

# Graphentheorie

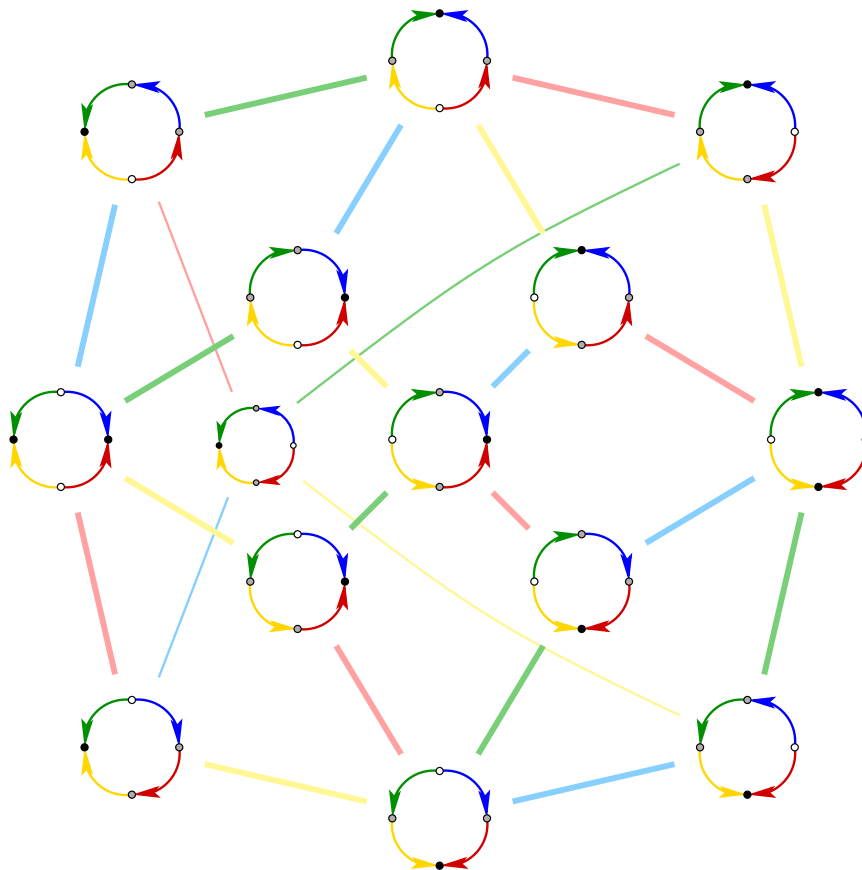
Test zum Teilnehmerskript

zu einer Vorlesung von

Stefan Felsner

Wintersemester 2013/14

Technische Universität Berlin



Die 14 azyklischen Orientierungen des 4-Kreises.



---

# Vorwort

Die Idee ein Skript zu meiner Vorlesung Graphentheorie im WS13/14 zu erstellen kam von den Studierenden. Dass Studierende saubere Mitschriften erstellen und sich diese gegenseitig zur Verfügung stellen, ist normal und immer schon passiert. Relativ neu ist, dass die Produkte ueber das Internet allgemein verfügbar gemacht werden. Man findet da einiges von unterschiedlicher Machart. Ich war der Meinung, dass ein Skript nur sinnvoll ist wenn es einheitlich von guter Qualität ist und erklärte mich bereit mitzumachen. In einem kurzen Text mit Hinweisen schrieb ich: *„Die Erstellung eines Skriptkapitels ist eine sinnvolle Übung. Sie bekommen ein tieferes Verständnis der Inhalte der bearbeiteten Vorlesung. Sie üben das Erstellen mathematischer Texte mit  $\LaTeX$ . Sie werden das noch öfter brauchen. Wenn wir uns alle Mühe geben wird ein Skript entstehen auf das wir alle stolz sind.“* Als Stilvorlage und Beispiel schrieb ich ein Kapitel zu einer nicht gehaltenen Vorlesung. Diese Kapitel steht als VL 33 am Ende dieses Textes.

Von den etwa 50 Teilnehmern an der Vorlesung haben sich 16 aktiv an der Erstellung des Skripts beteiligt. Die Beiträge dieser Studierenden habe ich auch alle noch einmal gründlich redigiert. Teilweise bestand dieses Redigieren nur darin, dass ich meine eigenen Formatierungsvorstellungen und Formulierungsvorlieben über den vorhandenen Text gestülpt habe. In einigen Fällen musste ich aber auch ganze Teile neu schreiben. Letztendlich war es mehr Arbeit für mich als ich gehofft hatte. Andererseits bin ich jetzt doch stolz auf das Ergebnis und freue mich, dass es entstanden ist. Mein Dank an alle die dazu beigetragen haben, insbesondere an Andre Weltsch, der als Koordinator und Motor für das Projekt eine besondere Rolle gespielt hat.

