Rhombic Tilings and Holes

Maximilian Werk

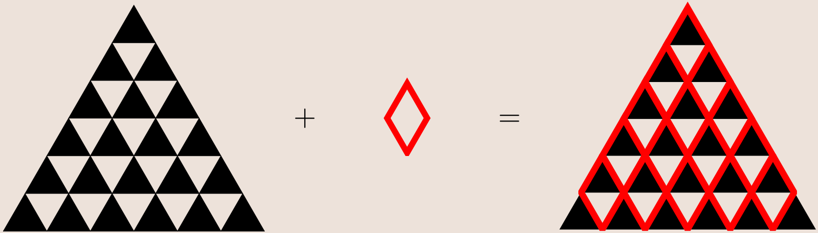
Technische Universität Berlin

29. Januar 2010

Inhaltsverzeichnis

Einführung

Brett & Rhomben

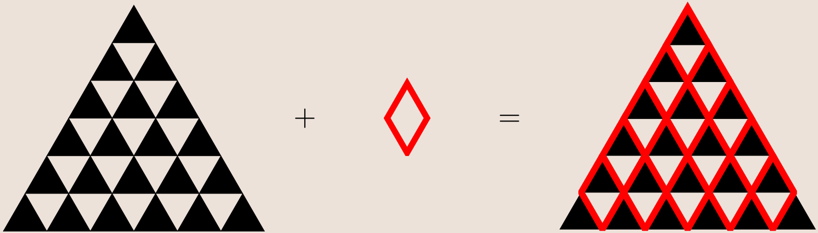


Frage

Wieviel Rhomben passen auf ein Brett der Größe n?

Einführung

Brett & Rhomben



Beobachtung 1

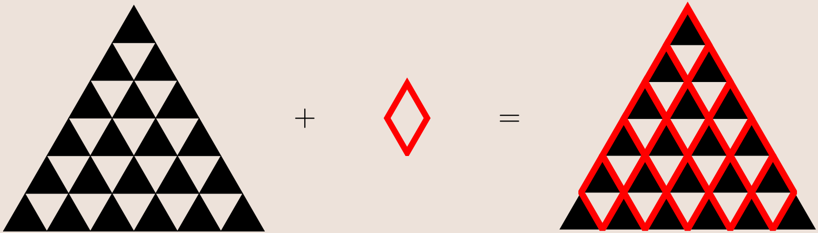
Ein Rhombus überdeckt genau ein schwarzes und ein weißes Feld.

Beobachtung 2

alle weißen Felder überdeckt $\Rightarrow$ maximal viele Rhomben auf dem Brett

Einführung

Brett & Rhomben



Definition "volle Pflasterung"

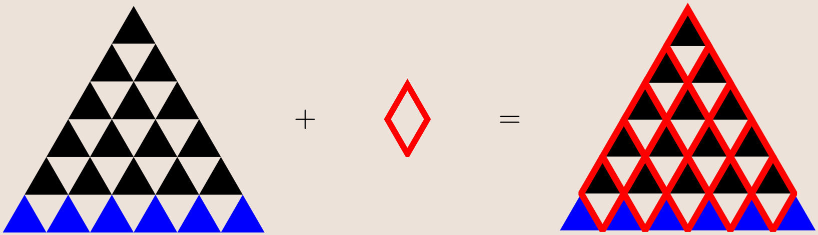
Eine Pflasterung heißt voll, wenn alle weißen Felder überdeckt sind.

Definition: Löcher

Löcher

Schwarze Dreiecke, die nicht von einer Pflasterung überdeckt werden, heißen Löcher.

Beispiel



Beobachtung 3

es existiert eine volle Pflasterung $\Rightarrow$ es gibt genau n schwarze Löcher

Fragen

Gibt es für jede Anordnung von n Löchern eine volle Pflasterung?
Welche Bedingungen muss die Platzierung der Löcher erfüllen, damit es eine volle Pflasterung gibt?

Unterdreiecke

Beobachtung 4

In jedem k–Unterdreieck sind alle Randfelder schwarz.
Ein k–Unterdreieck hat k mehr schwarze als weiße Felder.

Schlussfolgerung

Sind in einem k–Unterdreieck mehr als k Löcher, können nicht alle weißen Felder überdeckt werden.

Notwendiges Kriterium

In jedem k–Unterdreieck sind $\leq k$ Löcher.

