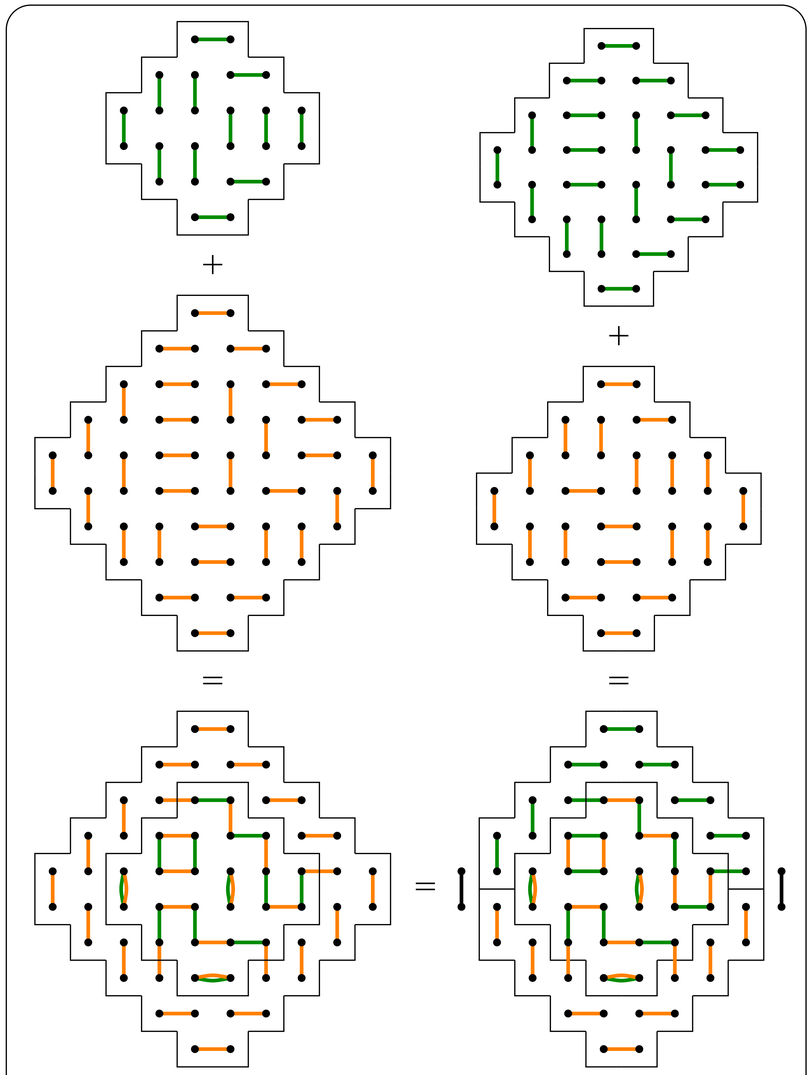
Graphical Condensation und seine Anwendungen

Poster zum Seminar „Tilings“ vom 29. bis 31. Januar 2010 von Olga Heismann und Hendrik Lüthen

Überlagerung von Matchings

Mit Hilfe von Überlagerungen perfekter Matchings können Abhängigkeiten zwischen der Anzahl perfekter Matchings unterschiedlicher Graphen hergestellt werden.



Das Überlagern von perfekten Matchings der aztekischen Diamanten der Größen $n-2$ und n führt zu einem Multigraphen mit gleichen Knotengraden wie die Überlagerung von zwei aztekischen Diamanten der Größe $n-1$. Mit vollständiger Induktion kann man anhand dieser Beobachtung zeigen, dass es

$$2^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

Pflasterungen des aztekischen Diamanten der Größe n mit 1×2-Dominosteinen gibt.

