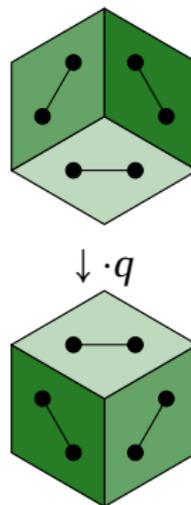
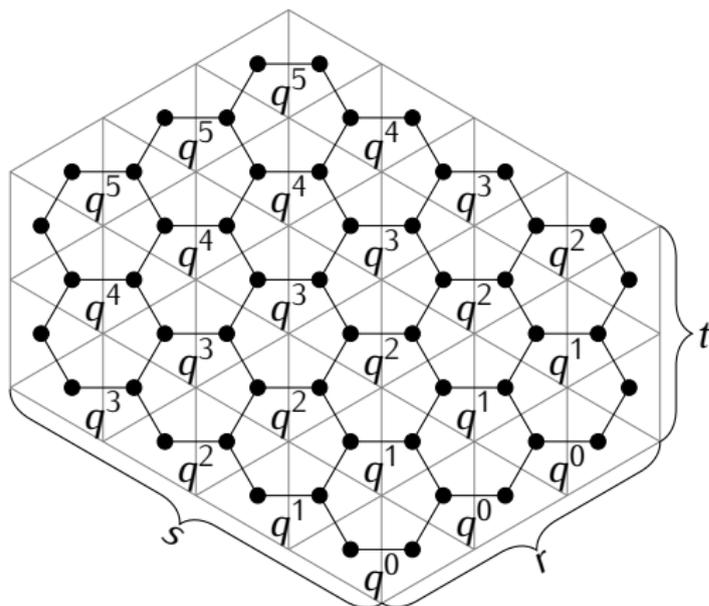
Allgemeine
Formeln für
Matchings in
planaren
Graphen

Später verwendete
Spezialfälle

Allgemeines Theorem

Gewichtungen zum Beweis des Lemmas

Überlagerung
von Matchings



- Wir gewichten die Kanten.
- Das Gewicht des Matchings ist das Produkt der Kantengewichte.
- Die Summe aller Gewichte perfekter Matchings ist gleich

$$q^{\frac{rs(s-1)}{2}} P(r, s, t).$$

Beispiele

Anzahl der
Pflasterungen eines
aztekischen
Diamanten

MacMahon-Formel

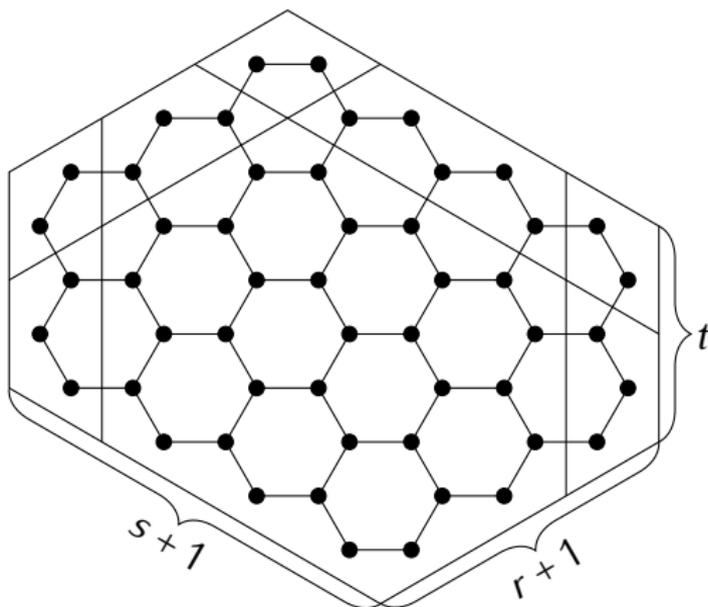
Allgemeine
Formeln für
Matchings in
planaren
Graphen

Später verwendete
Spezialfälle

Allgemeines Theorem

Beweis des Lemmas

Überlagerung
von Matchings



Beispiele

Anzahl der
Pflasterungen eines
aztekischen
Diamanten

MacMahon-Formel

Allgemeine
Formeln für
Matchings in
planaren
Graphen

Später verwendete
Spezialfälle

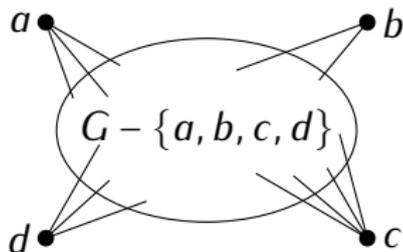
Allgemeines Theorem

$$\begin{aligned} q^{\frac{(r+1)(s+1)s}{2}} P(r+1, s+1, t) \cdot q^{\frac{rs(s-1)}{2}} P(r, s, t) = \\ q^{s+t} q^{\frac{r(s+1)s}{2}} P(r, s+1, t) \cdot q^{\frac{(r+1)s(s-1)}{2}} P(r+1, s, t) + \\ q^{\frac{(r+1)(s+1)s}{2}} P(r+1, s+1, t-1) \cdot q^{\frac{rs(s-1)}{2}} P(r, s, t+1) \end{aligned}$$

- Sei $G = (V_1, V_2, E)$ ein planarer bipartiter Graph, d.h. $E \subseteq \{\{v_1, v_2\} : v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$.

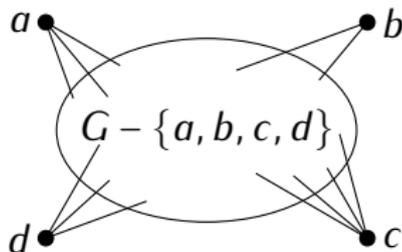
Notation für bipartite Graphen

- Sei $G = (V_1, V_2, E)$ ein planarer bipartiter Graph, d.h. $E \subseteq \{\{v_1, v_2\} : v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$.
- Ist $U \subseteq V_1 \cup V_2$, so schreiben wir $G - U$ für $(V_1 \setminus U, V_2 \setminus U, E \setminus \{\{v_1, v_2\} : v_1 \in U \vee v_2 \in U\})$.



