Matroide

Def $M = (X, \mathcal{J})$ ist Matroid

S Grundmenge $\mathcal{J} \subseteq Pot(S)$

wenn gilt:

$\boxed{\text{Unabhängigkeitsaxiome}}$

(I1) $\emptyset \in \mathcal{J}$

(I2) $J \in \mathcal{J}$ und $I \subseteq J \Rightarrow I \in \mathcal{J}$

(I3) $I, J \in \mathcal{J}$ $|I| < |J| \Rightarrow$

$\exists x \in J \setminus I$ so dass $I + x \in \mathcal{J}$

Beispiele von Matroiden

(1) Lineare Matroide.

$X \subseteq V$ V $\mathbb{F}$-Vektorraum

$I \subseteq X$ ist in $\mathcal{J} \Leftrightarrow I$ linear unabh.

[(I3) ist Basisergänzungssatz]

(2) $G = (V, E)$ Graph.

Graphische Matroide

$I \subseteq E$ ist in $\mathcal{J} \Leftrightarrow I$ kreisfrei

(3) Uniformes Matroid U_k^n ; $|X| = n$

$I \subseteq X$ ist in $\mathcal{J} \Leftrightarrow |I| \leq k$

(4) Partitions Matroid.

$X = X_1 \dot\cup X_2 \dot\cup \dots \dot\cup X_r$ $(k_1 \dots k_r) \in \mathbb{N}^r$

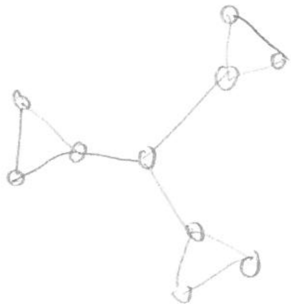
$I \subseteq X$ unabh.

$\Leftrightarrow |I \cap X_i| \leq k_i \ \forall i$

(5) Matching Matroid

$G = (V, E)$ Graph

$I \subseteq V$ ist in $\mathcal{J}$ $\Leftrightarrow$ $\exists$ Obermenge $\hat{I}$ von I und Matching für die Knoten von $\hat{I}$ in G

Bsp 

Zu zeigen: (I3) gilt

Sei $|I| < |J|$ und M_I, M_J Matchings die belegen dass I und J unabh.

Die Überlagerung $M_I \oplus M_J$ das besteht aus
- Doppelkanten
- altern. Kreisen
- alternierenden Pfaden

$\forall x \in J \setminus I$ gilt: Endpkt eines alt. Pfades P

Das Matching $M_I \Delta P$ bringt x in I

Dies genau zu machen war mühsam → next page

Weitere Begriffe und Axiomensysteme

- unabhängige Mengen
- Maximal unabh. Mengen (Basen)
  - alle Basen haben gleiche Kardinalität
- abhängige Menge
- Minimal abh. Mengen (Circuit)
- $r: Pot(X) \to \mathbb{N}$ Rangfunktion
  $r(A) = \max(|I| : I \subseteq A \in \mathcal{J})$
- Erzeugnis von A is max. Menge B mit $A \subseteq B$ und $r(A) = r(B)$

zz Erzeugnis ist wohldefiniert

Ang $\exists B_1\ B_2$ obermengen von A

mit $r(B_1 \cup B_2) > r(A)$ aber

$r(B_1) = r(B_2) = r(A)$ Sei I max unabh in A

sei J max unabh in $B_1 \cup B_2$, $|J| > |I|$

$\Rightarrow \exists x \in J \setminus I$ sd $I + x$ unabh.

$x \in B_1 \Rightarrow r(B_1) > r(A)$ ↯

Zu jedem der Begriffe gibt es Axiomensystem (mögliche Def von Matroid)

Bsp

Kreisaxiome (Circuits, Minimal abh. Mengen)

$\mathcal{C} \subseteq Pot(X)$ ist Kreisfam. eines Matroids

(C1) $\mathcal{C} \neq \{\emptyset\}$

(C2) $C, C' \in \mathcal{C}$, $C \neq C' \Rightarrow C \not\subseteq C'$

(C3) $C, C' \in \mathcal{C}$, $C \neq C'$, $z \in C \cap C'$

$\Rightarrow \exists \tilde{C} \in \mathcal{C}$ mit $\tilde{C} \subseteq (C \cup C') - z$

