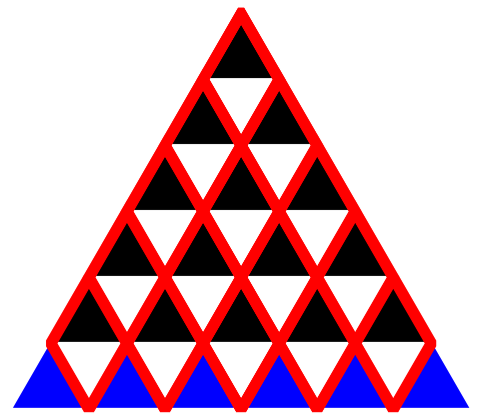
Rhombische Pflasterungen und Löcher

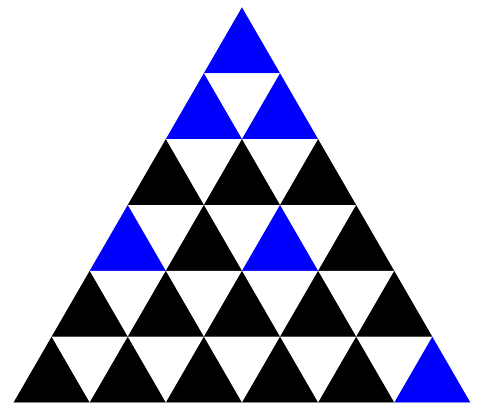
Maximilian Werk
Poster zum Seminar "Tilings"
29. bis 31. Januar 2010

Rhomben auf einem Dreieck

Ein gleichseitiges Dreieck (Brett) der Länge n kann mit Hilfe von Rhomben (rot) auf unterschiedliche Weise überschneidungsfrei gepflastert werden. Aufgrund der schwarz-weiß Färbung des Brettes sieht man schnell ein, dass mindestens n schwarze Felder unbepflaster bleiben – es existieren Löcher auf dem Feld (blau).
Da es möglich ist, alle weißen Felder zu pflastern, gehen wir im Folgenden davon aus, dass Löcher ausschließlich auf schwarzen Feldern existieren.
Nun stellt sich die Frage: Wie darf man n Löcher auf dem Brett verteilen, so dass man alle Nichtlöcher mit Rhomben überschneidungsfrei pflastern kann? Man überzeugt sich leicht, dass im nebenstehenden Bild keine solche Pflasterung möglich ist.



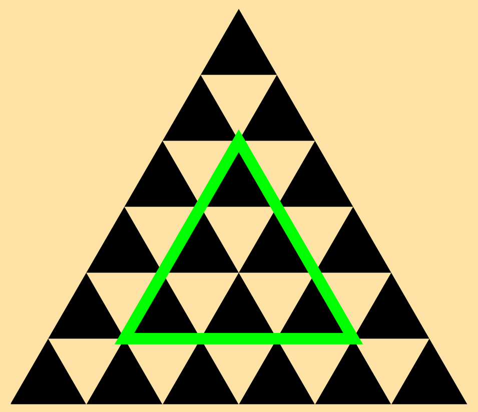
generische Pflasterung



nicht pflasterbares Brett

2. Die Vermutung

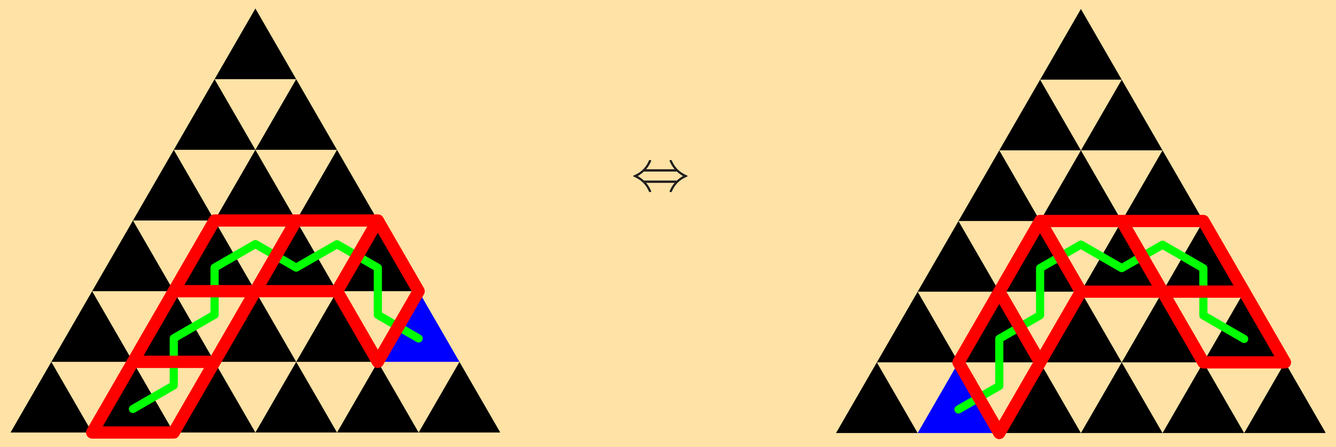
Betrachten wir nun k–Unterdreiecke. Diese besitzen am Rand ausschließlich schwarze Felder. Somit werden alle bis auf k der schwarzen Felder durch Weiße im selben Unterdreieck abgedeckt.
$\Rightarrow$ **In jedem k–Unterdreieck dürfen maximal k Löcher sein.**
Dass diese Bedingung nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend ist, lässt sich auf diverse Arten zeigen. Drei Ausgewählte sollen hier vorgestellt werden.