Graphical Condensation-Formel

In allgemeinen planaren Graphen erhält man mit der Überlagerungstechnik folgendes

Theorem. *Sei G ein planarer kantengewicheteter Graph mit $2n$ $[2n+1]$ Knoten. Seien die $2k$ $(2 \le k \le n)$ Knoten $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_k, b_k$ Knoten eines Gebiets in zyklischer Reihenfolge. Sei*

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\},$$
$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\},$$
$$A = A_1 \cup A_2.$$

Dann gilt

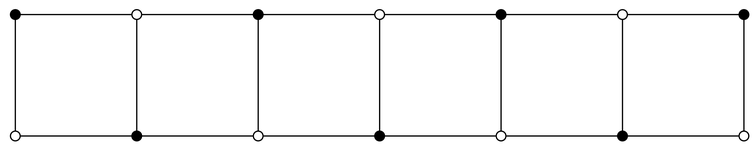
$$\sum_{W \subset B,\ |W| \text{ gerade [ungerade]}} M(G - W)M(G - A - B \setminus W) =$$
$$\sum_{Y \subset B,\ |Y|-|A_1| \text{ gerade [ungerade]}} M(G - A_1 - Y)M(G - A_2 - B \setminus Y),$$

wobei M die Summe der Produkte der Gewichte aller enthaltenen Kanten über alle perfekten Matchings angibt.

Anwendungen

Cassinis Identität

Für die Fibonaccizahlen F_i gilt $F_{n+1}F_{n-1} = F_n^2 + (-1)^n$, was sich mit Graphical Condensation beweisen lässt.



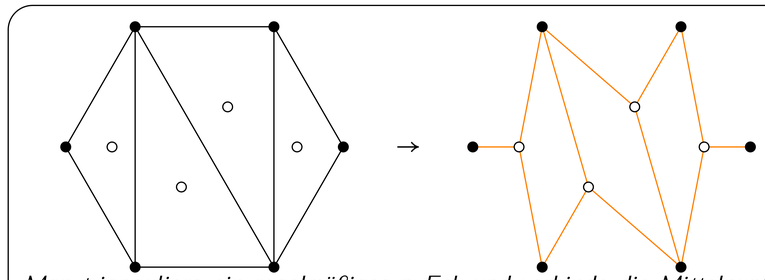
Die Anzahl der perfekten Matchings des $2 \times n$-Gitters ist die $(n+1)-te$ Fibonaccizahl F_{n+1}. Wendet man das allgemeine Theorem auf das $2 \times n$-Gitter an und benutzt die weißen und schwarzen Knoten als die Knotenmengen A und B, so erhält man leicht Cassinis Identität.

Frieze Patterns

Ein Frieze Pattern ist ein n-periodisches Zahlenfeld mit $n-1$ Zeilen, dessen Einträge in der ersten und letzten Zeile alle gleich 1 sind und dessen Einträge dazwischen die folgende Bedingung erfüllen:

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ B & & C \\ & D & \end{array} \qquad D = \frac{BC-1}{A}.$$

Graphical Condensation hilft bei der Konstruktion solcher Frieze Patterns.



Man trianguliere ein regelmäßiges n-Eck und verbinde die Mittelpunkte jedes Dreiecks mit seinen Eckpunkten. Aus der Anzahl der perfekten Matchings des entsprechenden Graphen ohne je zwei Eckpunkte kann man die Einträge eines Frieze Patterns mit $n-1$ Zeilen ablesen. Die obige Triangulierung liefert folgendes Frieze Pattern:

…	1		1		1		1		1	…
…		1		3		2		1		…
…	1		2		5		1		2	…
…		1		3		2		1		…
…	1		1		1		1		1	…

Literatur

[1] Eric H. Kuo. Applications of graphical condensation for enumerating matchings and tilings. *Theoretical Computer Science*, 319/1-3:29–57, 2004.

[2] Eric H. Kuo. Graphical condensation generalizations involving Pfaffians and determinants, 2007.

[3] James Propp. The combinatorics of frieze patterns and Markoff numbers, 2005.