Stefan Felsner  
Berlin, 22. Mai 2014



# Inhaltsverzeichnis

<b>H. Hinweise für die Beitragenden</b>	<b>I</b>
H.1 Organisation . . . . .	I
H.2 Weitere Hinweise . . . . .	I
H.3 $\LaTeX$ Quellen . . . . .	II
<b>33. Elektrische Netze und aufspannende Bäume</b>	<b>III</b>
33.1 Elektrische Netze . . . . .	III
33.2 Squaring the Square . . . . .	VI



## Hinweise für die Beitragenden

Mit dem Kommando `\Vorlesungskopf` wird der Kopf inklusive der Überschrift eingerichtet. Im Anschluß sollte der Inhalt der Vorlesung, von einer höheren Warte aus, kurz dargestellt werden. Dabei kann die Einordnung innerhalb des Vorlesungsganzen sowie die Ziele und verwendete Techniken zur Sprache kommen. Insbesondere sollte, wenn die Vorlesungen inhaltlich zusammenhängen, der Bezug zur vorigen Vorlesung hergestellt werden. Dabei kann auch eine kurze Zusammenfassung der relevanten Inhalte gegeben werden. Der einleitende Abschnitt kann zwei bis drei Absätze umfassen.

### H.1 Organisation

Die eigentliche Vorlesung kann in Sektionen gegliedert werden. Die in der von der Vorlesungsseite im Web erreichbare Datei `inhalte.html` kann zur Orientierung in Bezug auf die Gliederung dienen. Die Gliederung sollte sich auf die Ebenen `section` und `subsection` beschränken.

### H.2 Weitere Hinweise

Bekanntlich sagt ein Bild oft mehr als tausend Worte. Daher empfehle ich großzügige Bebilderung. Im Beispielkapitel Y sind einige Abbildungen enthalten, wie Abbildungen eingebunden werden, kann dort nachvollzogen werden. Ich möchte drei Möglichkeiten erwähnen:

- Bilder mit `xfig` erstellen, mit `updfig` in `.pdftex` und `.pdftex.t` Dateien umwandeln und dann mit `\PdfFigCap` einbinden. Vorteil: echte  $\TeX$  Schriften und einfache Skalierbarkeit. Nachteil: Ein non-standard-hack.
- Verwendung von `ipe`.
- Bilder die mit anderen Werkzeugen erstellt wurden aber als `.pdf` oder `.png` vorliegen können mit `\includegraphics` eingebunden werden.

Neben den Bildern ist natürlich auch der Text wichtig. Hier einige knappe Bemerkungen dazu:

- Benutzen Sie ganze Sätze.

- Redundanz ist auch in mathematischen Texten erwünscht, also: keine Scheu vor Wiederholungen.
- Verweise innerhalb des Textes sind hilfreich, verwenden sie `label` und `ref`.

Die Erstellung eines Skriptkapitels ist eine sinnvolle Übung. Sie bekommen ein tieferes Verständnis der Inhalte der bearbeiteten Vorlesung. Sie üben das Erstellen mathematischer Texte mit  $\LaTeX$ . Sie werden das noch öfter brauchen. Wenn wir uns alle Mühe geben können wir ein Skript erstellen auf das wir alle stolz sind.

### H.3 $\LaTeX$ Quellen

- The not so short introduction to  $\LaTeX$ :  
<ftp.dante.de/tex-archive/info/lshort/english/lshort.pdf>  
(Grundlagen, first-reading für Latex-Neulinge.)
- LaTeX - eine Einführung und ein bisschen mehr - Fern Universität Hagen:  
[www.fernuni-hagen.de/imperia/md/content/zmi\\_2010/a026\\_latex\\_einf.pdf](www.fernuni-hagen.de/imperia/md/content/zmi_2010/a026_latex_einf.pdf)  
(Ein  $\LaTeX$ -Buch, umfassend aber ein bisschen altbacken.)
- Typesetting with  $\LaTeX$ :  
<www.cadmo.ethz.ch/education/thesis/latex>  
(Eine Seite mit ausgesuchten Links.)
- Typografie und  $\LaTeX$ :  
<homepage.ruhr-uni-bochum.de/georg.verweyen/latexfuerword.html>  
(Gut gemachte Seiten mit Grundlagen und Feinheiten.)
- Short Math Guide for  $\LaTeX$ :  
<ftp.ams.org/pub/tex/doc/amsmath/short-math-guide.pdf> (Enthält zahlreiche Symbol- und Sonderzeichentabellen.)
- Anleitung zu KOMA.  
<ftp.dante.de/tex-archive/macros/latex/contrib/koma-script/scrguide.pdf>  
(KOMA vereinfacht den Satz von deutschen Büchern und Briefen.)
- Hinweise insbesondere zum deutschen Textsatz in  $\LaTeX$ :  
<www.jr-x.de/publikationen/latex/tipps/besonderheiten.html> (Eine kleine Sammlung von Feinheiten, empfohlen.)
- Feinheiten bei wissenschaftlichen Publikationen: Mikrotypographie-Regeln, Teil I:  
<www.dante.de/tex/Dokumente/dtk-neubauer-Teil1.pdf>
- Feinheiten bei wissenschaftlichen Publikationen: Mikrotypographie Regeln, Teil II:  
<www.dante.de/tex/Dokumente/NeubauerII.pdf>