3-Unterdreieck

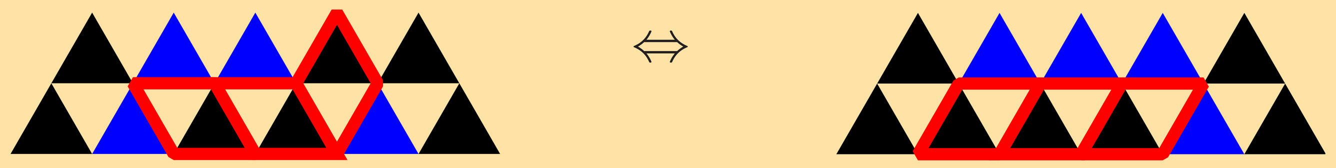
3. Der Tausch entlang eines Pfades

Entlang eines Pfades ungerader Länge kann man eine Pflasterung in eine andere umwandeln.



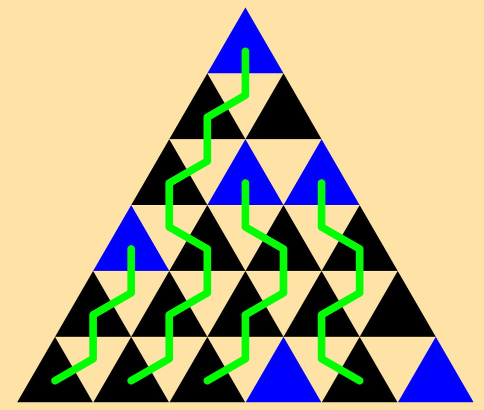
4. Die schnelle Methode: Induktion

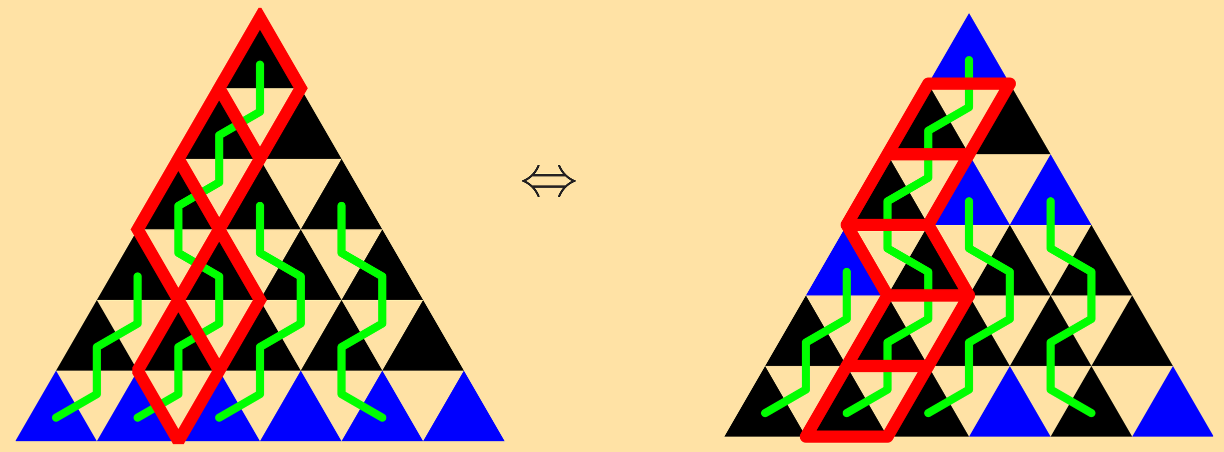
Die Idee ist es, Löcher an einer Seitenkante geschickt mit schwarzen Feldern in der darüberliegenden Reihe zu identifizieren. Ein Tauschen entlang des entstehenden Pfades ermöglicht die Reduktion auf ein kleineres Dreieck.