Rangaxiome

$r: Pot(X) \to \mathbb{N}$ ist Rangfunktion eines Matroids

(R1) $r(\emptyset) = 0$

(R2) $r(A) \leq r(A+z) \leq r(A) + 1 \quad \forall A \subseteq X,\ z \in X$

(R3) $r(A+y) = r(A+z) = r(A)$

Haben oben schon gezeigt, dass R3 gilt wenn r von Matroid kommt

$\Rightarrow r(A+y+z) = r(A)$

submodular
$r(A \cap B) + r(A \cup B) \leq r(A) + r(B)$

RÜCK →

Rangaxiome $\Rightarrow$ Unabh.ax

Gebe Elem von $J \setminus I$ einzeln zu I dazu $J \setminus I = \{x_1 \dots x_k\}$

$$I + x_1 \dots x_k \supseteq J \Rightarrow r(I + x_1 \dots + x_k) \geq |J| > r(I) = |I|$$

Sei i sd $r(I + x_1 \dots x_{i-1}) = |I| < r(I + x_1 \dots x_i)$

$$r(I) + r(I + x_1 \dots x_i) \leq r(I + x_1 \dots x_{i-1}) + r(I + x_i)$$

$$\Rightarrow r(I + x_i) = |I| + 1$$ $I + x_i$ ist unabh $\square$

Der Matroid Greedy Algorithmus

$M = (X, \mathcal{J})$ Matroid

$\omega : X \to \mathbb{R}^+$ Gewichtsfunktion

Sei $\omega(A) = \sum_{x \in A} \omega(x)$ für $A \subseteq X$

Gesucht unabh. Menge maximalen Gewichts

Greedy: Sortiere X absteigendes Gewicht

$X = x_1 \dots x_n \quad \omega(x_i) \geq \omega(x_{i+1}) \; \forall i$

$I_0 \leftarrow \emptyset$

For $k = 1$ to n

if $I_{k-1} + x_k \in \mathcal{J} \Rightarrow I_k \leftarrow I_{k-1} + x_k$

else $I_k \leftarrow I_{k-1}$

return I_n

Satz: M ein Matroid $\Rightarrow$ Der Greedy Alg berechnet maximal gewichtete unabh. Menge (Basis)

vergl KRUSKAL MST

Beweis: Sei B optimale Basis die maximalen Anfangsabschnitt (bezügl. Sortierung nach Gewicht) mit I_n gem. hat.

$$I_n = x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_r} \quad i_1 < i_2 < i_r$$
$$B = x_{j_1} x_{j_2} \cdots x_{j_r} \quad j_1 < j_2 < j_r$$

k minimal mit $i_k \neq j_k$

Greedy $\Rightarrow$ $i_k < j_k$ also $\omega(x_{i_k}) \geq \omega(x_{j_k})$

Zu $I_k = \{x_{i_1} \ldots x_{i_k}\}$ füge Elemente aus B hinzu bis eine Basis B^+ entstanden ist

Weil I_{k-1} Anfangsabschnitt von B gilt $B^+ = B + x_{i_k} - x_{j_\ell}$ für ein $\ell \geq k$

$\Rightarrow$ $\omega(B^+) \geq \omega(B)$ und B^+ hat längeren Anfangsabschnitt mit B $\lightning$ $\Rightarrow$ $I_n = B$ $\square$

Yes.

Bew umseitig

Dualität

$M = (X, \mathcal{J})$ Matroid

$M^* = (X, \mathcal{J}^*)$ wobei $I^* \in \mathcal{J}^* \Leftrightarrow$ $\exists$ Basis B von M mit $B \cap I^* = \emptyset$

Bem: Offenbar gilt $M^{**} = M$

Satz M Matroid $\Rightarrow$ M^* ist Matroid

Werden das über die Rangfkt beweisen

$G = (X, Y, E)$ bip Graph

$M \subseteq E$ Matching $\Longleftrightarrow$ Patitionsmatroide

M unabhängig in 2 Transversal matroiden

$T_X = (E, (E_x)_{x \in X})$ $T_Y = (E, (E_y)_{y \in Y})$

$G = (V, \vec{E})$ gerichtet

$H \subseteq \vec{E}$ HP gerichtet von s Quellknoten nach t Senken.