## Elektrische Netze und aufspannende Bäume

In der 6. Vorlesung haben wir das Spiel *Bridg-It* kennengelernt und gesehen, dass aufspannende Bäume hier bei der Beschreibung einer Gewinnstrategie hilfreich sind. Das zweite Thema der Vorlesung war der Satz von Cayley über die Anzahl der aufspannenden Bäume vollständiger Graphen. Für diesen Satz haben wir drei sehr unterschiedliche Beweise besprochen. In diesem Kapitel<sup>I</sup> wird es um eine weitere Anwendung aufspannender Bäume gehen. Wir beginnen mit elektrischen Netzen und Graphen, die aufspannenden Bäume kommen später überraschend ins Spiel.

### 33.1 Elektrische Netze

Ein elektrisches Netz ist ein Graph (gegebenenfalls auch ein Multigraph) in dem jeder Kante  $e_i$  ein Widerstand (resistance)  $r_i$  zugeordnet ist. Um den Stromfluß im Netz zu beschreiben sprechen wir über **Stromstärken** und **Potentialdifferenzen** (Spannungen).

Sei  $e_i = (u, v)$ ,  $p_i$  die Potentialdifferenz und  $w_i$  die Stärke des Stroms von  $u$  nach  $v$ , dann gilt

$$r_i \cdot w_i = p_i \quad (\text{Ohmsches Gesetz})$$

Für das Weitere ist es nützlich orientierte Kanten also Kanten mit Start- und Zielknoten zu betrachten. Oben haben wir für  $e_i$  eine Orientierung durch die Notation  $e_i = (u, v)$  schon unter der Hand als  $u \rightarrow v$  vorgegeben.

Ströme und Spannungen sind antisymmetrisch, d.h.

$$w_{uv} = -w_{vu} \quad \text{und} \quad p_{uv} = -p_{vu}.$$

Ströme und Spannungen in elektrischen Netzen genügen den Kirchhoffschen<sup>II</sup> Gesetzen:

(KG I) Für einen Knoten  $x$  mit Nachbarn  $v_1, v_2, \dots, v_d$  und Quellstärke  $q_x$  gilt:

$$w_{x,v_1} + w_{x,v_2} + \dots + w_{x,v_d} = q_x.$$

(KG II) Für jeden Kreis  $u_1, u_2, \dots, u_k$  gilt:

$$p_{u_1,u_2} + p_{u_2,u_3} + \dots + p_{u_{k-1},u_k} + p_{u_k,u_1} = 0.$$

<sup>I</sup>Zu diesem Kapitel gab es im WS13/14 keine Vorlesung. Das Kapitel ist zu Beginn des Projekts als Beispiel und Anregung für die Ausarbeitungen der Studenten entstanden.

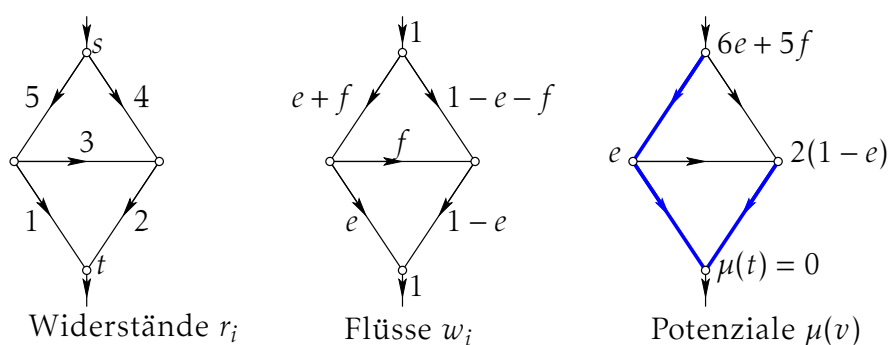
<sup>II</sup>Übung: Wikipedia[Gustav Robert Kirchhoff] lesen und sein Grab in Schöneberg besuchen.