Satz

Es existiert eine vollere Pflasterung
$\Leftrightarrow$ In jedem k–Unterdreieck sind $\leq k$ Löcher.

" $\Rightarrow$ " schon gezeigt
Es bleibt zu zeigen " $\Leftarrow$ "

Beweis per Induktion nach n

Induktionsanfang

Folgt für $n = 1$ sofort.

Ziel

Verändere die Position der Löcher in der letzten Zeile so, dass die Induktionsvoraussetzung angewandt werden kann.

Algorithmus

Ausgangsbrett: A

$M = \emptyset$

WHILE ($\exists$ zwei Löcher in der untersten Zeile)

$(x, y) :=$ Löcher am weitesten links in der untersten Zeile
suche gültiges k in der Zeile $n - 1$ zwischen x und y
setze k als Loch
setze x als Nicht-Loch
$M := M \cup (x, k)$

ENDWHILE

Gewonnenes Brett: B

Ergebnis

Beobachtung

$\exists$ gültiges Loch zwischen x und y in jedem Schritt

Ergebnis

Brett mit gültiger Löcherung und einem Loch in unterster Zeile

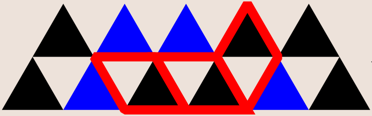
Induktionsvoraussetzung

$\exists$ gültige volle Pflasterung auf dem Brett nach dem Algorithmus

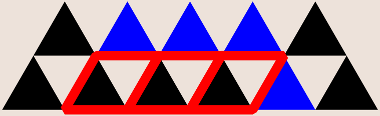
Gewinnen der Pflasterung für das Ausgangsbrett

Betrachen von M

$\forall(x,y) \in M : \exists$ Pfad der folgenden Gestalt:



$\Leftrightarrow$

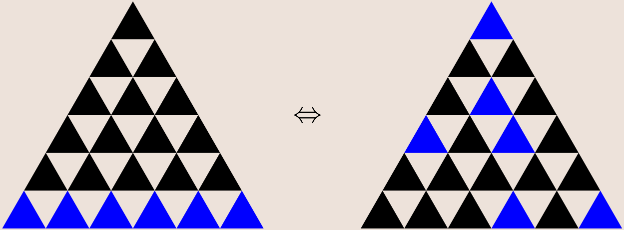


restliche Pflasterung

belasse alle Rhomben oberhalb der $n-2$ten Zeile wie in voller Pflasterung von B

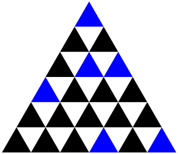
weitere Betrachtungen

eventuelle Idee für einen weiteren Beweis

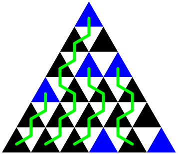


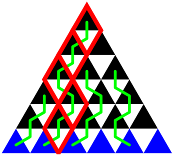
Existieren Pfade von einem Loch in einer beliebigen Löcherung zu den Dreiecken in der untersten Zeile?

Welche Eigenschaften wären schön?

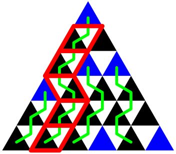


$\Leftrightarrow$

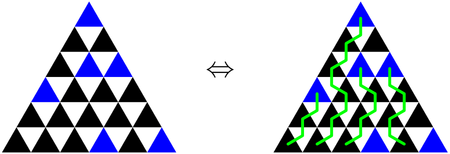


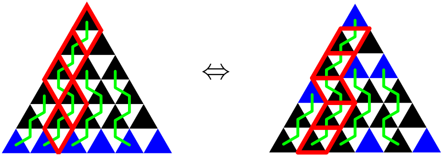


$\Leftrightarrow$



Welche Eigenschaften wären schön?





geforderte Eigenschaften

- Wege disjunkt
- Schritte nach unten bzw. schräg unten
- ein Pfad endet niemals in einem weißen Dreieck

geforderte Eigenschaften

geforderte Eigenschaften

- Wege disjunkt
- Schritte nach unten bzw. schräg unten
- ein Pfad endet niemals in einem weißen Dreieck