Notation für bipartite Graphen

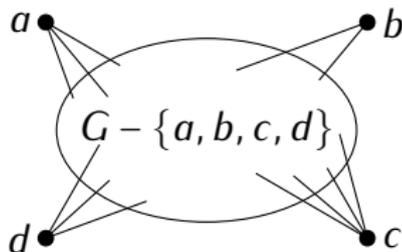
- Sei $G = (V_1, V_2, E)$ ein planarer bipartiter Graph, d.h. $E \subseteq \{\{v_1, v_2\} : v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$.
- Ist $U \subseteq V_1 \cup V_2$, so schreiben wir $G - U$ für $(V_1 \setminus U, V_2 \setminus U, E \setminus \{\{v_1, v_2\} : v_1 \in U \vee v_2 \in U\})$.



- Seien $a, b, c, d \in V_1 \cup V_2$ vier Knoten eines Gebiets in zyklischer Reihenfolge.

Notation für bipartite Graphen

- Sei $G = (V_1, V_2, E)$ ein planarer bipartiter Graph, d.h. $E \subseteq \{\{v_1, v_2\} : v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$.
- Ist $U \subseteq V_1 \cup V_2$, so schreiben wir $G - U$ für $(V_1 \setminus U, V_2 \setminus U, E \setminus \{\{v_1, v_2\} : v_1 \in U \vee v_2 \in U\})$.



- Seien $a, b, c, d \in V_1 \cup V_2$ vier Knoten eines Gebiets in zyklischer Reihenfolge.
- M gebe die Anzahl der perfekten Matchings an.

Zwei allgemeine Condensation-Theoreme

Überlagerung
von Matchings

Beispiele

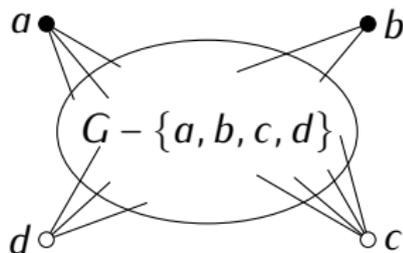
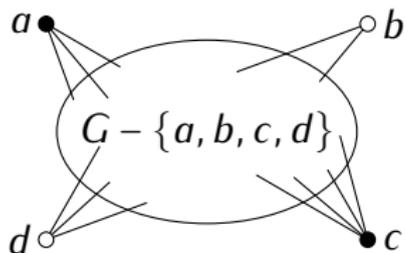
Anzahl der
Pflasterungen eines
aztekischen
Diamanten

MacMahon-Formel

Allgemeine
Formeln für
Matchings in
planaren
Graphen

Später verwendete
Spezialfälle

Allgemeines Theorem



Theorem (●○●○ und ●●○○)

Sei $|V_1| = |V_2|$.

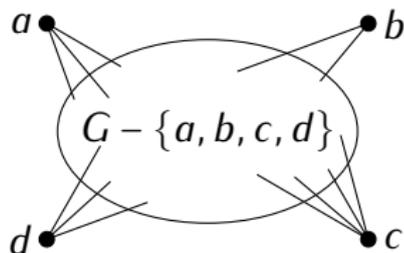
Wenn $a, c \in V_1$ und $b, d \in V_2$, dann gilt

$$M(G)M(G - \{a, b, c, d\}) = M(G - \{a, b\})M(G - \{c, d\}) \\ + M(G - \{a, d\})M(G - \{b, c\}).$$

Wenn $a, b \in V_1$ und $c, d \in V_2$, dann gilt

$$M(G - \{a, d\})M(G - \{b, c\}) = M(G)M(G - \{a, b, c, d\}) \\ + M(G - \{a, c\})M(G - \{b, d\}).$$

...und ein weiteres Theorem



Theorem (••••)

Sei $|V_1| = |V_2| + 2$.

Wenn $a, b, c, d \in V_1$, dann gilt

$$M(G - \{a, c\})M(G - \{b, d\}) = M(G - \{a, b\})M(G - \{c, d\}) \\ + M(G - \{a, d\})M(G - \{b, c\}).$$

Theorem

Sei G ein planarer kantengewichteter Graph mit $2n$ [$2n + 1$] Knoten. Seien die $2k$ ($2 \leq k \leq n$) Knoten $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_k, b_k$ Knoten eines Gebiets in zyklischer Reihenfolge. Sei $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ und $A = A_1 \cup A_2$. Dann gilt

$$\sum_{W \subset B, |W| \text{ gerade [ungerade]}} M(G - W)M(G - A - B \setminus W) = \sum_{Y \subset B, |Y| - |A_1| \text{ gerade [ungerade]}} M(G - A_1 - Y)M(G - A_2 - B \setminus Y),$$

wobei M die Summe der Produkte der Gewichte aller enthaltenen Kanten über alle perfekten Matchings angibt.

Beispiele

Anzahl der
Pflasterungen eines
aztekischen
Diamanten

MacMahon-Formel

Allgemeine
Formeln für
Matchings in
planaren
Graphen

Später verwendete
Spezialfälle

Allgemeines Theorem

Ablauf Teil II – Anwendungen von Graphical Condensation

Anwendungen
von Graphical
Condensation

Cassinis
Identität

Frieze-Pattern

Markow-
Zahlen

3 Cassinis Identität

4 Frieze-Pattern

5 Markow-Zahlen

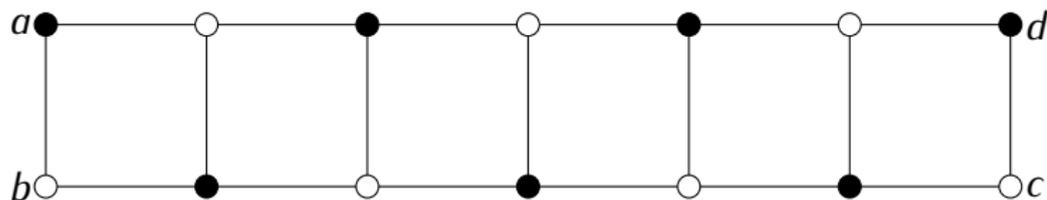
Fibonacci-Zahlen

Anwendungen
von Graphical
Condensation

Cassini's
Identität

Frieze-Pattern

Markow-
Zahlen



Die Anzahl der Matchings des $2 \times n$ -Gitters ist

$$F_{n+1},$$

wobei

$$F_1 = F_2 = 1$$

und

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

Für n gerade:

Theorem (●○●○)

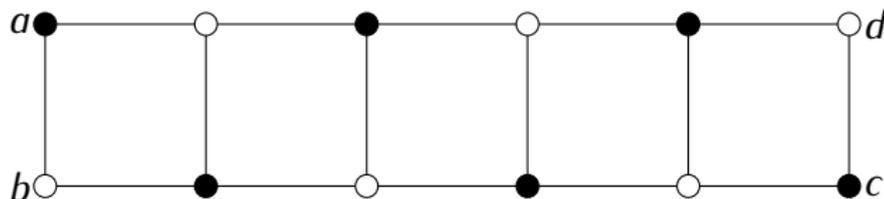
$$M(G)M(G - \{a, b, c, d\}) = M(G - \{a, b\})M(G - \{c, d\}) \\ + M(G - \{a, d\})M(G - \{b, c\})$$

Beweis durch Condensation

Für n gerade:

Theorem (•◦•◦)

$$M(G)M(G - \{a, b, c, d\}) = M(G - \{a, b\})M(G - \{c, d\}) + M(G - \{a, d\})M(G - \{b, c\})$$

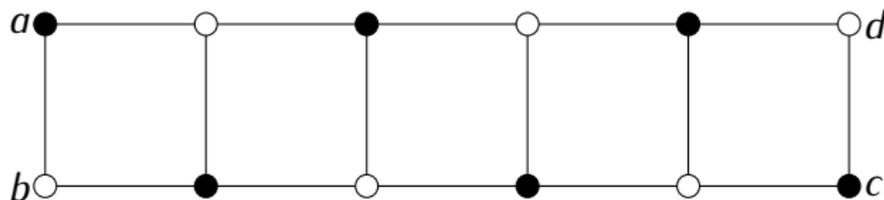


Beweis durch Condensation

Für n gerade:

Theorem (•◦•◦)

$$M(G)M(G - \{a, b, c, d\}) = M(G - \{a, b\})M(G - \{c, d\}) \\ + M(G - \{a, d\})M(G - \{b, c\})$$



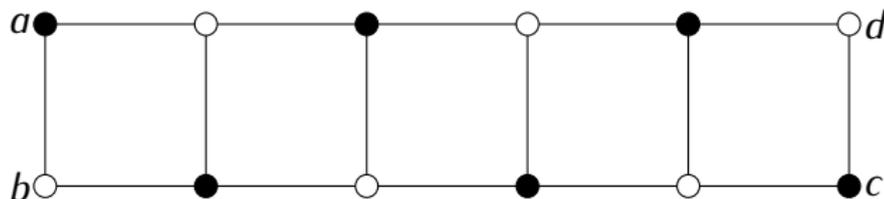
Daraus folgt: F_{n+1}

Beweis durch Condensation

Für n gerade:

Theorem (•◦•◦)

$$M(G)M(G - \{a, b, c, d\}) = M(G - \{a, b\})M(G - \{c, d\}) \\ + M(G - \{a, d\})M(G - \{b, c\})$$



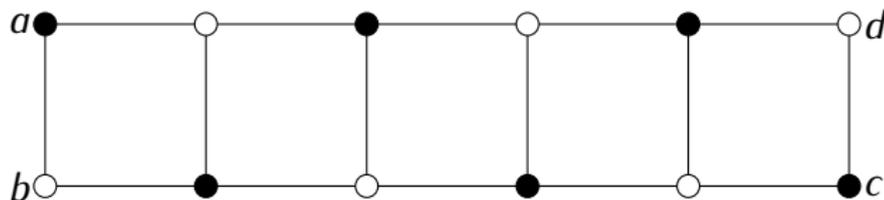
Daraus folgt: $F_{n+1}F_{n-1}$

Beweis durch Condensation

Für n gerade:

Theorem (•◦•◦)

$$M(G)M(G - \{a, b, c, d\}) = M(G - \{a, b\})M(G - \{c, d\}) \\ + M(G - \{a, d\})M(G - \{b, c\})$$



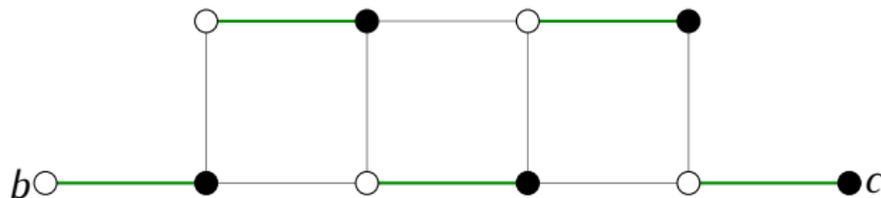
Daraus folgt: $F_{n+1}F_{n-1} = F_n^2 +$

Beweis durch Condensation

Für n gerade:

Theorem (•◦•◦)

$$M(G)M(G - \{a, b, c, d\}) = M(G - \{a, b\})M(G - \{c, d\}) + M(G - \{a, d\})M(G - \{b, c\})$$



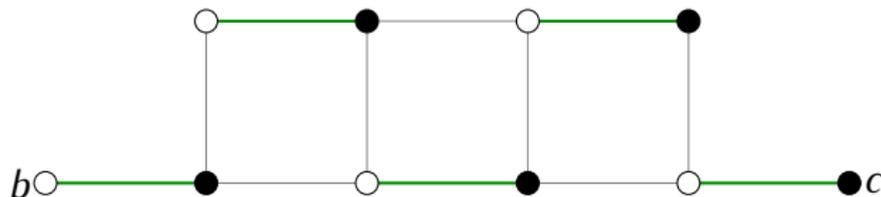
Daraus folgt: $F_{n+1}F_{n-1} = F_n^2 +$

Beweis durch Condensation

Für n gerade:

Theorem (•◦•◦)

$$M(G)M(G - \{a, b, c, d\}) = M(G - \{a, b\})M(G - \{c, d\}) \\ + M(G - \{a, d\})M(G - \{b, c\})$$