Das Potenzialgesetz KG II erlaubt es den Knoten absolute Potentiale zuzuordnen, so dass  $p_{u,v}$  die Differenz der Potentiale von  $v$  und  $u$  ist. Das beweisen wir in einem Lemma.

**Lemma 33.1** Sei  $G$  zusammenhängend und  $p$  eine antisymmetrische Abbildung von  $E$  nach  $\mathbb{R}$  die KG II erfüllt. Zu einem ausgewählten Knoten  $v_0 \in V$  gibt es dann eine eindeutige Abbildung  $\mu : (V - v_0) \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\mu(v_0) = 0$  und  $p_{u,v} = \mu(u) - \mu(v)$  für alle  $uv \in E$ .

**Beweis.** Um  $\mu(v)$  festzulegen wähle einen Weg (hier benötigen wir den Zusammenhang)  $v_0, v_1, v_2, \dots, v_{a-1}, v_a = v$  und bestimme  $\mu(v) = \mu(v_0) + p_{v_0v_1} + p_{v_1v_2} + \dots + p_{v_{a-1}v_a}$ . Zu zeigen ist nun, dass das wohldefiniert ist, also nicht von der Wahl des Weges abhängt. Zwei Wege  $v_0, v_1, \dots, v_a = v$  und  $v_0, u_1, \dots, u_b = v$  können zu einem geschlossenen Kantenzug  $v_0, u_1, \dots, u_b, v_a, \dots, v_1, v_0$  verknüpft werden. Aus KG II folgt (da kann durchaus ein Argument ausgearbeitet werden), dass  $p_{v_0v_1} + p_{v_1v_2} + \dots + p_{v_{a-1}v_a} + p_{u_bu_{b-1}} + \dots + p_{u_1v_0} = 0$  gilt. Daraus folgt, dass die Wahl des Weges irrelevant ist.  $\square$

Wir betrachten ein Beispiel. In der Abbildung 33.1 sind links die Widerstände  $r_e$  an den Kanten festgelegt. In der Mitte sind die Flüsse mit den Quellstärken  $q_s = 1, q_t = -1$  und  $q_i = 0$  sonst, wobei die nicht verschwindenden Quellstärken durch Halbkanten dargestellt werden. Die Flüsse  $\neq e, f$  können dank der Flusserhaltung (KG I) eliminiert werden (durch  $e, f$  und 1 ausgedrückt werden). Rechts schliesslich sind die Potentiale mit der Ohmschen Gleichung  $r_{uv}w_{uv} = \mu(u) - \mu(v)$  und der Normierung  $\mu(t) = 0$  entlang der fetten Kanten berechnet worden. Das Ohmsche Gesetz für die beiden übrigen Kanten liefert  $3f = e - 2(1 - e)$  und  $4(1 - e - f) = (6e + 5f) - 2(1 - e)$ . Diese zwei Gleichungen in zwei Variablen haben die Lösung  $e = 4/7$  und  $f = -2/21$ . Die Potentialdifferenz die man benötigt um den Flusswert 1 zu erhalten ist der effektive Widerstand. In unserem Fall ist  $6e + 5f = 62/21$  der effektive Widerstand zwischen  $s$  und  $t$ .



**Abbildung 33.1:** Ein Stromnetz mit Widerständen, Flüssen und Potentialen (von links nach rechts).

Eine heuristische Nebenüberlegung: Sei  $(V, E)$  ein zusammenhängendes Netz mit  $m$  Kanten,  $n$  Knoten und Widerständen  $r : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Wir setzen  $m$  Variablen  $w_e$  für die Flusswerte an. Die Flusserhaltung (KG I) liefert  $n - 1$  linear unabhängige Bedingungen

(Dimension des Schnittraumes). Diese verwenden wir zur Elimination, es bleiben  $m - n + 1$  Variablen. Benutze einen aufspannenden Baum um ausgehend von  $\mu(v_0) = 0$  ausgehend die Potentiale zu bestimmen. Jede Kante, die nicht im Baum ist, schließt mit den Baumkanten einen Kreis, in dem das Potenzialgesetz (KG II) gelten muss (das entspricht der Ohmschen Gleichung  $r_{uv}w_{uv} = \mu(u) - \mu(v)$  für die Nichtbaumkante  $uv$ !). Insgesamt liefert das  $m - n + 1$  Gleichungen. Das lineare Gleichungssystem ist also quadratisch, wenn es nicht-degeneriert ist bekommen wir eine eindeutige Lösung. Die Physik sagt, dass die Lösung tatsächlich eindeutig ist. Im folgenden Satz werden wir das für den Fall in dem alle Widerstände  $r_e = 1$  sind bewiesen.

