



Tilings

Exact Enumeration

Veit Wiechert, Kristian Dannowski

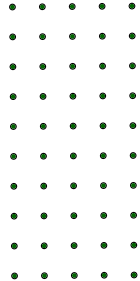
30. April 2010



Einleitung

Historisches zu Domino-Tilings

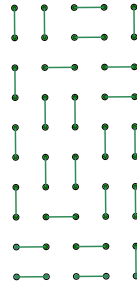
- ▶ es gibt eine Verbindung zwischen Domino-Tilings und der Chemie.
Stichwort: Monomeren, Dimeren, Trimeren



Einleitung

Historisches zu Domino-Tilings

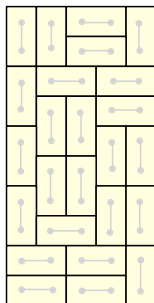
- ▶ es gibt eine Verbindung zwischen Domino-Tilings und der Chemie.
Stichwort: Monomeren, Dimeren, Trimeren
- ▶ Spezialfall ist rechteckiges Gitter bestehend aus Dimeren



Einleitung

Historisches zu Domino-Tilings

- ▶ es gibt eine Verbindung zwischen Domino-Tilings und der Chemie.
Stichwort: Monomeren, Dimeren, Trimeren
- ▶ Spezialfall ist rechteckiges Gitter bestehend aus Dimeren
- ▶ jede solche Anordnung gibt uns ein Domino-Tiling und umgekehrt
- ▶ Frage: Wie viele solche Anordnungen bestehend aus Dimeren gibt es

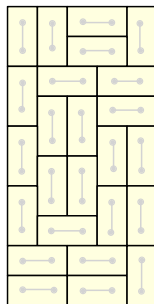




Einleitung

Historisches zu Domino-Tilings

- ▶ es gibt eine Verbindung zwischen Domino-Tilings und der Chemie.
Stichwort: Monomeren, Dimeren, Trimeren
- ▶ Spezialfall ist rechteckiges Gitter bestehend aus Dimeren
- ▶ jede solche Anordnung gibt uns ein Domino-Tiling und umgekehrt
- ▶ Frage: Wie viele solche Anordnungen bestehend aus Dimeren gibt es
- ▶ äquivalent: Wie viele Domino-Tilings hat das Rechteck?





Einleitung

Historisches zu Domino-Tilings

P.W. Kasteleyn und M.E. Fisher fanden 1961 unabhängig voneinander die Anzahl der Domino-Tilings für ein $2n \times 2m$ -Rechteck. Sie ist

$$4^{mn} \prod_{j=1}^m \prod_{k=1}^n \left(\cos^2 \frac{j\pi}{2m+1} + \cos^2 \frac{k\pi}{2n+1} \right)$$



Einleitung

Historisches zu Domino-Tilings

P.W. Kasteleyn und M.E. Fisher fanden 1961 unabhängig voneinander die Anzahl der Domino-Tilings für ein $2n \times 2m$ -Rechteck. Sie ist

$$4^{mn} \prod_{j=1}^m \prod_{k=1}^n \left(\cos^2 \frac{j\pi}{2m+1} + \cos^2 \frac{k\pi}{2n+1} \right)$$

Der nächste große Meilenstein in Bezug auf Domino-Tilings gelang Noam Elkies, Greg Kuperberg, Michael Larsen und James Propp als sie 1992 die Anzahl der Domino-Tilings des Aztekischen Diamanten bestimmten.



Der Aztekische Diamant

Definition

- ▶ Der Aztekische Diamant der Ordnung n , bezeichnet mit AD_n , ist die Vereinigung aller Einheitsquadrate, die durch die Punkte $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ mit der Eigenschaft $|x| + |y| \leq n + 1$ begrenzt werden.



Der Aztekische Diamant

Definition

- ▶ Der Aztekische Diamant der Ordnung n , bezeichnet mit AD_n , ist die Vereinigung aller Einheitsquadrate, die durch die Punkte $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ mit der Eigenschaft $|x| + |y| \leq n + 1$ begrenzt werden.
- ▶ ein Domino ist ein 1×2 bzw. ein 2×1 -Rechteck



Der Aztekische Diamant

Definition

- ▶ Der Aztekische Diamant der Ordnung n , bezeichnet mit AD_n , ist die Vereinigung aller Einheitsquadrate, die durch die Punkte $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ mit der Eigenschaft $|x| + |y| \leq n + 1$ begrenzt werden.
- ▶ ein Domino ist ein 1×2 bzw. ein 2×1 -Rechteck
- ▶ eine Parkettierung (tiling) von AD_n ist eine Vereinigung von nicht überlappenden Dominos, die AD_n vollständig bedecken



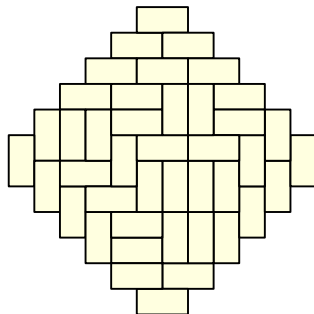
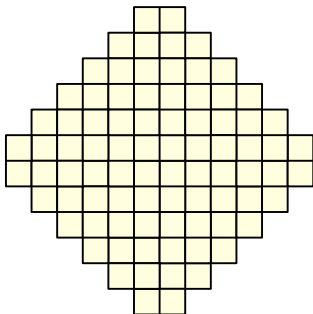
Der Aztekische Diamant

Definition

- ▶ Der Aztekische Diamant der Ordnung n , bezeichnet mit AD_n , ist die Vereinigung aller Einheitsquadrate, die durch die Punkte $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ mit der Eigenschaft $|x| + |y| \leq n + 1$ begrenzt werden.
- ▶ ein Domino ist ein 1×2 bzw. ein 2×1 -Rechteck
- ▶ eine Parkettierung (tiling) von AD_n ist eine Vereinigung von nicht überlappenden Dominos, die AD_n vollständig bedecken
- ▶ die Anzahl der Parkettierungen von AD_n wird mit $AD(n)$ bezeichnet

Beispiel

Beispiel des AD_6 und eines Tilings des AD_6 .





Aztec Diamond Theorem

Theorem

$$AD(n) = 2^{n(n+1)/2} \quad (\text{Elkies, Kuperberg, Larson, Propp})$$

Dies wollen wir im folgenden beweisen



Schröder-Pfade

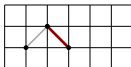
Große Schröder-Pfade der Länge n sind Gitterpfade in \mathbb{Z}^2 mit den Eigenschaften:

- ▶ Pfad startet in $(0, 0)$ und endet in $(2n, 0)$

Schröder-Pfade

Große Schröder-Pfade der Länge n sind Gitterpfade in \mathbb{Z}^2 mit den Eigenschaften:

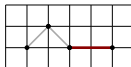
- ▶ Pfad startet in $(0, 0)$ und endet in $(2n, 0)$
- ▶ benutzt
 - ▶ up steps $(1, 1)$
 - ▶ down steps $(1, -1)$



Schröder-Pfade

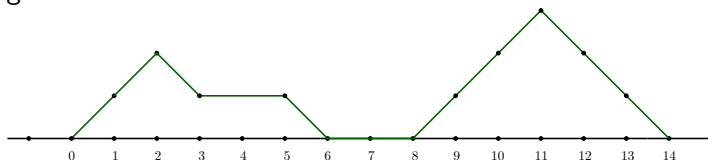
Große Schröder-Pfade der Länge n sind Gitterpfade in \mathbb{Z}^2 mit den Eigenschaften:

- ▶ Pfad startet in $(0, 0)$ und endet in $(2n, 0)$
- ▶ benutzt
 - ▶ up steps $(1, 1)$
 - ▶ down steps $(1, -1)$
 - ▶ level steps $(2, 0)$
- ▶ Pfad verläuft nie unterhalb der x -Achse

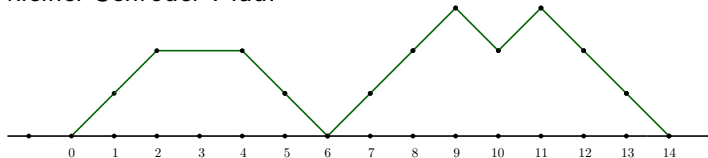


Beispiele

großer Schröder-Pfad:



kleiner Schröder-Pfad:





Sei nun Π_n die Menge der n -Tupel $(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)$ von n großen Schröder-Pfaden mit den Eigenschaften

- ▶ Pfad π_i startet in $(-(2i - 1), 0)$ und endet in $(2i - 1, 0)$



Sei nun Π_n die Menge der n -Tupel $(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)$ von n großen Schröder-Pfaden mit den Eigenschaften

- ▶ Pfad π_i startet in $(-(2i-1), 0)$ und endet in $(2i-1, 0)$
- ▶ π_i und π_j schneiden sich nicht (für alle i, j mit $i \neq j$)



Sei nun Π_n die Menge der n -Tupel $(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)$ von n großen Schröder-Pfaden mit den Eigenschaften

- ▶ Pfad π_i startet in $(-(2i-1), 0)$ und endet in $(2i-1, 0)$
- ▶ π_i und π_j schneiden sich nicht (für alle i, j mit $i \neq j$)

Ganz analog sei Ω_n die Menge der n -Tupel von kleinen Schröder-Pfaden mit eben genannten Eigenschaften



Proposition

Es gilt

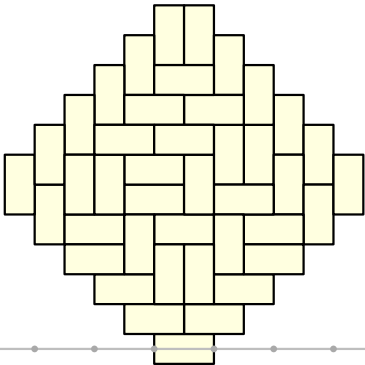
$$|\Pi_n| = AD(n)$$

Beweis.

Veranschaulichen wir die Bijektion erst einmal durch ein Beispiel und werden dann etwas formaler

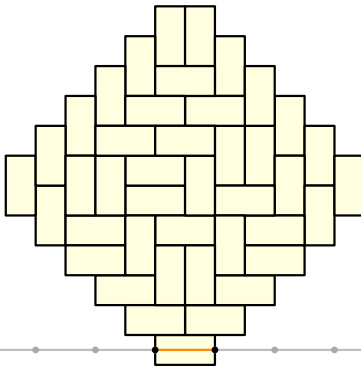
Beispiel

Das Tiling gibt uns ein Tupel von Pfaden:



Beispiel

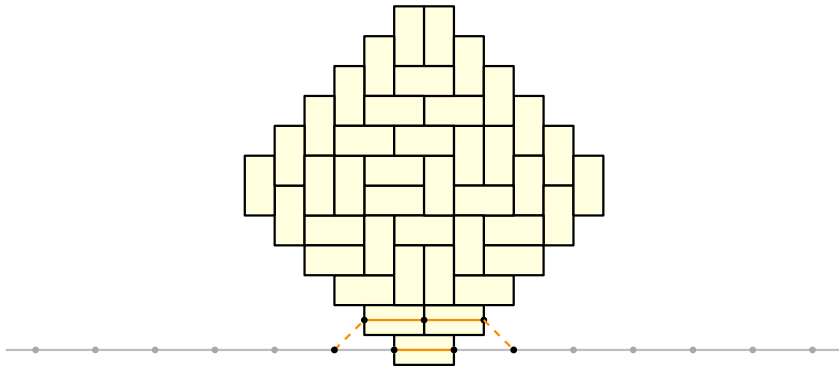
Das Tiling gibt uns ein Tupel von Pfaden:





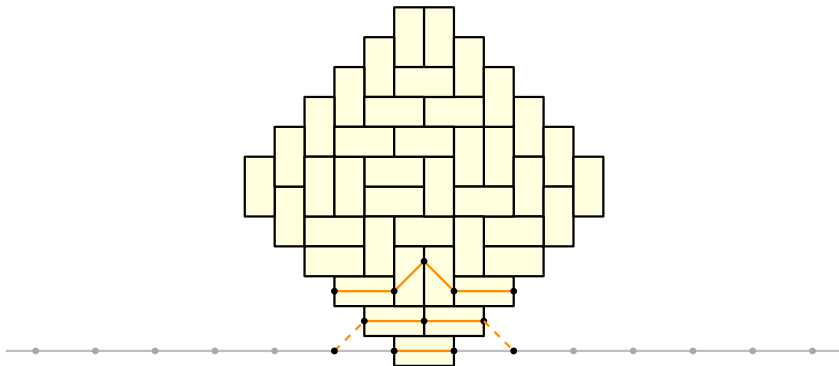
Beispiel

Das Tiling gibt uns ein Tupel von Pfaden:



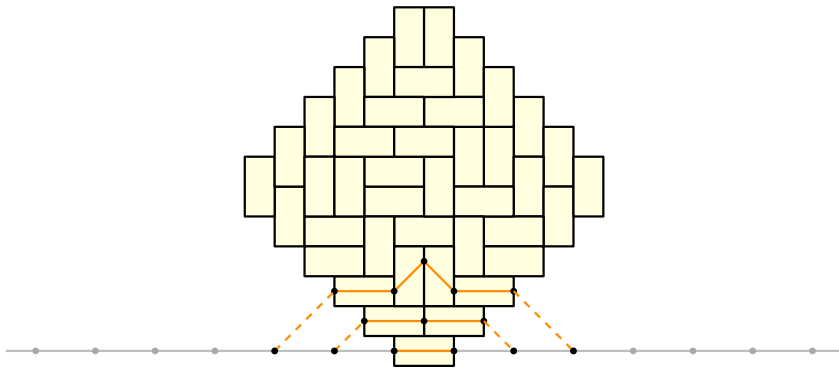
Beispiel

Das Tiling gibt uns ein Tupel von Pfaden:



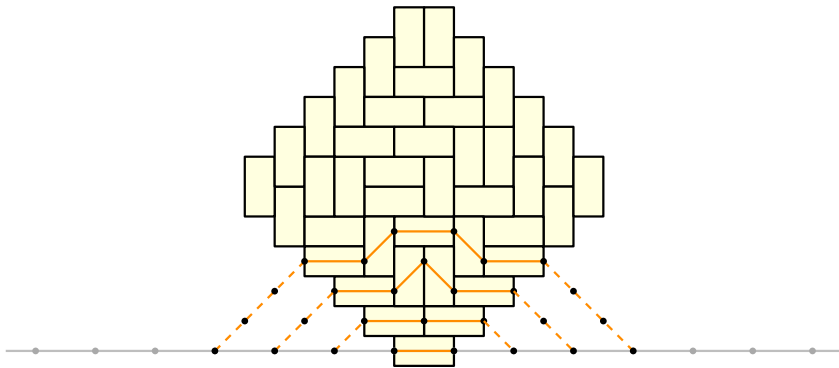
Beispiel

Das Tiling gibt uns ein Tupel von Pfaden:



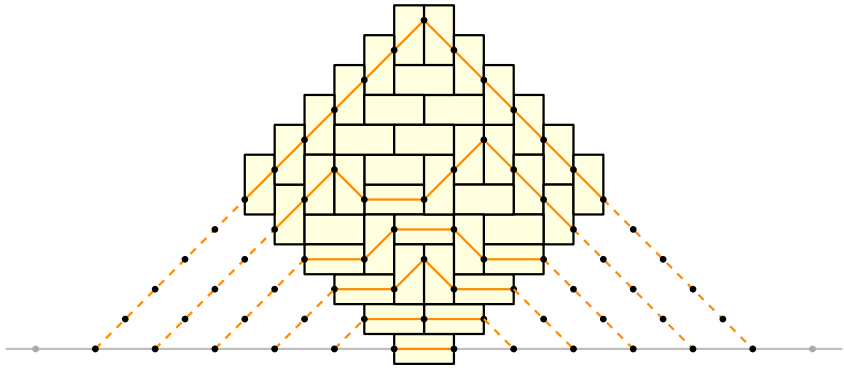
Beispiel

Das Tiling gibt uns ein Tupel von Pfaden:



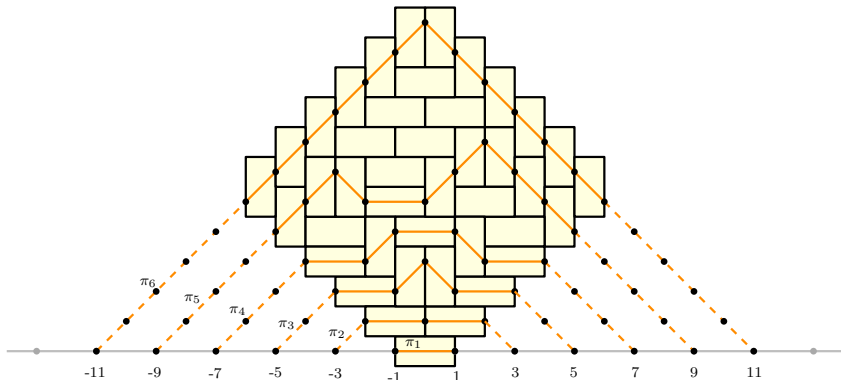
Beispiel

Das Tiling gibt uns ein Tupel von Pfaden:



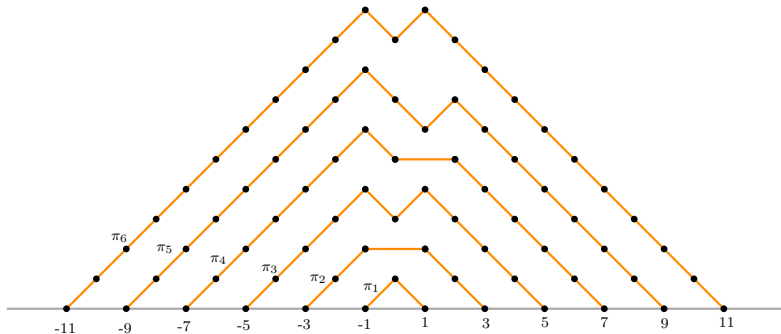
Beispiel

Das Tiling gibt uns ein Tupel von Pfaden:



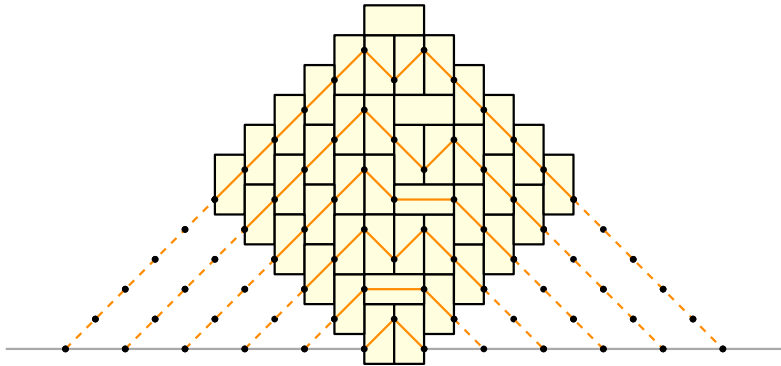
Beispiel

Das Ganze jetzt umgekehrt:



Beispiel

Das Ganze jetzt umgekehrt:





Formale Ergänzung:

Wir indizieren die Zeilen von AD_n von unten beginnend mit $1, 2, \dots, 2n$. Wir definieren uns jetzt Pfad π_i für $1 \leq i \leq n$ wie folgt:

- ▶ in der Zeile i beginnen wir mit unserem Pfad am ganz links liegenden Domino im Zentrum seiner linken Seite (wobei Seiten Länge 1 haben).



Formale Ergänzung:

Wir indizieren die Zeilen von AD_n von unten beginnend mit $1, 2, \dots, 2n$. Wir definieren uns jetzt Pfad π_i für $1 \leq i \leq n$ wie folgt:

- ▶ in der Zeile i beginnen wir mit unserem Pfad am ganz links liegenden Domino im Zentrum seiner linken Seite (wobei Seiten Länge 1 haben).
- ▶ Pfad geht zu dem Punkt, der nun punktsymmetrisch zum Mittelpunkt des Dominos liegt



Formale Ergänzung:

Wir indizieren die Zeilen von AD_n von unten beginnend mit $1, 2, \dots, 2n$. Wir definieren uns jetzt Pfad π_i für $1 \leq i \leq n$ wie folgt:

- ▶ in der Zeile i beginnen wir mit unserem Pfad am ganz links liegenden Domino im Zentrum seiner linken Seite (wobei Seiten Länge 1 haben).
- ▶ Pfad geht zu dem Punkt, der nun punktsymmetrisch zum Mittelpunkt des Dominos liegt
- ▶ dieser Punkt ist wiederum Zentrum einer linken Seite eines Dominos



Formale Ergänzung:

Wir indizieren die Zeilen von AD_n von unten beginnend mit $1, 2, \dots, 2n$. Wir definieren uns jetzt Pfad π_i für $1 \leq i \leq n$ wie folgt:

- ▶ in der Zeile i beginnen wir mit unserem Pfad am ganz links liegenden Domino im Zentrum seiner linken Seite (wobei Seiten Länge 1 haben).
- ▶ Pfad geht zu dem Punkt, der nun punktsymmetrisch zum Mittelpunkt des Dominos liegt
- ▶ dieser Punkt ist wiederum Zentrum einer linken Seite eines Dominos
- ▶ springe wieder punktsymmetrisch und wiederhole dies, bis der Pfad am rechten Rand des AD_n angelangt



- ▶ füge $i - 1$ up-steps an den Anfang des Pfades und $i - 1$ down-steps an das Ende



- ▶ füge $i - 1$ up-steps an den Anfang des Pfades und $i - 1$ down-steps an das Ende
- ▶ Startpunkt des Pfades setzen wir auf A_i und Endpunkt auf B_i

- ▶ füge $i - 1$ up-steps an den Anfang des Pfades und $i - 1$ down-steps an das Ende
- ▶ Startpunkt des Pfades setzen wir auf A_i und Endpunkt auf B_i

Die Pfade die wir erhalten bilden ein n -Tupel von sich paarweise nicht schneidenden Pfaden und sind ein Element aus Π_n .

Wir können diese Abbildung aber auch umkehren. Fangen wir also mit einem n -Tupel (π_1, \dots, π_n) aus Π_n an, so beginnt Pfad π_i immer mit $i - 1$ up-steps und endet mit $i - 1$ down-steps. Wir drehen die Prozedur von eben nun um und ersetzen die restlichen steps des Pfades mit dem entsprechenden Domino. Dies machen wir mit allen Pfaden. Entsteht am Ende noch kein vollständiger AD_n , so kann man eindeutig mit Dominosteinen auffüllen, sodass wir ein Tiling des AD_n erhalten.