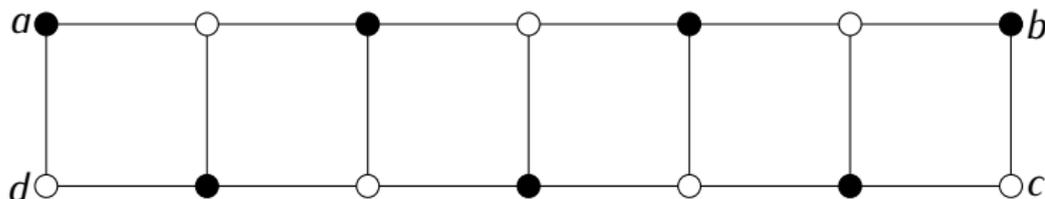
Daraus folgt: $F_{n+1}F_{n-1} = F_n^2 + 1 \cdot 1$

Beweis durch Condensation

Für n ungerade:

Theorem (••○○)

$$M(G - \{a, d\})M(G - \{b, c\}) = M(G)M(G - \{a, b, c, d\}) \\ + M(G - \{a, c\})M(G - \{b, d\})$$

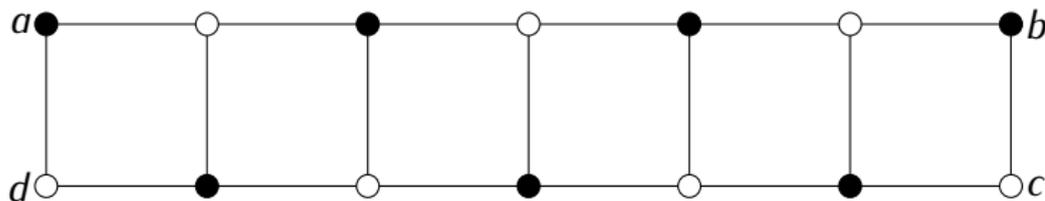


Beweis durch Condensation

Für n ungerade:

Theorem (●●○○)

$$M(G - \{a, d\})M(G - \{b, c\}) = M(G)M(G - \{a, b, c, d\}) \\ + M(G - \{a, c\})M(G - \{b, d\})$$



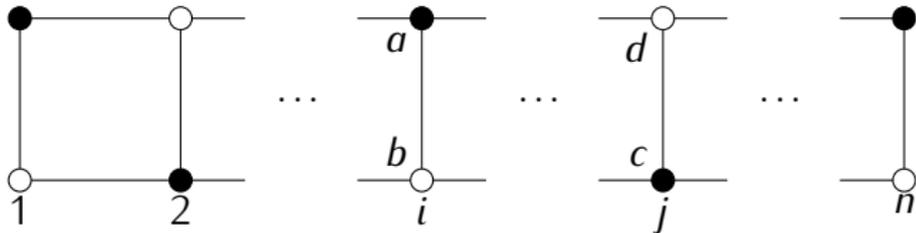
$$F_n F_n = F_{n+1} F_{n-1} + 1$$

$$F_{n+1}F_{n-1} = \begin{cases} F_n^2 + 1 & \text{für } n \text{ gerade} \\ F_n^2 - 1 & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$F_{n+1}F_{n-1} = \begin{cases} F_n^2 + 1 & \text{für } n \text{ gerade} \\ F_n^2 - 1 & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$F_{n+1}F_{n-1} = F_n^2 + (-1)^n$$

Verallgemeinerung



Anwendungen
von Graphical
Condensation

Cassini's
Identität

Frieze-Pattern

Markov-
Zahlen

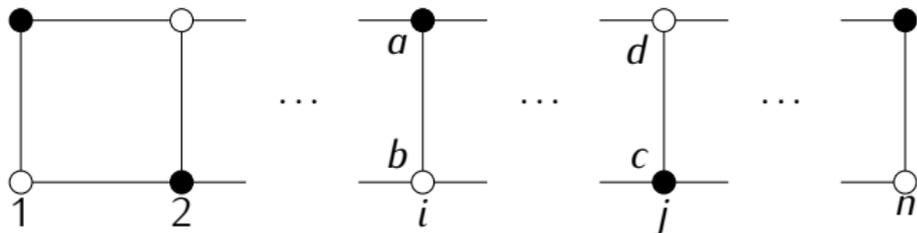
Verallgemeinerung

Anwendungen
von Graphical
Condensation

Cassini's
Identität

Frieze-Pattern

Markow-
Zahlen



$$F_{n+1}F_iF_{j-i}F_{n-j+1} = F_iF_{n-i+1}F_jF_{n-j+1} + (-1)^{j-i-1}(F_iF_{n-j+1})^2$$