Folgerungen

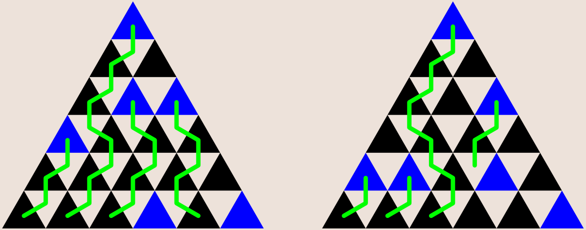
- in weiße Dreiecke kann nur von oben hereingelaufen werden
- wenn ein Pfad in einem schwarzen Dreieck endet, dann in der untersten Zeile
- $\Rightarrow \exists$ volle Pflasterung

Erste Idee

generelles Wegefinden

- volle Unterdreiecke von oben nicht betreten
- immer linkester Weg

Auswahl der Löcher von unten nach oben in $\nearrow$



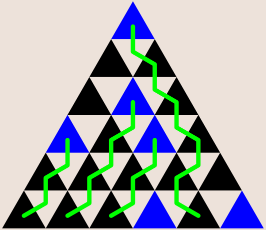
Idee

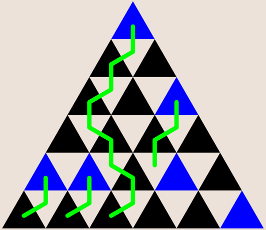
pseudovolle Unterdreiecke

Ein Loch sei ein Pfad. Ein Unterdreieck M der Größe m heißt pseudovoll, wenn

- $\#$ Pfade in $M = m$

Beispiele





Algorithmus Pfadvervollständigung

mache alle Löcher zu Einfelder-Pfaden

WIEDERHOLE (Wähle Pfad, der noch nicht vervollständigt ist mit momentanem Ende möglichst weit links unten)

    verlängere Pfad nach folgender Regel:

        wenn möglich (nicht durch pseudovolles Dreieck blockiert) verlängere: $\downarrow\swarrow$

        ansonsten verlängere: $\downarrow\searrow$

BIS (alle Pfade haben unterste Zeile erreicht)

Dies ist ein guter Algorithmus

geforderte Eigenschaften

- Wege disjunkt
- Schritte nach unten bzw. schräg unten
- ein Pfad endet niemals in einem weißen Dreieck

Behauptung: alle Eigenschaften sind erfüllt.

Dies ist ein guter Algorithmus

geforderte Eigenschaften

- Wege disjunkt
- Schritte nach unten bzw. schräg unten
- ein Pfad endet niemals in einem weißen Dreieck

Behauptung: alle Eigenschaften sind erfüllt.

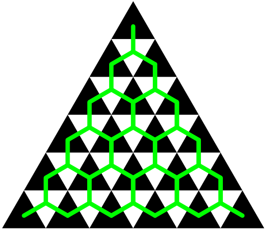
- rechts von neuem Pfad kein alter Pfad

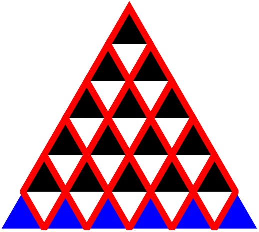
$\Rightarrow$ wenn Pfad in einem weißen Dreieck endet, muss rechts ein volles Dreieck sein

- links: pseudovolles Dreieck

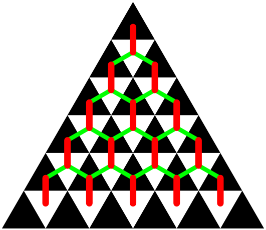
Widerspruch

Perfekte Matchings





$\Rightarrow$



Heiratssatz von Hall

Heiratssatz von Hall

$\exists$ perfektes Matching
$\Leftrightarrow$ für jede Teilmenge weißer Felder $V \subseteq W$ gilt: $|N(V)| \geq |V|$

Wir wissen

Für jedes Unterdreieck der Größe k gilt:

$$\#\text{schwarze Felder} \geq \#\text{weiße Felder}$$

Erkenntnis

geschicktes Betrachten von Zeilen und Spalten liefert benötigte Eigenschaft

Pfaffsche Determinante

$G = (V, E)$ Graph zu einem Brett mit (beliebiger) Orientierung

$A = (a_{ij})$ die zugehörige Adjazenzmatrix

$\mu = \{(i_1, j_1), \ldots, (i_{n/2}, j_{n/2})\}$

$a_\mu = a_{i_1 j_1} \ldots a_{i_{n/2} j_{n/2}}$

(sign $\mu = (-1)^{\#\text{Kreuzungen}}$)