Proposition

Für $n \geq 2$ gilt

$$|\Pi_{n-1}| = |\Omega_n|$$



Proposition

Für $n \geq 2$ gilt

$$|\Pi_{n-1}| = |\Omega_n|$$

Beweis.

Wir werden dies mittels einer Bijektion zeigen.

Man kann einen Schröder-Pfad als Folge der Buchstaben **U** (up-step), **D** (down-step) und **L** (level-step) schreiben.

Sei nun $(\pi_1, \dots, \pi_{n-1}) \in \Pi_{n-1}$. Dieses Tupel bilden wir ab auf $(\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega_n$ wobei

▶ $\omega_1 = \mathbf{UD}$



Proposition

Für $n \geq 2$ gilt

$$|\Pi_{n-1}| = |\Omega_n|$$

Beweis.

Wir werden dies mittels einer Bijektion zeigen.

Man kann einen Schröder-Pfad als Folge der Buchstaben **U** (up-step), **D** (down-step) und **L** (level-step) schreiben.

Sei nun $(\pi_1, \dots, \pi_{n-1}) \in \Pi_{n-1}$. Dieses Tupel bilden wir ab auf $(\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega_n$ wobei

- ▶ $\omega_1 = \mathbf{UD}$
- ▶ $\omega_i = \mathbf{UU}\pi_{i-1}\mathbf{DD}$, wenn $i = 2, \dots, n$



Haben wir umgekehrt ein Tupel $(\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega_n$, so gilt dass

1. $\omega_1 = \mathbf{UD}$
(ω_1 darf kein level-step sein)



Haben wir umgekehrt ein Tupel $(\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega_n$, so gilt dass

1. $\omega_1 = \mathbf{UD}$
(ω_1 darf kein level-step sein)
2. ω_i beginnt mit \mathbf{UU} und endet mit \mathbf{DD} , wenn $i = 2, \dots, n$
(die ω_i schneiden sich paarweise nicht)

Haben wir umgekehrt ein Tupel $(\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega_n$, so gilt dass

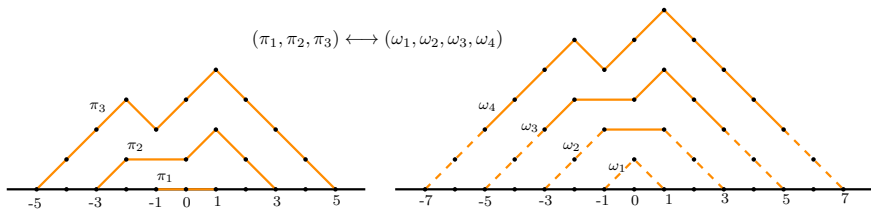
1. $\omega_1 = \mathbf{UD}$
(ω_1 darf kein level-step sein)
2. ω_i beginnt mit \mathbf{UU} und endet mit \mathbf{DD} , wenn $i = 2, \dots, n$
(die ω_i schneiden sich paarweise nicht)

Entfernen wir ω_1 aus dem Tupel und entfernen bei den restlichen ω_i die steps \mathbf{UU} vom Anfang und \mathbf{DD} vom Ende, so erhalten wir wieder ein $(n-1)$ -Tupel aus Π_{n-1} .

Das dies tatsächlich eine Bijektion ist, sollte durch folgendes Beispiel klar werden.



Beispiel





Sei nun

$r_n :=$ Anzahl großer Schröder-Pfade der Länge n

$s_n :=$ Anzahl kleiner Schröder-Pfade der Länge n



Sei nun

$r_n :=$ Anzahl großer Schröder-Pfade der Länge n

$s_n :=$ Anzahl kleiner Schröder-Pfade der Länge n

Es gilt nun folgende

Proposition

$$r_n = 2s_n \quad \text{für } n \geq 1$$



Beweis.

Mittels erzeugenden Funktionen.

Seien $R(x) = \sum_{i=0}^{\infty} r_i x^i$ und $S(x) = \sum_{i=0}^{\infty} s_i x^i$ die erzeugenden Funktionen.

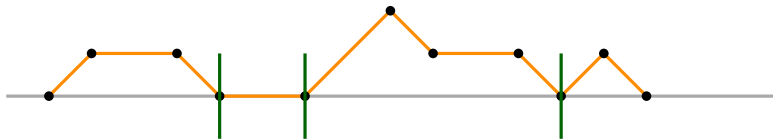
Beweis.

Mittels erzeugenden Funktionen.

Seien $R(x) = \sum_{i=0}^{\infty} r_i x^i$ und $S(x) = \sum_{i=0}^{\infty} s_i x^i$ die erzeugenden Funktionen.

Wir können nun jeden Schröder-Pfad eindeutig in Prim-Pfade zerlegen. Diese sind entweder

- ▶ level-steps auf der x-Achse, oder
- ▶ Pfade die nur am Start- und Endpunkt die x-Achse berühren





Bezeichnen wir mit p_n die Anzahl der Prim-Pfade der Länge n , so gilt:

▶ $p_1 = r_1 = 1 + r_0$



Bezeichnen wir mit p_n die Anzahl der Prim-Pfade der Länge n , so gilt:

- ▶ $p_1 = r_1 = 1 + r_0$
- ▶ $p_n = r_{n-1}$ für $n \geq 2$



Bezeichnen wir mit p_n die Anzahl der Prim-Pfade der Länge n , so gilt:

$$\blacktriangleright p_1 = r_1 = 1 + r_0$$

$$\blacktriangleright p_n = r_{n-1} \quad \text{für } n \geq 2$$

Ist $P(x) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i x^i$, so gilt damit

$$P(x) = x + xR(x)$$



Bezeichnen wir mit p_n die Anzahl der Prim-Pfade der Länge n , so gilt:

- ▶ $p_1 = r_1 = 1 + r_0$
- ▶ $p_n = r_{n-1}$ für $n \geq 2$

Ist $P(x) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i x^i$, so gilt damit

$$P(x) = x + xR(x)$$

Die Anzahl der großen Schröder-Pfade der Länge n mit k Prim-Pfaden ist

$$\sum_{\substack{i_1, \dots, i_k \\ i_1 + \dots + i_k = n}} p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_k}$$



Somit können wir r_n schreiben als

$$r_n = p_n + \sum_{\substack{i,j \\ i+j=n}} p_i p_j + \sum_{\substack{i,j,k \\ i+j+k=n}} p_i p_j p_k + \dots + \sum_{\substack{i_1, \dots, i_n \\ i_1 + \dots + i_n = n}} p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_n}$$



Somit können wir r_n schreiben als

$$r_n = p_n + \sum_{\substack{i,j \\ i+j=n}} p_i p_j + \sum_{\substack{i,j,k \\ i+j+k=n}} p_i p_j p_k + \dots + \sum_{\substack{i_1, \dots, i_n \\ i_1 + \dots + i_n = n}} p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_n}$$

Andererseits ist der Koeffizient von x^n in $P(x)^k$ gleich

$$\sum_{\substack{i_1, \dots, i_k \\ i_1 + \dots + i_k = n}} p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_k}$$



Somit können wir r_n schreiben als

$$r_n = p_n + \sum_{\substack{i,j \\ i+j=n}} p_i p_j + \sum_{\substack{i,j,k \\ i+j+k=n}} p_i p_j p_k + \dots + \sum_{\substack{i_1, \dots, i_n \\ i_1 + \dots + i_n = n}} p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_n}$$

Andererseits ist der Koeffizient von x^n in $P(x)^k$ gleich

$$\sum_{\substack{i_1, \dots, i_k \\ i_1 + \dots + i_k = n}} p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_k}$$