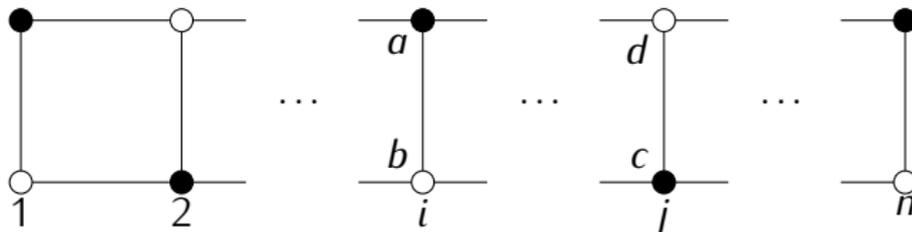
Verallgemeinerung

Anwendungen
von Graphical
Condensation

Cassini's
Identität

Frieze-Pattern

Markow-
Zahlen

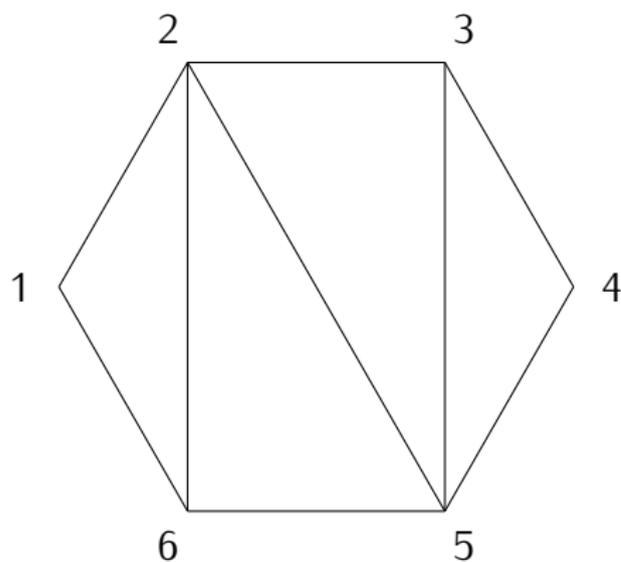


$$F_{n+1}F_iF_{j-i}F_{n-j+1} = F_iF_{n-i+1}F_jF_{n-j+1} + (-1)^{j-i-1}(F_iF_{n-j+1})^2$$
$$F_{n+1}F_{j-i} = F_{n-i+1}F_j + (-1)^{j-i-1}F_iF_{n-j+1}$$

- Reguläres n -Eck
- Nummerierung der Eckpunkte mit $1, \dots, n$
- beliebige Triangulierung T

liefert uns ein n -periodisches Zahlenfeld mit $(n - 1)$ Reihen, das sog. **Fries-Muster** (engl. Frieze-Pattern) definiert durch die Zahlen a_1, a_2, \dots, a_n , wobei a_k die Anzahl der Dreiecke ist, in denen Eckpunkt k liegt.

Beispiel



...	1	1	1	1	1	1	1	...
...		1	3	2	1	3	2	...
...	1	2	5	1	2	5	1	...
...		1	3	2	1	3	2	...
...	1	1	1	1	1	1	1	...

Anwendungen
von Graphical
Condensation

Cassini's
Identität

Frieze-Pattern

Markow-
Zahlen

- Die erste Reihe lautet:

$\dots, 1, 1, 1, \dots$

- Die erste Reihe lautet:

$$\dots, 1, 1, 1, \dots$$

- Die zweite Reihe (leicht versetzt):

$$\dots, a_1, a_2, \dots, a_n, a_1, \dots$$

- Die erste Reihe lautet:

$$\dots, 1, 1, 1, \dots$$

- Die zweite Reihe (leicht versetzt):

$$\dots, a_1, a_2, \dots, a_n, a_1, \dots$$

- Jede Reihe danach erfüllt folgende Bedingung:

$$B \begin{array}{c} A \\ C \\ D \end{array} D = \frac{BC - 1}{A}$$

Damit wird folgendes angenommen:

- $D = \frac{BC-1}{A}$ ist ungleich 0.

Damit wird folgendes angenommen:

- $D = \frac{BC-1}{A}$ ist ungleich 0.
- Jeder Eintrag ist eine positive ganze Zahl.

Damit wird folgendes angenommen:

- $D = \frac{BC-1}{A}$ ist ungleich 0.
- Jeder Eintrag ist eine positive ganze Zahl.
- Für $1 \leq m \leq n-1$ ist die m -te Reihe die gleiche wie die $n-m$ -te (evtl. leicht verschoben).

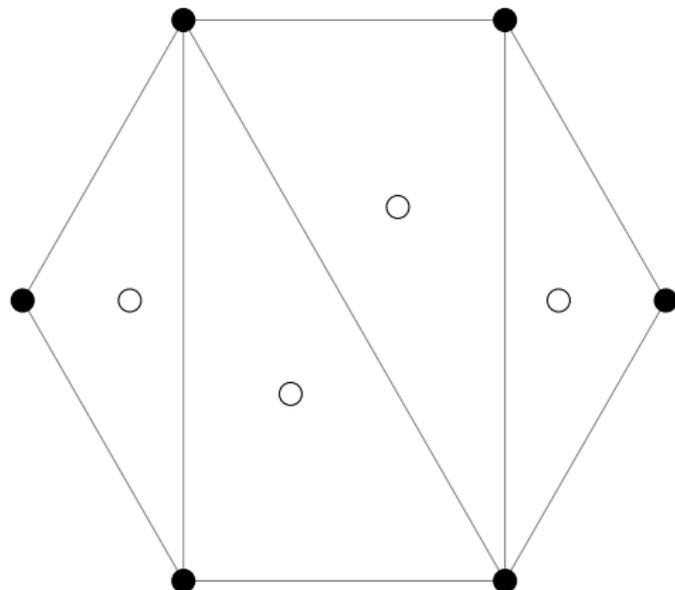
Von der Triangulierung zum Frieze-Pattern

Anwendungen
von Graphical
Condensation

Cassinis
Identität

Frieze-Pattern

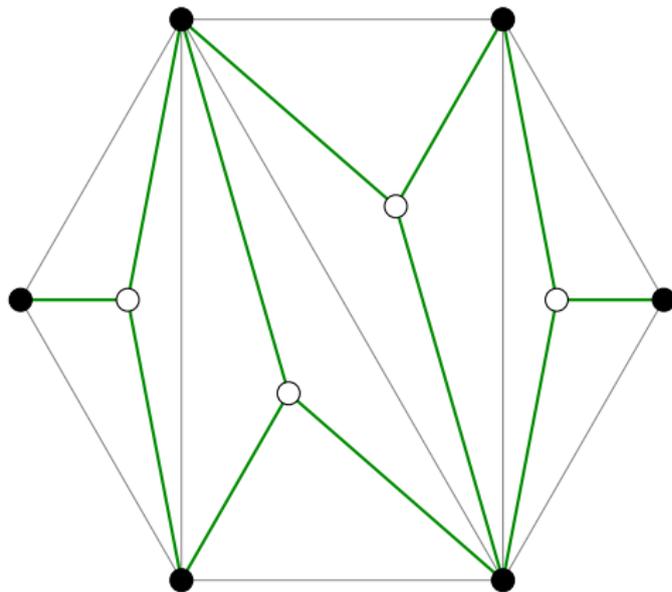
Markow-
Zahlen



- ① Eckpunkt des n -Ecks wird zu einem schwarzen Knoten
- ② In jedes Dreieck wird ein weißer Knoten gezeichnet (insgesamt $n - 2$)