Sei  $N = (V, E)$  ein zusammenhängendes Netz mit ausgezeichneten Knoten  $s$  und  $t$ . Für eine Kante  $(u, v)$  sei  $T(u, v)$  die Anzahl der aufspannenden Bäume  $S$  von  $N$ , in denen der Pfad von  $s$  nach  $t$  die Kante  $u, v$  enthält, anders gesagt  $S$  enthält  $(u, v)$  und in  $S - (u, v)$  sind  $s$  mit  $u$  sowie  $v$  mit  $t$  in gemeinsamen Komponenten.

### Satz 33.2 (Kirchhoff)

Sei  $N = (V, E)$  ein zusammenhängendes Netz mit ausgezeichneten Knoten  $s$  und  $t$  und Widerständen  $r_e = 1$  für alle  $e$ . Die Werte  $w_{(u,v)} := T(u, v) - T(v, u)$  definieren einen elektrischen Fluss von  $s$  nach  $t$  in  $N$  mit Flussstärke  $q_s = -q_t = \#(\text{aufspannender Bäume von } N)$ .

**Beweis.** Wir müssen die beiden Gesetze KG II und KG I nachweisen. Für KG I ist das ganz einfach: Jeder aufspannende Baum  $S$  trägt eine Einheit Fluss entlang des eindeutigen  $s \rightarrow t$  Pfades in  $S$  bei, der Gesamtfluss ergibt sich als Summe der einzelnen Pfadflüsse. Flusserhaltung gilt für jeden Pfad und auch für die Summe der Pfade, also den Gesamtfluss.

Um KG II nachzuweisen müssen wir ein bisschen mehr tun. Zuerst beobachten wir, dass wegen  $w_e = p_e/r_e$  und  $r_e = 1$  aus dem Potenzialgesetz ein Kreisflussgesetz wird. Das heißt, es genügt nachzurechnen, dass für jeden Kreis  $u_1, u_2, \dots, u_k$  in  $N$  gilt:  $w_{u_1, u_2} + w_{u_2, u_3} + \dots + w_{u_{k-1}, u_k} + w_{u_k, u_1} = 0$ .

Wir nennen einen aufspannenden Wald mit zwei Komponenten  $F_s, F_t$  mit  $s \in F_s$  und  $t \in F_t$  ein Dickicht.

### Beobachtung.

$$T_{(u,v)} = \#(\text{Dickichte mit } u \in F_s \text{ und } v \in F_t)$$

**Beobachtung.** Ein Dickicht,  $(F_s, F_t)$  kann mit jeder Kante  $(u, v)$  mit  $u \in F_s$  und  $t \in F_t$  zu einem Baum erweitert werden. Die Kante  $(u, v)$  liegt dann natürlich auf dem  $s \rightarrow t$  Pfad des Baumes.

Wenn wir nun einen Kreis  $u_1, u_2, \dots, u_k$  und ein Dickicht  $(F_s, F_t)$  betrachten, dann gilt:

$$\#(i : u_i \in F_s \text{ und } u_{i+1} \in F_t) - \#(i : u_i \in F_t \text{ und } u_{i+1} \in F_s) = 0 \quad (\text{i})$$

Dies gilt, weil sich Indizes  $i$ , die einen positiven Beitrag leisten, und Indizes, die einen negativen Beitrag leisten, abwechseln.

Um unser “double counting” Argument griffig kodieren zu können hier noch ein bisschen Notation: Für einen Baum  $S$  sei  $w_{u,v}^S$  der Beitrag von  $S$  zu  $w_{u,v}$ , d.h. abhängig von der Orientierung von  $(u, v)$  auf dem  $s \rightarrow t$  Pfad in  $S$  kann  $w_{u,v}$  die Werte  $+1, -1, 0$  annehmen. Für ein Dickicht  $F$  sei  $w_{u,v}^F := w_{u,v}^{F+(u,v)}$ , das ist 0 wenn  $F + (u, v)$  kein Baum ist und sonst über den Baum  $F + (u, v)$  definiert.

Sei also  $u_1, u_2, \dots, u_k$  ein Kreis in  $N$ . Mit der soeben eingeführten Notation ist i dasselbe wie  $\sum_i w_{u_i, u_{i+1}}^F = 0$ , für jedes Dickicht  $F$ . Daher gilt:  $w_{u_1, u_2} + w_{u_2, u_3} + \dots + w_{u_{k-1}, u_k} + w_{u_k, u_1} = \sum_i w_{u_i, u_{i+1}} = \sum_i \sum_T w_{u_i, u_{i+1}}^T = \sum_i \sum_F w_{u_i, u_{i+1}}^F = \sum_F \sum_i w_{u_i, u_{i+1}}^F = \sum_F 0 = 0$ . Damit ist der Satz bewiesen.  $\square$

## 33.2 Squaring the Square

„Squaring the Square“ ist der Titel einer Kolumne von Martin Gardner in der er Ergebnisse der Arbeit [3] von Brooks, Smith und Tutte „The Dissection of Rectangles into Squares“ zusammenfasst.