Also folgt $R(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P(x)^k$



Somit können wir r_n schreiben als

$$r_n = p_n + \sum_{\substack{i,j \\ i+j=n}} p_i p_j + \sum_{\substack{i,j,k \\ i+j+k=n}} p_i p_j p_k + \dots + \sum_{\substack{i_1, \dots, i_n \\ i_1 + \dots + i_n = n}} p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_n}$$

Andererseits ist der Koeffizient von x^n in $P(x)^k$ gleich

$$\sum_{\substack{i_1, \dots, i_k \\ i_1 + \dots + i_k = n}} p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_k}$$

Also folgt $R(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P(x)^k$ und insgesamt

$$R(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (x + xR(x))^k = \frac{1}{1 - x - xR(x)} \quad (1)$$



Somit können wir r_n schreiben als

$$r_n = p_n + \sum_{\substack{i,j \\ i+j=n}} p_i p_j + \sum_{\substack{i,j,k \\ i+j+k=n}} p_i p_j p_k + \dots + \sum_{\substack{i_1, \dots, i_n \\ i_1 + \dots + i_n = n}} p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_n}$$

Andererseits ist der Koeffizient von x^n in $P(x)^k$ gleich

$$\sum_{\substack{i_1, \dots, i_k \\ i_1 + \dots + i_k = n}} p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_k}$$

Also folgt $R(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P(x)^k$ und insgesamt

$$R(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (x + xR(x))^k = \frac{1}{1 - x - xR(x)} \quad (1)$$

Analog folgt für $S(x)$:

$$S(x) = \frac{1}{1 - xR(x)}$$



Schreiben wir (1) als

$$R(x)(1 - x - xR(x)) = 1$$



Schreiben wir (1) als

$$R(x)(1 - x - xR(x)) = 1$$

so gilt

$$R(x)(1 - xR(x)) = 1 + xR(x)$$

Schreiben wir (1) als

$$R(x)(1 - x - xR(x)) = 1$$

so gilt

$$R(x)(1 - xR(x)) = 1 + xR(x)$$

und folglich

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{1 + xR(x)}{1 - xR(x)} \\ &= \frac{1}{1 - xR(x)} + \frac{xR(x)}{1 - xR(x)} \\ &= \frac{1}{1 - xR(x)} + \left(\frac{1}{1 - xR(x)} - 1 \right) \\ &= 2S(x) - 1 \end{aligned}$$

Schreiben wir (1) als

$$R(x)(1 - x - xR(x)) = 1$$

so gilt

$$R(x)(1 - xR(x)) = 1 + xR(x)$$

und folglich

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{1 + xR(x)}{1 - xR(x)} \\ &= \frac{1}{1 - xR(x)} + \frac{xR(x)}{1 - xR(x)} \\ &= \frac{1}{1 - xR(x)} + \left(\frac{1}{1 - xR(x)} - 1 \right) \\ &= 2S(x) - 1 \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert nun die Behauptung





Wir definieren uns nun zwei Matrizen mit Schröder-Zahlen:

$$H_n := \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & \cdots & r_n \\ r_2 & r_3 & \cdots & r_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_n & r_{n+1} & \cdots & r_{2n-1} \end{bmatrix}, \quad G_n := \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & \cdots & s_n \\ s_2 & s_3 & \cdots & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n-1} \end{bmatrix}$$



Wir definieren uns nun zwei Matrizen mit Schröder-Zahlen:

$$H_n := \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & \cdots & r_n \\ r_2 & r_3 & \cdots & r_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_n & r_{n+1} & \cdots & r_{2n-1} \end{bmatrix}, \quad G_n := \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & \cdots & s_n \\ s_2 & s_3 & \cdots & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n-1} \end{bmatrix}$$

Da $r_n = 2s_n$ gilt, folgt sofort

► $H_n = 2G_n$



Wir definieren uns nun zwei Matrizen mit Schröder-Zahlen:

$$H_n := \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & \cdots & r_n \\ r_2 & r_3 & \cdots & r_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_n & r_{n+1} & \cdots & r_{2n-1} \end{bmatrix}, \quad G_n := \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & \cdots & s_n \\ s_2 & s_3 & \cdots & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n-1} \end{bmatrix}$$

Da $r_n = 2s_n$ gilt, folgt sofort

- ▶ $H_n = 2G_n$
- ▶ $\det(H_n) = 2^n \det(G_n)$



Proposition

Für $n \geq 1$ gilt

1. $|\Pi_n| = \det(H_n)$
2. $|\Omega_n| = \det(G_n)$



Proposition

Für $n \geq 1$ gilt

1. $|\Pi_n| = \det(H_n)$
2. $|\Omega_n| = \det(G_n)$

Beweis.

Sei

- ▶ A_i der Punkt $-(2i - 1), 0$ und B_i der Punkt $(2i - 1, 0)$



Proposition

Für $n \geq 1$ gilt

1. $|\Pi_n| = \det(H_n)$
2. $|\Omega_n| = \det(G_n)$

Beweis.

Sei

- ▶ A_i der Punkt $-(2i - 1), 0$ und B_i der Punkt $(2i - 1, 0)$
- ▶ h_{ij} der (i, j) -Eintrag von H_n

Proposition

Für $n \geq 1$ gilt

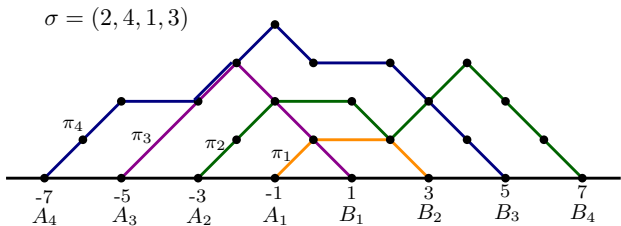
1. $|\Pi_n| = \det(H_n)$
2. $|\Omega_n| = \det(G_n)$

Beweis.

Sei

- ▶ A_i der Punkt $-(2i - 1), 0$ und B_i der Punkt $(2i - 1, 0)$
- ▶ h_{ij} der (i, j) -Eintrag von H_n
- ▶ P die Menge der Paare $(\sigma, (\pi_1, \dots, \pi_n))$
wobei σ eine Permutation von $\{1, \dots, n\}$ ist und
 (π_1, \dots, π_n) ein n -Tupel von großen Schröder-Pfaden so
dass π_i von A_i nach $B_{\sigma(i)}$ geht.

Beispiel





Damit gilt dann

$h_{i,j} = r_{i+j-1}$ entspricht der Anzahl der großen Schröder-Pfade von A_i nach B_j



Damit gilt dann

$h_{i,j} = r_{i+j-1}$ entspricht der Anzahl der großen Schröder-Pfade von A_i nach B_j und

$$|P| = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^n h_{i,\sigma(i)}$$



Damit gilt dann

$h_{i,j} = r_{i+j-1}$ entspricht der Anzahl der großen Schröder-Pfade von A_i nach B_j und

$$|P| = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^n h_{i, \sigma(i)}$$

Jeder Permutation σ können wir ein Signum zuordnen:

$$\text{sgn}(\sigma) = (-1)^{\text{inv}(\sigma)}$$

wobei $\text{inv}(\sigma) = |\{(i, j) | i < j \text{ und } \sigma(i) > \sigma(j)\}|$

die Anzahl der Inversionen von σ ist.



Je nach dem Signum der Permutation σ partitionieren wir die n -Tupel aus P in die Mengen P^+ und P^-



Je nach dem Signum der Permutation σ partitionieren wir die n -Tupel aus P in die Mengen P^+ und P^- . Damit folgt

$$\begin{aligned}
 \det(H_n) &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n h_{i,\sigma(i)} \\
 &= \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \operatorname{sgn}(\sigma)=1}} \prod_{i=1}^n h_{i,\sigma(i)} - \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \operatorname{sgn}(\sigma)=-1}} \prod_{i=1}^n h_{i,\sigma(i)} \\
 &= |P^+| - |P^-|
 \end{aligned}$$



Nun konstruieren wir uns ein Involution ϕ auf P .