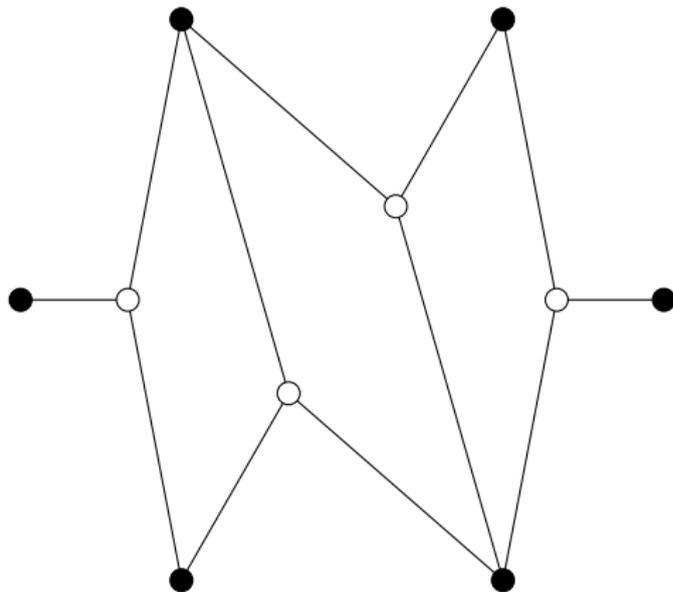
Von der Triangulierung zum Frieze-Pattern II

Jeder weiße Knoten wird nun mit den schwarzen Knoten verbunden, die das entsprechende Dreieck bilden.



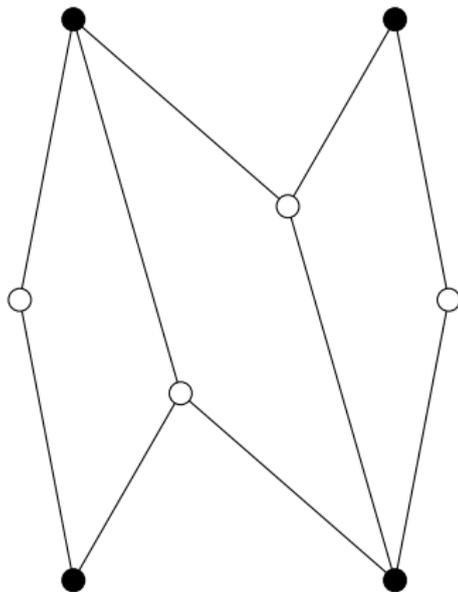
Von der Triangulierung zum Frieze-Pattern III

Wir bekommen einen bipartiten Graphen G mit n schwarzen und $n - 2$ weißen Knoten.



Definition

Wir definieren $C_{i,j}$ als die Anzahl der perfekten Matchings des Graphen G ohne die Knoten i und j (und alle zu diesen Knoten inzidenten Kanten).



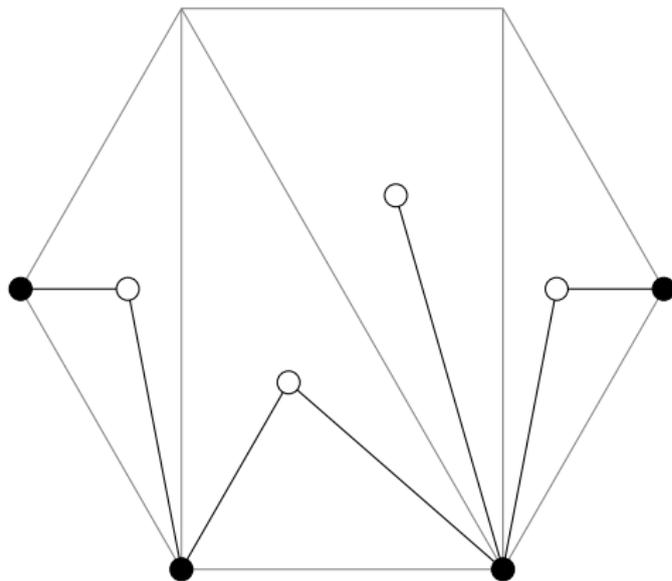
Theorem

Das Frieze-Pattern hat die folgende Gestalt:

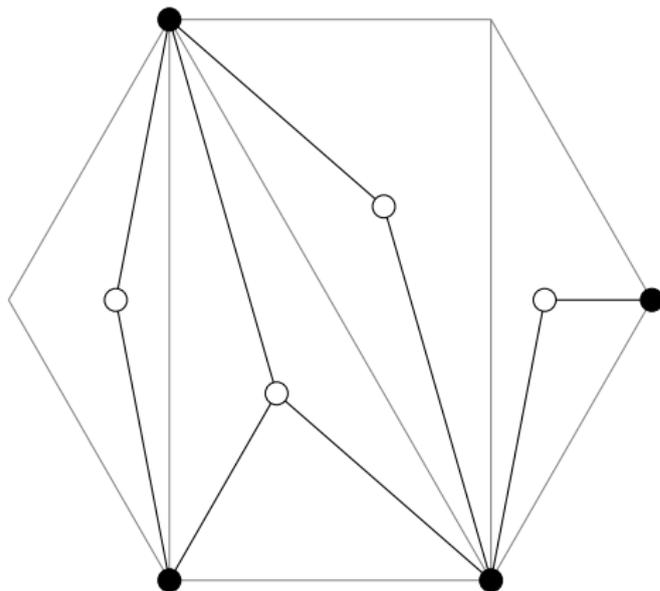
$$\begin{array}{cccccc} \dots & C_{1,2} & & C_{2,3} & & C_{3,4} & & C_{4,5} & \dots \\ \dots & & C_{1,3} & & C_{2,4} & & C_{3,5} & & \dots \\ \dots & C_{n,3} & & C_{1,4} & & C_{2,5} & & C_{3,6} & \dots \\ \dots & & C_{n,4} & & C_{1,5} & & C_{2,6} & & \dots \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \end{array}$$

(wobei alle Indizes modulo n interpretiert werden).