H unabhängig in

$T_{in} = (\vec{E}, E_{in(x)})$ (für $x \neq s$)

$T_{out} = (\vec{E}, E_{out(x)})$ (für $x \neq t$)

$K = (E, \text{Forest})$

Duales Matroid ist ein Matroid
(aus Schrijver Band B S 652)

zunächst stellen wir fest, dass je 2 Basen von M selbe Kardinalität haben.

Prüfen der Axiome:

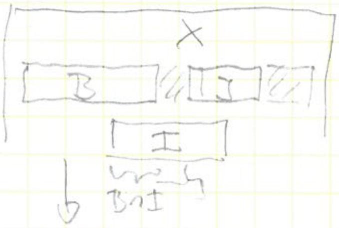
- $\emptyset \in \mathcal{J}^*$ weil $B \cap \emptyset = \emptyset$ für eine Basis B
- $I \subseteq J \in \mathcal{J}^* \Rightarrow \exists B$ mit $B \cap J = \emptyset$
  $\Rightarrow B \cap I = \emptyset \Rightarrow I \in \mathcal{J}^*$
- $I, J \in \mathcal{J}^*$ $|I| < |J|$

Sei B so dass $B \cap J = \emptyset$ und B' sd. $B' \cap I = \emptyset$

$B \setminus I \subseteq X \setminus I$ $B' \subseteq X \setminus I$

$\Rightarrow \exists$ Basis B^* mit $B \setminus I \subseteq B^* \subseteq X \setminus I$

Beh: $J \setminus I \not\subseteq B^*$



$|I \setminus J| = |I| - |I \cap J|$
$|J \setminus I| = |J| - |I \cap J|$

Andernfalls

$$|B| = |B \cap I| + |B \setminus I| \leq |I \setminus J| + |B \setminus I| <$$
$$< |J \setminus I| + |B \setminus I| \leq |B^*|$$ ↯ weil $|B| = |B^*|$

Wenn $J \setminus I \not\subseteq B^* \Rightarrow \exists\, z \in (J \setminus I) \setminus B^*$

$\Rightarrow z \in J$ $I + z \cap B^* = \emptyset$

also $\exists z \in J$ sd $I + z \in \mathcal{J}^*$

$\square$

Lineare Matroide

$M=(X,\mathcal{J})$ ist linear über $\mathbb{F}$
wenn $\exists m$ und Vektoren $(v_x)_{x\in X}$ $v_x \in \mathbb{F}^m$
sd. $I \in \mathcal{J} \Leftrightarrow (v_x)_{x\in I}$ lin unabh.

Proposition wir können M durch
die Spalten einer Matrix

$$[I_r \; B] \quad r \times n$$

darstellen $\quad n=|X|, r=r(X)$

Bew: Vektoren einer bel. Darstellung
als Spalten von A

$A: \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ $\quad$ rang$(A)=r$

ObdA erste r Spalten von A unabh. (Basis v. M)

$\exists S: \mathbb{F}^m \to \mathbb{F}^r$ sd. $S: \mathrm{Im}(A) \to \mathbb{F}^r$
Isomorphismus

$\exists T: \mathbb{F}^r \to \mathbb{F}^r$
sd. $T \circ S(v_i) = e_i$ für $i=1..r$.

Die Matrix TSA ist darstellende
Matrix vom M der geforderten
Gestalt. $\square$

Proposition M ein $\mathbb{F}$ lineares Matroid dann auch M^*

Sogar $[I_r \; B]$ darst. Matrix v. M

$\Rightarrow [B^T \; I_{n-r}]$ — " — M^*

Bew Wir zeigen: komplemente von Basen sind Basen.

sei Z Basis von M

OBdA (Umsortieren und Zeilen permutieren)

$$A = \left.\begin{bmatrix} I & 0 & B_{11} & B_{12} \\ 0 & I & B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}\right\}r$$

(unter der Spalte $\begin{smallmatrix} 0 \\ I \end{smallmatrix}$:) Spalten von Z lin unabh.