Eine „Dissection of Rectangles into Rectangles“ (wir werden es Rechteckszerlegung nennen) ist eine Partition eines Basisrechtecks in Teilrechtecke wie in Abb. 33.2, links. In [3] fragen sich die Autoren unter welchen Umständen eine solche Zerlegung in Rechtecke zu einer äquivalenten Zerlegung in Quadrate (Quadratzerlegung) gehört. Eine zu der in Abb. 33.2 links dargestellten Rechteckszerlegung äquivalente Quadratzerlegung ist in derselben Abbildung rechts dargestellt.

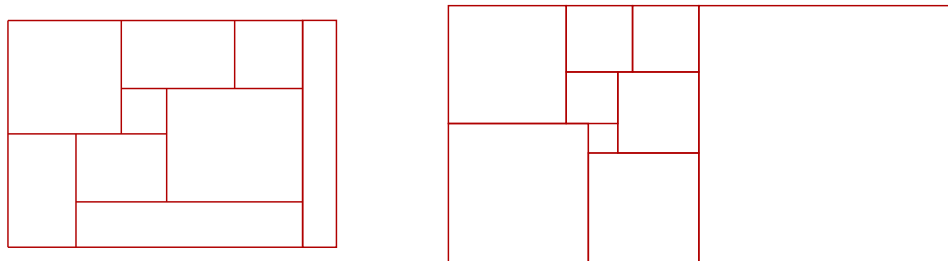


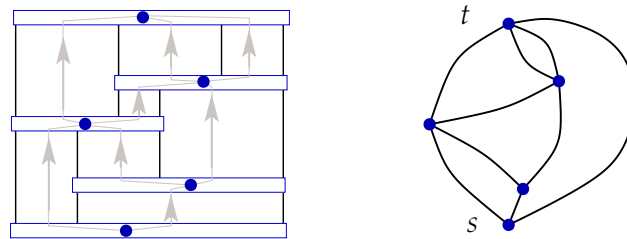
Abbildung 33.2: Eine Rechteckszerlegung mit einer äquivalenten Quadratzerlegung.

Aus dem Vergleich der beiden Zerlegungen erschliesst sich der hier verwendete Begriff der Äquivalenz, den wir zunächst formal definieren wollen.

Zwei Rechteckszerlegungen sind äquivalent, wenn es eine Bijektion zwischen den Segmenten gibt, die die *Orientierung* (horizontal, vertikal) und die *endet auf* Relation erhält sowie die Rahmensegmente links, rechts, oben und unten auf die entsprechenden Rahmensegmente abbildet. Eine alternative Definition der Äquivalenz bekommen wir indem wir mit der Rechteckszerlegung ihren H-Graphen betrachten. Die Knoten des H-Graphen sind die horizontalen Segmente der Zerlegung. Die Kanten des H-Graphen entsprechen den Rechtecken der Zerlegung, sie verbinden jeweils das untere mit dem oberen Segment. Zusätzlich gibt es eine Kante, die das untere Rahmensegment  $s$  mit dem oberen Rahmensegment  $t$  verbindet. Abbildung 33.3 illustriert die Konstruktion des H-Graphen.

**Tatsache A.** Der H-Graph einer Rechteckszerlegung hat eine natürliche planare (kreuzungsfreie) Einbettung.

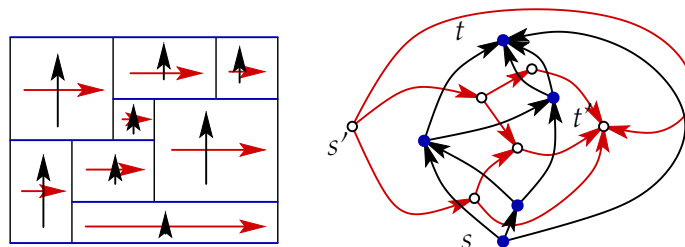
**Tatsache B.** Zwei Rechteckszerlegungen sind äquivalent  $\iff$  ihre H-Graphen sind als planar eingebettete Graphen mit  $s$  und  $t$  identisch.