Erster Schritt: $C_{i,i+1} = 1$:



Zweiter Schritt: $C_{i-1,i+1} = a_i$:



Zur Erinnerung:

$$B \begin{array}{c} A \\ D \end{array} C \quad D = \frac{BC - 1}{A}$$

Zur Erinnerung:

$$B \begin{array}{c} A \\ D \end{array} C \quad D = \frac{BC - 1}{A}$$

Dritter Schritt:

$$C_{i-1,j+1} = \frac{C_{i-1,j}C_{i,j+1} - 1}{C_{i,j}}$$

Zur Erinnerung:

$$B \begin{array}{c} A \\ D \end{array} C \quad D = \frac{BC - 1}{A}$$

Dritter Schritt:

$$C_{i-1,j+1} = \frac{C_{i-1,j}C_{i,j+1} - 1}{C_{i,j}}$$
$$C_{i,j}C_{i-1,j+1} + 1 = C_{i-1,j}C_{i,j+1}$$

Zur Erinnerung:

$$B \begin{array}{c} A \\ D \end{array} C \quad D = \frac{BC - 1}{A}$$

Dritter Schritt:

$$C_{i-1,j+1} = \frac{C_{i-1,j}C_{i,j+1} - 1}{C_{i,j}}$$

$$C_{i,j}C_{i-1,j+1} + 1 = C_{i-1,j}C_{i,j+1}$$

$$C_{i,j}C_{i-1,j+1} + C_{i-1,i}C_{j,j+1} = C_{i-1,j}C_{i,j+1}$$

Zur Erinnerung:

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ B & & C \\ & D & \end{array} \quad D = \frac{BC - 1}{A}$$

Dritter Schritt:

$$C_{i-1,j+1} = \frac{C_{i-1,j}C_{i,j+1} - 1}{C_{i,j}}$$

$$C_{i,j}C_{i-1,j+1} + 1 = C_{i-1,j}C_{i,j+1}$$

$$C_{i,j}C_{i-1,j+1} + C_{i-1,i}C_{j,j+1} = C_{i-1,j}C_{i,j+1}$$

Genau das ist Theorem ●●●●.

Definition (Markow-Tripel und Markow-Zahl)

Ein **Markow-Tripel** ist ein Tripel von positiven natürlichen Zahlen, welches die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz \quad (1)$$

löst.

Eine **Markow-Zahl** ist eine positive natürliche Zahl, die in mindestens einem Tripel vorkommt.

Lösungen der Gleichung

Gleichung (1) kann in die folgende Form umgeschrieben werden:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + z^2 &= 3xyz \\ z^2 - (3xy)z + (x^2 + y^2) &= 0\end{aligned}$$

Man findet, dass wenn z eine Lösung der Gleichung (1) ist, dann auch

$$z' = 3xy - z = \frac{x^2 + y^2}{z}. \quad (2)$$

z' ist positiv, weil $\frac{x^2+y^2}{z}$ es ist und eine natürliche Zahl, weil $3xy - z$ es ist.

Analog für x und y .

$$z' = 3xy - z = \frac{x^2 + y^2}{z} \quad (2)$$

Lemma

Jedes Markow-Tripel kann von dem trivialen Tripel $(1, 1, 1)$ durch die in (2) beschriebenen Austauschoperationen erreicht werden.

Beispiel: $(1, 1, 1) \rightarrow (2, 1, 1) \rightarrow (2, 5, 1) \rightarrow (2, 5, 29)$

Konstruktion des Graphen

Knoten: Markow-Tripel

Kanten: Austauschoperationen:

$$(x, y, z) \rightarrow (x', y, z),$$

$$(x, y, z) \rightarrow (x, y', z),$$

$$(x, y, z) \rightarrow (x, y, z'),$$

wobei

$$x' = \frac{y^2 + z^2}{x},$$

$$y' = \frac{x^2 + z^2}{y},$$

$$z' = \frac{x^2 + y^2}{z}.$$

Der entstandene Graph ist ein unendlicher Baum:

- Er ist zusammenhängend (siehe Lemma).

Der entstandene Graph ist ein unendlicher Baum:

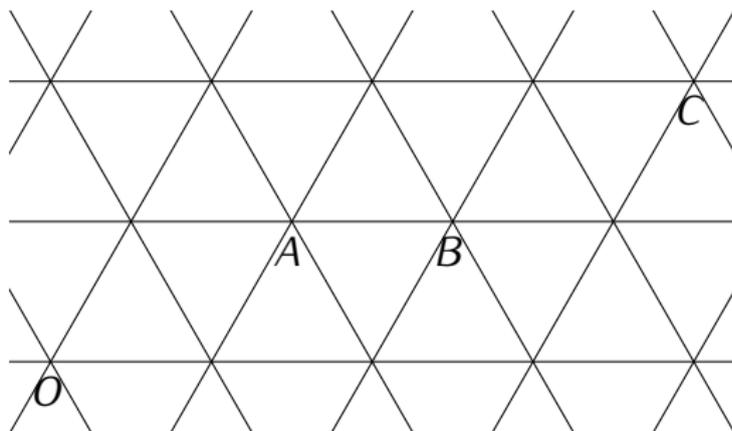
- Er ist zusammenhängend (siehe Lemma).
- Er enthält keinen Zykel (ohne Beweis).

Der entstandene Graph ist ein unendlicher Baum:

- Er ist zusammenhängend (siehe Lemma).
- Er enthält keinen Zykel (ohne Beweis).
- Er ist 3-regulär (jeder Knoten hat Grad 3).

Beispiel

Wir wollen zeigen, dass die Markow-Tripel auch in einer „ganz anderen Sprache“ beschrieben werden können.

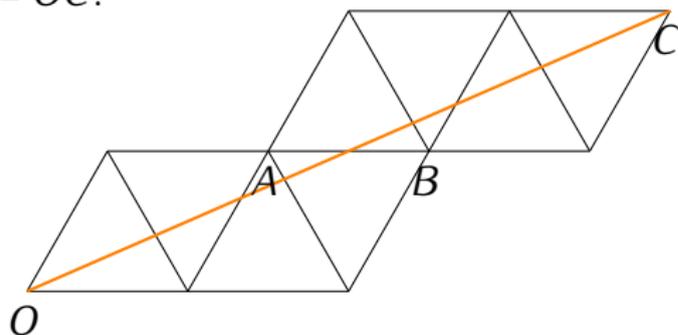


Als Beispiel betrachten wir das Markow-Tripel $(2, 5, 29)$.