Die Pfaffsche Determinante ist:

$$\mathrm{Pf}(A) = \sum_\mu (\mathrm{sign}\mu) a_\mu$$

Pfaffsche Determinante

Beobachtung

$a_\mu \neq 0 \Leftrightarrow \mu$ ist perfektes Matching

wenn Vorzeichen von (sign $\mu)a_\mu$ gleich für alle perfekten Matchings

$\Rightarrow |\text{Pf}(A)| = \#$ perfekter Matchings in G

G ist planar

$\Rightarrow \exists$ Orientierung mit der gewünschten Eigenschaft

Es wäre zu zeigen:

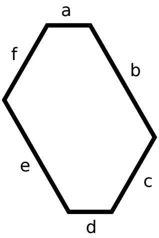
Zeige: det $A \neq 0 \Leftrightarrow$ in jedem k–Unterdreieck sind $\leq k$ Löcher

Sechsecke

Fragen

Wieviel Löcher muss ein voll gepflastertes Sechseck haben?
Gibt es ein ähnliches Kriterium für Sechsecke?

Löcher in Sechsecken

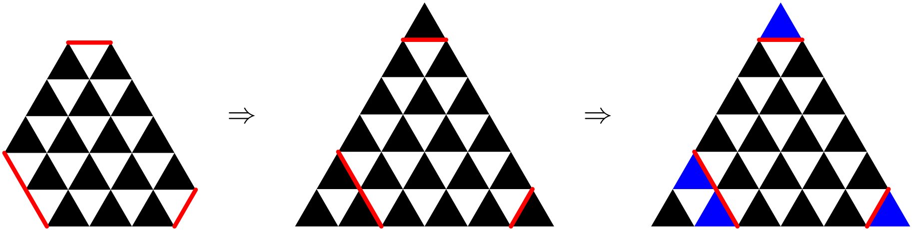


Erkenntnisse

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gilt:

$$f + a + b = c + d + e$$
$$a + c + e \leq b + d + f$$

Löcher in Sechsecken



Kriterium für das Sechseck

In jedem k–Unterdreieck im großen Dreieck dürfen maximal k Löcher sein. Auswahl der Seiten mit kleinerer Gesamtsumme $\Rightarrow$ im Sechseck sind

$$c + d + e - a - c - e = d - a$$

Dreiecke.

Offene Fragen

- Wieviele volle Pflasterungen gibt es zu einer gegebenen Löcherung?
- Wieviele volle Pflasterungen gibt es in einem n–Brett?
- Bei welcher Anordnung der Löcher ist eine volle Pflasterung eindeutig?
- Wie effizient lassen sich volle Pflasterungen zu einer gegebenen Löcherung berechnen?

Ende der Präsentation

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit

Fragen?

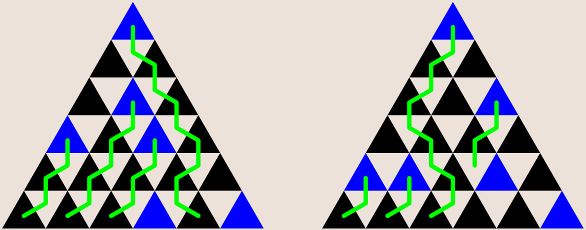
Idee

pseudovolle Unterdreiecke

Ein Loch sei ein Pfad. Ein Unterdreieck M der Größe m heißt pseudovoll, wenn

- l Anzahl der Pfade in $M = m$

Beispiele



Algorithmus

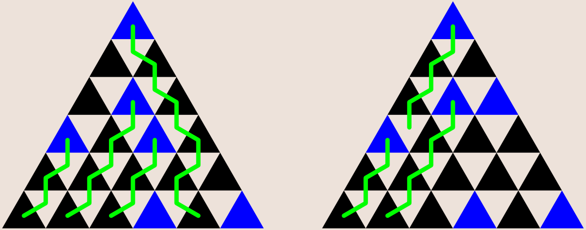
WIEDERHOLE (wähle Loch von unten nach oben in $\nearrow$)

erzeuge Pfad nach folgender Regel:

- nur Schritte nach unten bzw. schräg unten sind erlaubt
- pseudovolle Unterdreiecke dürfen von oben nicht betreten werden
- es wird immer der linkeste Weg genommen (Schritte nur nach unten und schräg unten)
- Abbruch, wenn unterste Zeile erreicht

BIS (alle Löcher abgearbeitet)

Auswahl der Löcher von links nach rechts in $\searrow$



Problem!