Sei p ein Element aus P , wo sich die Pfade paarweise nicht schneiden. Dann setzen wir

$$\phi(p) = p \quad p \text{ ist also Fixpunkt von } \phi$$

Nun konstruieren wir uns ein Involution ϕ auf P .

Sei p ein Element aus P , wo sich die Pfade paarweise nicht schneiden. Dann setzen wir

$$\phi(p) = p \quad p \text{ ist also Fixpunkt von } \phi$$

Ist $q = (\sigma, (\pi_1, \dots, \pi_n))$ ein Element aus P mit sich schneidenden Pfaden, so wähle das lexikographisch kleinste Paar $i < j$ so dass sich Pfad π_i und π_j schneiden.

Nun konstruieren wir uns ein Involution ϕ auf P .

Sei p ein Element aus P , wo sich die Pfade paarweise nicht schneiden. Dann setzen wir

$$\phi(p) = p \quad p \text{ ist also Fixpunkt von } \phi$$

Ist $q = (\sigma, (\pi_1, \dots, \pi_n))$ ein Element aus P mit sich schneidenden Pfaden, so wähle das lexikographisch kleinste Paar $i < j$ so dass sich Pfad π_i und π_j schneiden. Am letzten Schnittpunkt der Pfade tauschen wir die Enden aus und erhalten die Pfade

- ▶ π'_i , startet in A_j und endet in $B_{\sigma(j)}$

Nun konstruieren wir uns ein Involution ϕ auf P .

Sei p ein Element aus P , wo sich die Pfade paarweise nicht schneiden. Dann setzen wir

$$\phi(p) = p \quad p \text{ ist also Fixpunkt von } \phi$$

Ist $q = (\sigma, (\pi_1, \dots, \pi_n))$ ein Element aus P mit sich schneidenden Pfaden, so wähle das lexikographisch kleinste Paar $i < j$ so dass sich Pfad π_i und π_j schneiden. Am letzten Schnittpunkt der Pfade tauschen wir die Enden aus und erhalten die Pfade

- ▶ π'_i , startet in A_i und endet in $B_{\sigma(j)}$
- ▶ π'_j , startet in A_j und endet in $B_{\sigma(i)}$.

Nun konstruieren wir uns ein Involution ϕ auf P .

Sei p ein Element aus P , wo sich die Pfade paarweise nicht schneiden. Dann setzen wir

$$\phi(p) = p \quad p \text{ ist also Fixpunkt von } \phi$$

Ist $q = (\sigma, (\pi_1, \dots, \pi_n))$ ein Element aus P mit sich schneidenden Pfaden, so wähle das lexikographisch kleinste Paar $i < j$ so dass sich Pfad π_i und π_j schneiden. Am letzten Schnittpunkt der Pfade tauschen wir die Enden aus und erhalten die Pfade

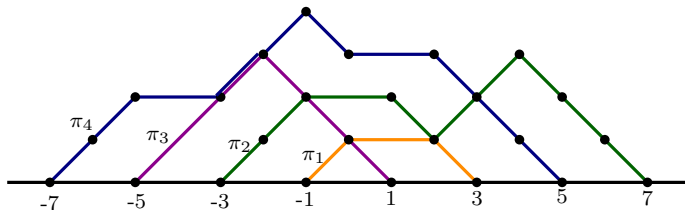
- ▶ π'_i , startet in A_i und endet in $B_{\sigma(j)}$
- ▶ π'_j , startet in A_j und endet in $B_{\sigma(i)}$.

Bezeichnen wir mit (ij) die Permutation, die i und j vertauscht, so setzen wir

$$\phi(q) = \phi((\sigma, (\pi_1, \dots, \pi_n))) = (\sigma \circ (ij), (\pi_1, \dots, \pi'_i, \dots, \pi'_j, \dots, \pi_n))$$

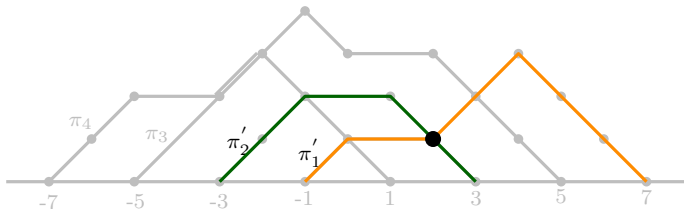
Beispiel

π_1 und π_2 sind lexikographisch das kleinste Paar von sich schneidenden Pfaden



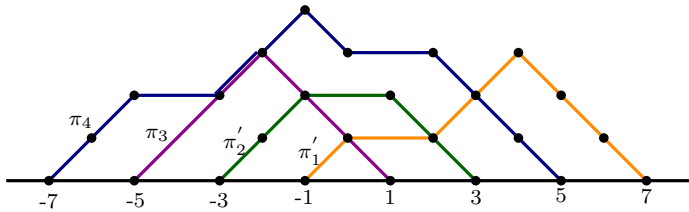
Beispiel

vertauschen die Enden



Beispiel

und erhalten die neuen Pfade





Für $\phi(q)$ ist (i, j) weiterhin das lexikographisch kleinste Paar von Pfaden, die sich schneiden. Somit ist ϕ tatsächlich eine Involution.



Für $\phi(q)$ ist (i, j) weiterhin das lexikographisch kleinste Paar von Pfaden, die sich schneiden. Somit ist ϕ tatsächlich eine Involution. Weiterhin ändert ϕ das Signum denn

$$\text{sgn}(\sigma) = (-1) \cdot \text{sgn}(\sigma \circ (ij))$$

Für $\phi(q)$ ist (i, j) weiterhin das lexikographisch kleinste Paar von Pfaden, die sich schneiden. Somit ist ϕ tatsächlich eine Involution. Weiterhin ändert ϕ das Signum denn

$$\text{sgn}(\sigma) = (-1) \cdot \text{sgn}(\sigma \circ (ij))$$

Nehmen wir uns die Elemente aus P bei denen sich mindestens zwei Pfade schneiden, so gibt uns ϕ ein Bijektion zwischen den Elementen mit positiven Signum und den Elementen mit negativen Signum.

Für $\phi(q)$ ist (i, j) weiterhin das lexikographisch kleinste Paar von Pfaden, die sich schneiden. Somit ist ϕ tatsächlich eine Involution. Weiterhin ändert ϕ das Signum denn

$$\text{sgn}(\sigma) = (-1) \cdot \text{sgn}(\sigma \circ (ij))$$

Nehmen wir uns die Elemente aus P bei denen sich mindestens zwei Pfade schneiden, so gibt uns ϕ ein Bijektion zwischen den Elementen mit positiven Signum und den Elementen mit negativen Signum.

Für Fixpunkte aus P gilt $\sigma = (12 \dots n) = \text{id}$ und wegen $\text{sgn}(\text{id}) = 1$ liegen diese Fixpunkte in P^+ .

Für $\phi(q)$ ist (i, j) weiterhin das lexikographisch kleinste Paar von Pfaden, die sich schneiden. Somit ist ϕ tatsächlich eine Involution. Weiterhin ändert ϕ das Signum denn

$$\text{sgn}(\sigma) = (-1) \cdot \text{sgn}(\sigma \circ (ij))$$

Nehmen wir uns die Elemente aus P bei denen sich mindestens zwei Pfade schneiden, so gibt uns ϕ ein Bijektion zwischen den Elementen mit positiven Signum und den Elementen mit negativen Signum.