Vom Dreiecksgitter zur Markow-Zahl

Wenn wir die Markow-Zahl eines Vektors \vec{OX} suchen, betrachten wir die Vereinigung aller Dreiecke R , die von der Geraden OX getroffen werden. Durch unser Gitter bekommen wir eine Triangulierung von R .

Betrachte $u = \vec{OC}$:



- Erstelle Graph wie bei den Frieze-Pattern.
- Sei $G(u)$ der Graph, der durch das Entfernen der beiden Endpunkte entsteht (in diesem Fall also O und C).
- $M(u)$ sei Anzahl der Matchings von $G(u)$ (wobei $M(u) = 1$ bei einem kürzesten Weg).

Satz über die Markow-Zahlen

Anwendungen
von Graphical
Condensation

Definition (Primitiver Vektor)

Ein Vektor u ist **primitiv**, wenn er nicht als $k \cdot v$ mit $k > 1$ und v aus dem Gitter geschrieben werden kann.

Cassinis
Identität

Frieze-Pattern

Markow-
Zahlen

Theorem

Wenn folgende Eigenschaften gelten:

- *u, v und w sind primitive Vektoren im Dreiecksgitter L ,*
- *für eine geeignete Wahl von Vorzeichen gilt $\pm u \pm v \pm w = 0$ und*
- *jeweils zwei Vektoren von u, v und w bilden eine Basis von L ,*

dann bildet

$$(M(u), M(v), M(w))$$

ein Markow-Tripel. Jedes Markow-Tripel kann auf diese Weise erzeugt werden.

Beweis

$(M(e_1), M(e_2), M(e_3)) = (1, 1, 1)$ ist klar.

Anwendungen
von Graphical
Condensation

Cassini's
Identität

Frieze-Pattern

Markov-
Zahlen

$(M(e_1), M(e_2), M(e_3)) = (1, 1, 1)$ ist klar.

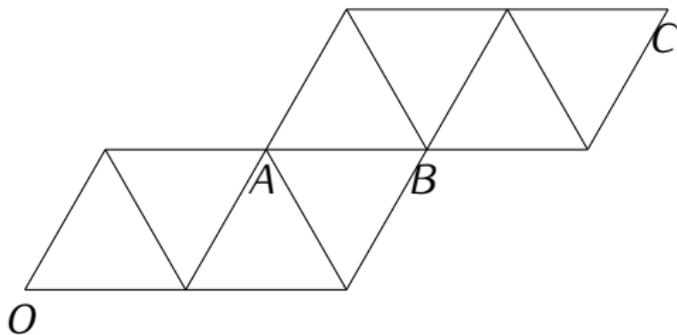
$$M(u + v) = \frac{M(u)^2 + M(v)^2}{M(u - v)}$$

$(M(e_1), M(e_2), M(e_3)) = (1, 1, 1)$ ist klar.

$$M(u+v) = \frac{M(u)^2 + M(v)^2}{M(u-v)}$$

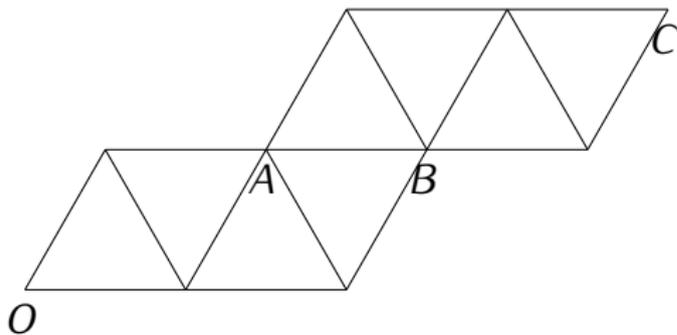
Um in unserem Bild zu bleiben, müssen wir also folgendes zeigen:

$$M(\vec{OC}) = \frac{M(\vec{OA})^2 + M(\vec{OB})^2}{M(\vec{AB})}$$



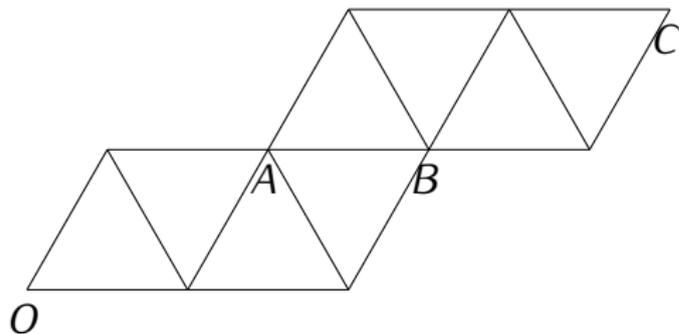
$$M(\vec{OC}) = \frac{M(\vec{OA})^2 + M(\vec{OB})^2}{M(\vec{AB})}$$

$$M(\vec{OC})M(\vec{AB}) = M(\vec{OA})^2 + M(\vec{OB})^2$$



$$M(\vec{OC}) = \frac{M(\vec{OA})^2 + M(\vec{OB})^2}{M(\vec{AB})}$$

$$M(\vec{OC})M(\vec{AB}) = M(\vec{OA})^2 + M(\vec{OB})^2$$



$$M(\vec{OC})M(\vec{AB}) = M(\vec{OA})M(\vec{BC}) + M(\vec{OB})M(\vec{AC})$$

Das ist wieder Theorem ●●●●.

Referenzen

-  Eric H. Kuo.
An alternative technique for proving the Aztec diamond theorem and other applications, 1998.
-  Eric H. Kuo.
Applications of graphical condensation for enumerating matchings and tilings.
Theoretical Computer Science, 319/1–3:29–57, 2004.
-  Eric H. Kuo.
Graphical condensation generalizations involving Pfaffians and determinants, 2007.
-  James Propp.
The combinatorics of frieze patterns and Markoff numbers, 2005.

Vielen Dank für eure Aufmerksamkeit!

Fragen?