**Abbildung 33.3:** Der H-Graph der Rechteckszerlegung aus Abb. 33.2.

Wir nehmen an, dass Kanten des H-Graphen Widerstand 1 haben und nennen den Graphen, den wir durch Löschen der Kante  $(s, t)$  im H-Graphen erhalten den  $H'$ -Graphen. Einen elektrischen Fluss im  $H'$ -Graphen bekommen wir mit  $w_{(u,v)} := T(u, v) - T(v, u)$  (vergl. den Beweis von Satz 33.2). Wir erinnern uns, dass es einfach war die Flusserhaltung (KG I) für diese  $w_{(u,v)}$  nachzuweisen. Wir werden im Folgenden zeigen, dass das Potentialgesetz (KG II) in unserem Fall genauso leicht hergeleitet werden kann.

Zunächst definieren wir den V-Graphen zur Rechteckszerlegung ganz analog zum H-Graphen, nur dass wir diesmal die vertikalen Segmente zu Knoten des Graphen machen. Die Konstruktion ist in Abb. 33.4 dargestellt.



**Abbildung 33.4:** Der H-Graph und der V-Graph der Rechteckszerlegung.

Wir beobachten, dass der H-Graph und der V-Graph dual<sup>III</sup> zueinander sind, d.h. wir haben Bijektionen: H-Knoten  $\leftrightarrow$  V-Flächen, H-Flächen  $\leftrightarrow$  V-Knoten und H-Kanten  $\leftrightarrow$  V-Kanten. Diese Bijektionen  $\sigma$  haben die Eigenschaft, dass wenn  $(u, v)$  eine H-Kante ist und  $f, g$  die angrenzenden Flächen, dann ist  $\sigma((u, v)) = (\sigma(f), \sigma(g))$  die zugehörige V-Kante mit angrenzenden Flächen  $\sigma(u), \sigma(v)$ . (Für die duale Kante zu  $(u, v)$  schreibt man statt  $\sigma((u, v))$  meistens  $(u, v)^*$ ).

Ohne Beweis werden wir die folgende Dualität aufspannender Bäume verwenden:

- Ist  $S \subset E_H$  ein aufspannender Baum im H-Graphen, dann ist  $S^* = E_V \setminus S^*$  ein aufspannender Baum von  $V$ .

<sup>III</sup>Die Dualität planarer Graphen werden wir später noch genauer kennenlernen

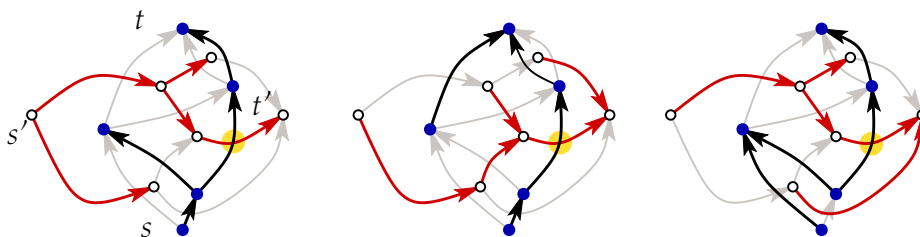
Wir definieren

$$T_{(u,v)} = \#(\text{Bäume von } H' \text{ mit Pfad } s \rightarrow u, v \rightarrow t)$$

$$T_{(f,g)}^* = \#(\text{Bäume von } V' \text{ mit Pfad } s' \rightarrow f, g \rightarrow t')$$

**Lemma 33.3** Wenn  $f$  und  $g$  die Flächen links und rechts der Kante  $u \rightarrow v$  im  $H$ -Graphen sind, dann gilt  $T_{(f,g)}^* = T_{(u,v)}$ .

**Beweis.** Sei  $S$  ein aufspannender Baum des  $H'$ -Graphen mit einem Pfad  $s \rightarrow u, v \rightarrow t$ . Wir fassen  $S$  als aufspannenden Baum des  $H$ -Graphen auf und betrachten den dualen Baum  $S^*$ , dieser enthält die Kante  $(s', t')$ . Wir definieren  $\hat{S} = S^* - (s', t') + (f, g)$ , dies ist ein Baum des  $V'$ -Graphen mit einem Pfad  $s' \rightarrow f, g \rightarrow t'$ . Beispiele für die Abbildung  $S \leftrightarrow \hat{S}$  zusammengestellt. Das Lemma wird bewiesen indem man zeigt, dass die Abbildung eine Bijektion ist.  $\square$



**Abbildung 33.5:** Drei Beispiele für die Abbildung  $S \leftrightarrow \hat{S}$  bezüglich des Kantenpaares das sich im unterlegten Kreis schneidet.

Die Flussserhaltung für den dualen Fluss  $w_{(f,g)}^* = T^*(f, g) - T^*(g, f)$  liefert mit  $w_{(f,g)}^* = w_{(u,v)}$ , wenn wie im Lemma  $(f, g) = (u, v)^*$ , das Kreisflussgesetz (KG II) für  $w$  und Flächenkreise. Das Kreisflussgesetz kann als  $w^T \cdot k = 0$  für  $k \in Z$  geschrieben werden. Da die Flächenkreise eine Basis des Zyklenraumes  $Z$  sind erhält man das Kreisflussgesetz für  $w$  auf beliebigen Kreisen durch lineare Fortsetzung.