$\boxed{B_{11} \text{ hat vollen Rang}}$

$$A^* \begin{bmatrix} B_{11}^T & B_{21}^T & I & \\ B_{12}^T & B_{22}^T & & I \end{bmatrix}$$

die Vektoren in diesen Spalten sind Lin unabh. es sind $n-r$ Stück $\Rightarrow$ Basis

---

Prop: U_2^4 ist nicht $\mathbb{F}_2$ Linear

Bew: wenn darstellbar dann als

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array}$$

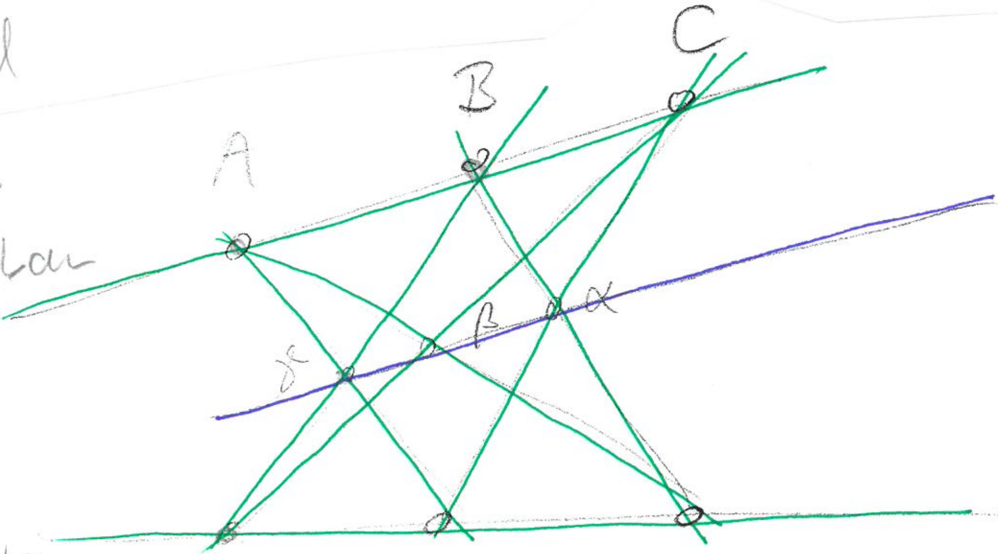
in $\mathbb{F}_2^2$ gibt es nur 3 verschiedene Vektoren $\neq 0$

einer doppelt $\Rightarrow$ eine abhängige 2Menge $\lightning$ $\square$

Proposition

Nicht alle Matroide sind linear

Betrachte M vom Rang 3 dessen abhängige 3-Mengen durch die grünen Geraden der Pappus konfig gegeben sind



Rang 3 ⇒ wenn darstellbar dann in $\mathbb{F}^3$

det als Kriterium für lin unabh.

Homogene Koordinaten

Projektive Transformation

$$A = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad a = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad \alpha = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Geradenbedingungen

ABC kollinear $\det(ABC)=0$

(A) $\longrightarrow$ $\cancel{B_2 C_3} = \cancel{B_3 C_2}$ $\qquad$ $\gamma_1 \cancel{B_3} = \cancel{\gamma_3 B_1}$ (a)

(B) $\cancel{\beta_2 c_3} = \cancel{\beta_3 c_2}$ $\qquad$ $\cancel{\beta_3 C_1} = \beta_1 \cancel{C_3}$

$\cancel{\gamma_3 b_2} = \gamma_2 \cancel{b_3}$ $\qquad$ $\cancel{b_3 c_1} = \cancel{b_1 c_3}$

(α) $\cancel{B_1 c_2} = \cancel{B_2 c_1}$

$\cancel{b_1 C_2} = \cancel{b_2 C_1}$

Betrachte Produkte aller LSeiten RSei und kürze

$\Rightarrow \gamma_1 \beta_2 = \gamma_2 \beta_1 \Rightarrow \alpha\beta\gamma$ sind kollinear

SA[E] Graphische Matroide sind $\mathbb{F}$ linear $\forall \mathbb{F}$

Bew: Betrachte $\vec{G}$ und als Vektoren
$v_e \in \mathbb{F}^n$ $n = |V|$ $v_e(i) = \begin{cases} +1 & i \text{ Anfangskn} \\ -1 & i \text{ Endkn} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
(Spalten der Netzwerkmatrix)

- $\sum_{e \in A} \alpha_e v_e = 0$ $\alpha_e \neq 0$ $\forall e \in A$
  $\Rightarrow$ Der Graph (V,A) hat keinen Knoten vom Grad 1
  $\Rightarrow$ Leer oder enthält Kreis