5. Pfade zur Grundlinie

Wie rechts zu sehen, werden Löcher mit schwarzen Feldern auf der Grundlinie mittels monotoner, überschneidungsfreier Pfade verbunden. Durch einen Tausch entlang der Pfade kann man eine Pflasterung der Standardlöcherung in eine gültige Pflasterung der gegebenen Löcherung umwandeln.
Dass solche überschneidungsfreien Pfade existieren, lässt sich mittels eines Algorithmus mit schrittweiser Verlängerung der Pfade zeigen.

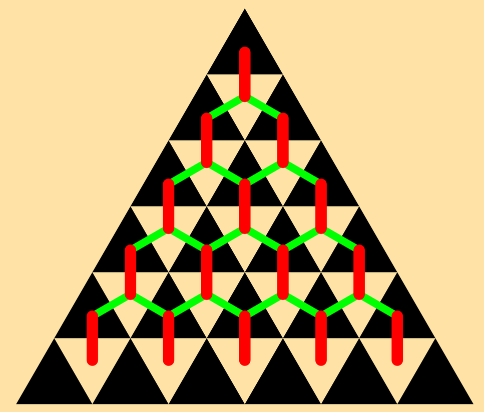




6. Graphen und Perfekte Matchings

Das Brett lässt sich als bipartiter Graph darstellen.

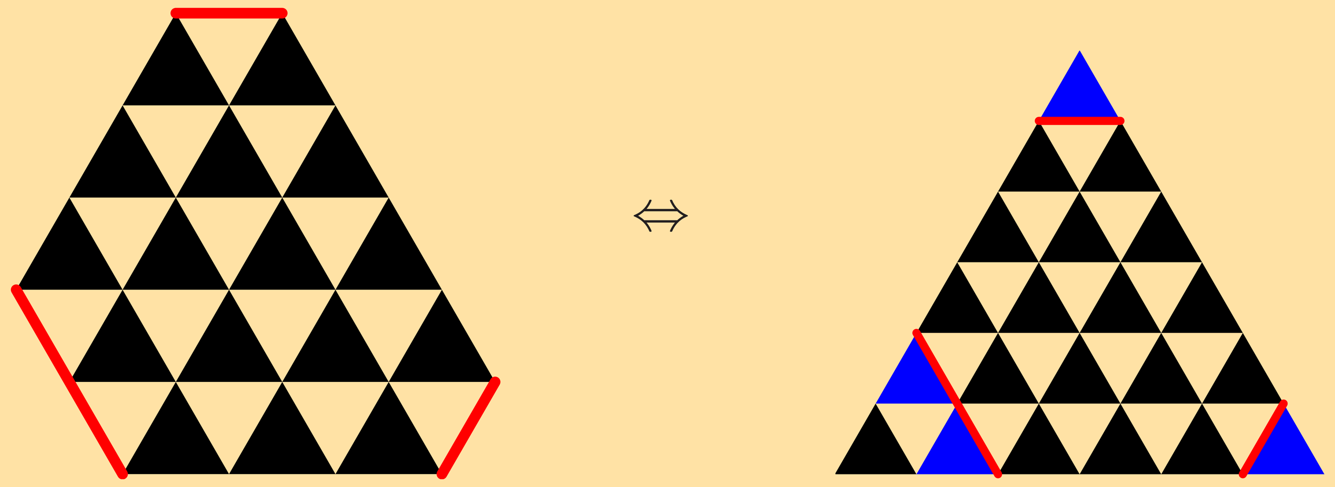
Brett:	Graph:
Feld	Knoten
benachbarte Felder	Kante
Loch	gelöschter Knoten
Raute	Matchingkante
Pflasterung	Matching



Graph und Matching für die generische Pflasterung

Eine Pflasterung, die alle Nichtlöcher überdeckt, entspricht einem perfekten Matching. Mittels des Heiratssatzes von Hall lässt sich die Behauptung nun zeigen.

7. Sechsecke pflastern?



8. Offene Fragen

Bei welcher Anordnung der Löcher ist eine volle Pflasterung eindeutig?
Wieviele volle Pflasterungen gibt es zu einer Löcherung?
Wieviele volle Pflasterungen gibt es in einem n–Brett?