Für Fixpunkte aus P gilt $\sigma = (12 \dots n) = \text{id}$ und wegen $\text{sgn}(\text{id}) = 1$ liegen diese Fixpunkte in P^+ . Insgesamt ergibt sich also

$$\det(H_n) = |P^+| - |P^-| = |\{p \in P \mid p \text{ ist Fixpunkt von } \phi\}|$$

Für $\phi(q)$ ist (i, j) weiterhin das lexikographisch kleinste Paar von Pfaden, die sich schneiden. Somit ist ϕ tatsächlich eine Involution. Weiterhin ändert ϕ das Signum denn

$$\text{sgn}(\sigma) = (-1) \cdot \text{sgn}(\sigma \circ (ij))$$

Nehmen wir uns die Elemente aus P bei denen sich mindestens zwei Pfade schneiden, so gibt uns ϕ ein Bijektion zwischen den Elementen mit positiven Signum und den Elementen mit negativen Signum.

Für Fixpunkte aus P gilt $\sigma = (12 \dots n) = \text{id}$ und wegen $\text{sgn}(\text{id}) = 1$ liegen diese Fixpunkte in P^+ . Insgesamt ergibt sich also

$$\det(H_n) = |P^+| - |P^-| = |\{p \in P \mid p \text{ ist Fixpunkt von } \phi\}|$$

Da die Menge der Fixpunkte von ϕ der Menge Π_n entspricht, folgt sofort die Behauptung.

Ganz analog zeigt man $|\Omega_n| = \det(G_n)$.



Fassen wir noch mal zusammen:

Ganz analog zeigt man $|\Omega_n| = \det(G_n)$.



Fassen wir noch mal zusammen:

- ▶ $\det(H_n) = 2^n \det(G_n)$

Ganz analog zeigt man $|\Omega_n| = \det(G_n)$.



Fassen wir noch mal zusammen:

- ▶ $\det(H_n) = 2^n \det(G_n)$
- ▶ $|\Pi_{n-1}| = |\Omega_n|$

Ganz analog zeigt man $|\Omega_n| = \det(G_n)$.



Fassen wir noch mal zusammen:

- ▶ $\det(H_n) = 2^n \det(G_n)$
- ▶ $|\Pi_{n-1}| = |\Omega_n|$
- ▶ $|\Pi_n| = \det(H_n)$ und $|\Omega_n| = \det(G_n)$

Ganz analog zeigt man $|\Omega_n| = \det(G_n)$.



Fassen wir noch mal zusammen:

- ▶ $\det(H_n) = 2^n \det(G_n)$
- ▶ $|\Pi_{n-1}| = |\Omega_n|$
- ▶ $|\Pi_n| = \det(H_n)$ und $|\Omega_n| = \det(G_n)$

Das heißt insgesamt gilt

$$|\Pi_n| = \det(H_n) = 2^n \det(G_n) = 2^n |\Omega_n| = 2^n |\Pi_{n-1}|$$

Ganz analog zeigt man $|\Omega_n| = \det(G_n)$. □

Fassen wir noch mal zusammen:

- ▶ $\det(H_n) = 2^n \det(G_n)$
- ▶ $|\Pi_{n-1}| = |\Omega_n|$
- ▶ $|\Pi_n| = \det(H_n)$ und $|\Omega_n| = \det(G_n)$

Das heißt insgesamt gilt

$$|\Pi_n| = \det(H_n) = 2^n \det(G_n) = 2^n |\Omega_n| = 2^n |\Pi_{n-1}|$$

Da nun $|\Pi_1| = 2$ gilt, erhalten wir induktiv

$$|\Pi_n| = 2^{n(n+1)/2}$$

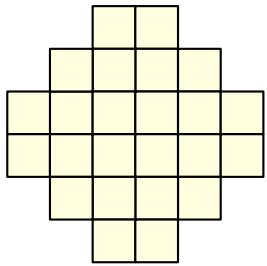


Proposition (Korollar)

$$AD(n) = 2^{n(n+1)/2}$$

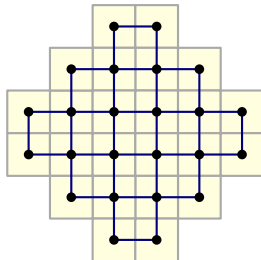
Ein 2. Beweis

► Nehmen wir uns den AD_n



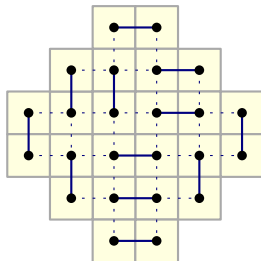
Ein 2. Beweis

- ▶ Nehmen wir uns den AD_n
- ▶ und betrachten den zu AD_n dualen Graphen $G(AD_n)$



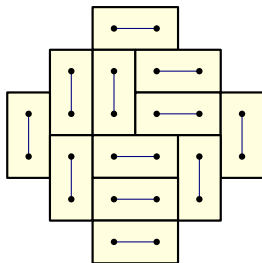
Ein 2. Beweis

- ▶ Nehmen wir uns den AD_n
- ▶ und betrachten den zu AD_n dualen Graphen $G(AD_n)$
- ▶ dann entspricht jedes perfekte Matching



Ein 2. Beweis

- ▶ Nehmen wir uns den AD_n
- ▶ und betrachten den zu AD_n dualen Graphen $G(AD_n)$
- ▶ dann entspricht jedes perfekte Matching
- ▶ einem Tiling des AD_n und umgekehrt





Allgemein können wir jeder Kante e in einem Graphen G ein Gewicht $w(e)$ zuordnen.



Allgemein können wir jeder Kante e in einem Graphen G ein Gewicht $w(e)$ zuordnen.

Das Gewicht $w(M)$ eines perfekten Matchings M sei dann

$$\prod_{e \in M} w(e).$$

Allgemein können wir jeder Kante e in einem Graphen G ein Gewicht $w(e)$ zuordnen.

Das Gewicht $w(M)$ eines perfekten Matchings M sei dann

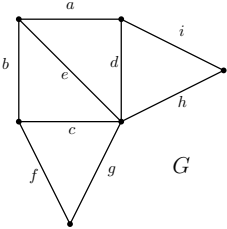
$$\prod_{e \in M} w(e).$$

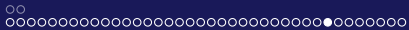
Wir interessieren uns jetzt für die Summe der Gewichte von allen perfekten Matchings:

$$\sum_{M \text{ ist perf. Mat. von } G} w(M) = \sum_M \prod_{e \in M} w(e) =: S(G)$$

Beispiel:

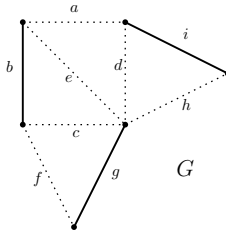
$$S(G) =$$





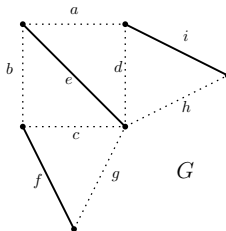
Beispiel:

$$S(G) = bgi+$$



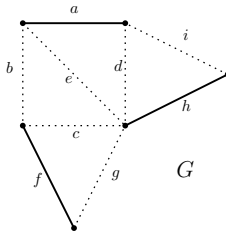
Beispiel:

$$S(G) = bgi + efi +$$



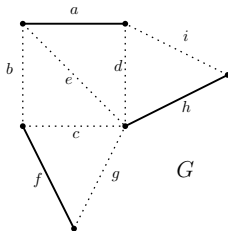
Beispiel:

$$S(G) = bgi + efi + afh$$



Beispiel:

$$S(G) = bgi + efi + afh$$



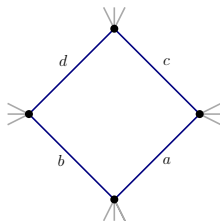
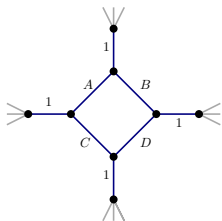
Setzen wir nämlich die Gewichte der Kanten von $G(AD_n)$ (duale Graph zu AD_n) auf 1, so gilt

$$S(G(AD_n)) = \text{Anzahl der perfekten Matchings von } AD_n = AD(n)$$

Um $S(G(AD_n))$ zu berechnen brauchen wir folgendes Lemma:

Lemma

Hat ein Graph G einen Teilgraph mit entsprechenden Gewichten wie auf der linken Seite veranschaulicht, so ersetzen wir ihn durch den Teilgraph mit entsprechenden Gewichten wie auf der rechten Seite veranschaulicht. Dabei sei $R = AD + BC$.



$$a = \frac{A}{R}$$

$$b = \frac{B}{R}$$

$$c = \frac{C}{R}$$

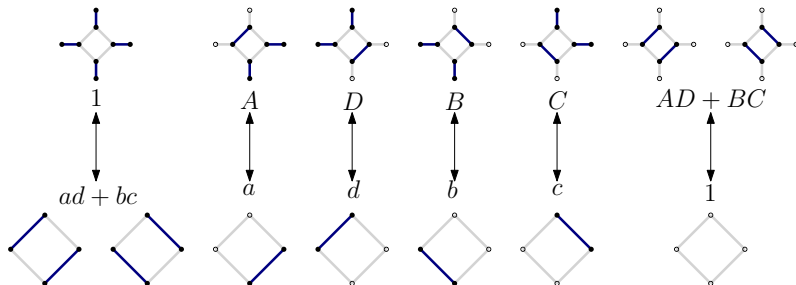
$$d = \frac{D}{R}$$

Dann gilt für den neuen Graph G'

$$S(G') = \frac{1}{R} S(G)$$

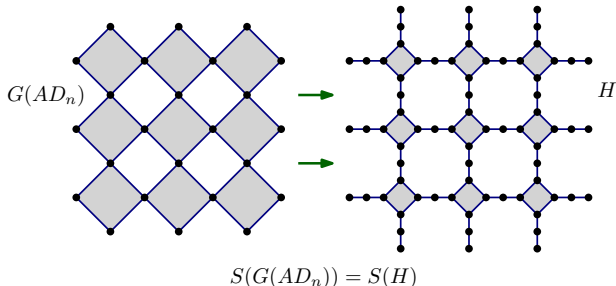
Beweis.

Wir können die Matchings wie unten im Bild angedeutet ordnen und in Beziehung setzen. In jeder Spalte unterscheiden sich die Summen über den Matchings gerade um den Faktor R , woraus dann insgesamt sofort die Behauptung folgt.



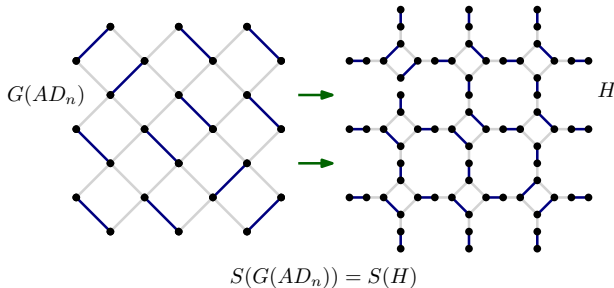
Der Graph H auf der rechten Seite dieser Folie ist eine „Erweiterung“ von $G(AD_n)$. Bei beiden Graph setzen wir die Kantengewichte auf 1.

Es gibt eine Bijektion zwischen den perfekten Matchings von $G(AD_n)$ und H .



Der Graph H auf der rechten Seite dieser Folie ist eine „Erweiterung“ von $G(AD_n)$. Bei beiden Graph setzen wir die Kantengewichte auf 1.

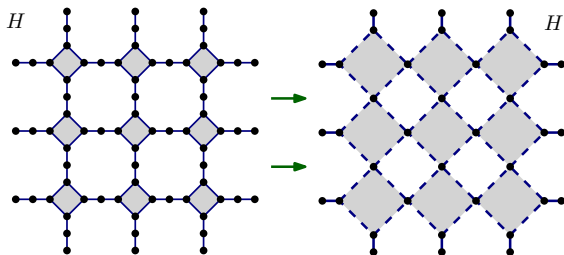
Es gibt eine Bijektion zwischen den perfekten Matchings von $G(AD_n)$ und H .



Wenden wir nun das Lemma auf H an, und zwar auf alle grau gefüllten „Zellen“ (wir haben n^2 viele davon), so bekommen wir den Graphen H' .

Wegen $R = AD + BC = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2$ (siehe Lemma), haben die gestrichelten Kanten Gewicht $\frac{1}{2}$ und es gilt

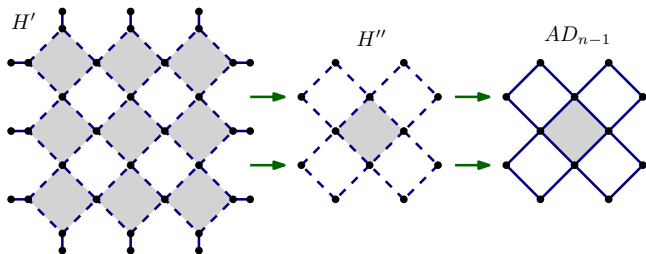
$$S(H') = \frac{1}{2^{n^2}} S(H)$$



Entfernen wir die Kanten mit Gewicht 1 und deren Knoten von H' , so ändert sich $S(H')$ nicht, da diese Kanten in jedem perfekten Matching liegen. Also gilt $S(H'') = S(H')$.

Ersetzen wir die Gewichte in H'' durch 1, so erhalten wir $G(AD_{n-1})$ und da jedes perfekte Matching davon $n(n - 1)$ Kanten hat, gilt

$$S(G(AD_{n-1})) = 2^{n(n-1)} S(H'')$$





Insgesamt erhalten wir folgende Gleichungskette:

$$\begin{aligned}S(G(AD_n)) &= S(H) = 2^{n^2} S(H') \\ &= 2^{n^2} S(H'') = \frac{2^{n^2}}{2^{n(n-1)}} S(G(AD_{n-1})) \\ &= 2^n S(G(AD_{n-1}))\end{aligned}$$



Insgesamt erhalten wir folgende Gleichungskette:

$$\begin{aligned}
 S(G(AD_n)) &= S(H) = 2^{n^2} S(H') \\
 &= 2^{n^2} S(H'') = \frac{2^{n^2}}{2^{n(n-1)}} S(G(AD_{n-1})) \\
 &= 2^n S(G(AD_{n-1}))
 \end{aligned}$$




Da nun $S(G(AD_n)) = AD(n)$ gilt, folgt wieder die Rekursionsgleichung

$$AD(n) = 2^n AD(n-1)$$

Da nun $AD(1)=2$ gilt, bekommen wir induktiv wieder

$$AD(n) = 2^{n(n+1)/2}$$

Quellen

-  Sen-Peng Eu, Tung-Shan Fu.
A Simple Proof of the Aztec Diamond Theorem.
-  Ira Gessel, Alexandru Ionescu, James Propp
Counting constrained domino tilings of Aztec diamonds
-  Noam Elkies, Greg Kuperberg, Michael Larsen, James Propp,
1992
Alternating-Sign Matrices and Domino Tilings
Journal of Algebraic Combinatorics 1 (1992), 111-132
-  P.W. Kasteleyn, 1961
The statistics of dimers on a lattice