- $\sum_{e \in C} \delta_e v_e = 0$ wenn C Kreis

$\Rightarrow$ $A \subseteq E$ abhängig $\Leftrightarrow$ A enthält Kreis

---

Insbesondere sind graphische Matroide binär, dh. $\mathbb{F}_2$ linear

Minoren $M = (X, \mathcal{J})$ ein Matroid $e \in X$

Löschen von e
$M \setminus e = (X \setminus e, \mathcal{J} \setminus e)$ wobei
$\mathcal{J} \setminus e = \{ I \in \mathcal{J} : e \notin I \}$

Kontraktion von e
$M/e = (X \setminus e, \mathcal{J}/e)$ wobei
$\mathcal{J}/e = \{ I \in \mathcal{J} : e \notin I \text{ und } I + e \in \mathcal{J} \}$

Speziell wenn e loop (d.h. in keiner Basis) $\Rightarrow M/e := M \setminus e$

Prop: $M \setminus e$ und M/e sind Matroide

Def: M' ist Minor von M wenn M' durch Folge von Löschungen + Kontraktionen entsteht

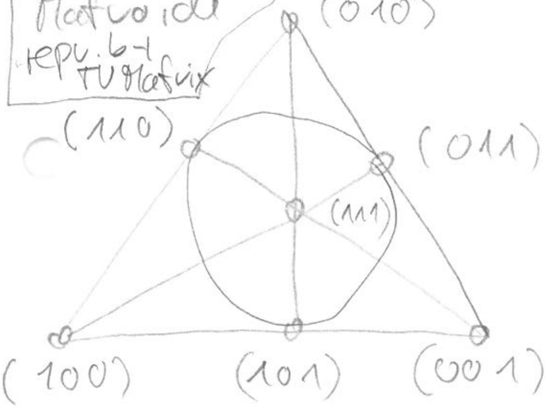
Proposition:

$$(M\setminus e)^* = M^*/e \;;\; (M/e)^* = M^*\setminus e$$

Satz: M binär $\iff$ M hat keinen U_2^4 Minor.

Satz: M binär und $\mathbb{F}$-linear $\forall \mathbb{F}$ $\iff$ Kein M_{Fano}, M^*_{Fano} als Minor.

Das sind sog. reguläre Matroide repr. by TU Matrix



M_{Fano} hat als Basen alle 3 elem TM von $[7]$ die keine Gerade der projEbene sind.

Satz M graphisch $\iff$ M hat keinen U_2^4, M_{Fano}, M^*_{Fano}, $M^*(K_5)$, $M^*(K_{33})$ Minor

Bem: Die 3 ersten verbotenen Minoren erzwingen, dass M $\mathbb{F}$-linear $\forall \mathbb{F}$ ist.

dazu [Whitney]
G planar $\iff$ $M^*(G)$ graphisch

[Wagner]
G planar $\iff$ Kein K_5 od K_{33} Minor.

$M^*(K_{33})$ ist nicht graphisch

$\forall G$ $M(G)^* = M^*(G)$

Basen von $M(K_{33})$ haben 5 Kanten

$\Rightarrow$ Basen von $M^*(K_{33})$ haben 4 Kanten

wenn $M^*(K_{33}) = M(H)$ $\Rightarrow$ H hat 5 Knoten

wlog H connected

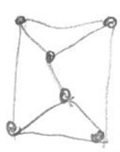
H hat 9 Kanten

Jeder Bond von K_{33} hat ≥ 3 Kanten =

K_{33} ohne e, f zush. $\forall e, f \in E$

$\Rightarrow$ H hat keine Doppelkanten

$\Rightarrow H \cong K_5 \setminus e$

Dual von $K_5 \setminus e$ ist  $\neq K_{33}$ ↯

$K_5 \setminus e$ hat 7 Dreiecke aber K_{33} hat nur 6 Bonds der Größe 3

$M^*(K_5)$ ist nicht graphisch (cf Oxley)

Basen von $M(K_5)$ haben 4 Kanten

$\Rightarrow$ Basen von $M^*(K_5)$ haben 6 Kanten

wenn $M^*(K_5) = M(H)$ $\Rightarrow$ H hat 7 Knoten

wlog H connected

$\Rightarrow$ mittlerer Grad(H) $= \frac{2|E_H|}{|V_H|} = \frac{20}{7} < 3$

$\Rightarrow$ H hat Knoten vom Grad 2 od 1

$\Rightarrow$ H hat Bond mit 1 od 2 Knoten

aber $M^*(H) = M(K_5)$ und K_5 hat keinen Kreis der Länge ≤ 2 ↯