Repräsentiert man den Fluss  $w_e$  in einer Kante des  $H$ -Graphen durch die Breite des zugehörigen Rechtecks und den dualen Fluss  $w_{e^*}^*$  durch die Höhe des Rechtecks, dann erhält man das Resultat von Brooks, Smith, Stone und Tutte:

**Satz 33.4** Zu jeder Rechteckszerlegung gibt es eine äquivalente Quadratzerlegung.

## Literatur und Hintergrund

Das Interesse der Autoren von [3] galt in erster Linie Quadratzerlegungen, in denen die Rahmensegmente ein Quadrat bilden und die Quadrate paarweise verschiedene Seitenlängen haben, solche Quadratzerlegungen werden perfekt genannt, Abb. 33.6 zeigt ein Beispiel.

Das zweite Kapitel von Bollobas [2] heißt “*Electrical Networks*”, dort findet man mehr zum Thema. Verschiedenste Aspekte der Beziehung zwischen Graphen und Rechteckszerlegungen werden in meinem Übersichtsartikel [5] besprochen.

Von elektrischen Netzen und effektivem Widerstand gibt es auch wichtige Verbindungen zu Markov Ketten und Random Walks (Zufallsspaziergängen): Wenn eine Einheit Strom von  $s$  nach  $t$  durch ein Netz  $N$  fließt, dann ist der Fluss in einer Kante  $(u, v)$  proportional zur erwarteten Anzahl von Passagen Zufallsspaziergänger durch  $(u, v)$  (Passagen  $v \rightarrow u$  werden negativ gezählt) der das Netz in  $s$  betritt und beim ersten Besuch von  $t$  verlässt. Der Proportionalitätsfaktor ist gerade der effektivem Widerstand. Mehr dazu findet man bei Doyle und Snell [4] und auch bei Motwani und Raghavan [6].

Nicht direkt mit elektrischen Flüssen im Zusammenhang steht der folgende Satz von Dehn.

**Satz 33.5** *Wenn jedes Rechteck einer Rechteckszerlegung zumindest eine ganzzahlige Seitenlänge hat, dann hat auch das umschließende Rechteck mindestens eine ganzzahlige Seitenlänge.*

Ich erwähne den Satz hier, weil es zahlreiche schöne, mehr oder weniger kombinatorische Beweise für ihn gibt, vergl. [1, Kap. 26] und die dort angegebenen Literaturhinweise.

## Literaturverzeichnis

- [1] M. AIGNER AND G. M. ZIEGLER, *Das BUCH der Beweise* (3. Aufl.), Springer-Verlag, 2010.
- [2] B. BOLLOBAS, *Modern Graph Theory*, vol. 184 of Graduate Texts in Mathematics, Springer, 2002.
- [3] R. L. BROOKS, C. A. B. SMITH, A. H. STONE, AND W. T. TUTTE, *The dissection of rectangles into squares*, Duke Math. J., 7 (1940), 312–340.
- [4] P. G. DOYLE AND J. L. SNELL, *Random walks and electric networks*, Mathematical Association of America, 1984. [math.dartmouth.edu/~doyle/docs/walks/walks.pdf](http://math.dartmouth.edu/~doyle/docs/walks/walks.pdf).
- [5] S. FELSNER, *Rectangle and square representations of planar graphs*, in *Thirty Essays in Geometric Graph Theory*, J. Pach, ed., Springer, 2013, 213–248.
- [6] R. MOTWANI AND P. RAGHAVAN, *Randomized Algorithms*, Cambridge Univ. Press, 1995.

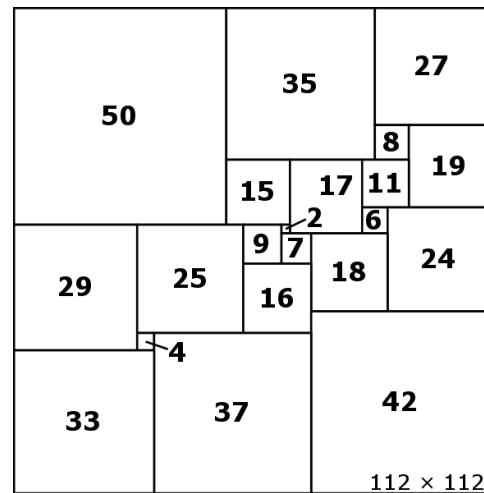


Abb. 33.6: Die kleinste perfekte Quadraterlegung.