9. Übung zur Vorlesung: **Ordnungstheorie**

Felsner/Wiechert **Sommersemester 2016**

Abgabe/Besprechung: 22. Juni 2016

---

(1) Sei $\mathcal{I}$ eine Familie von Intervallen mit ganzzahligen Endpunkten aus $[n]$. Auf $\mathcal{I} \cup [n]$ definieren wir die Inzidenzordnung $Q_{\mathcal{I}}$ durch $x < I$ wenn $x \in [n]$, $I \in \mathcal{I}$ und $x \in I$. Bestimme $\dim(Q_{\mathcal{I}})$.

(2) Zu einer Ordnung $P = (X, \leq_P)$ definieren wir $\mathsf{split}(P)$ als Ordnung auf zwei Kopien X' und X'' von X mit den Relationen $x' < y''$ genau wenn $x \leq_P y$. Zeige:

$$\dim(P) \leq \dim(\mathsf{split}(P)) \leq \dim(P) + 1$$

Hinweis: $\mathsf{split}(P)$ ist Teilordnung von $P \times C$, für eine Kette C.

- Für $1 \leq k_1 < k_2 < .. < k_t < n$ sei $\mathcal{B}_n(k_1, k_2, .., k_t)$ die Einschränkung von $\mathcal{B}_n$ auf die Ränge $k_1, k_2, .., k_t$ und $\dim(k_1, k_2, .., k_t; n)$ die Dimension dieser Ordnung.

(3) Für alle $s \leq s' < t' \leq t < n' \leq n$ gilt $\dim(s', t'\,; n') \leq \dim(s, t\,; n)$.

(4) Für alle $r < s < t < n$ gilt $\dim(s - r, t - r\,; n - r) \leq \dim(s, t\,; n)$.

(5) $\dim(k_1, k_2, .., k_t\,; n) = \dim(k_1, k_t\,; n)$.

(6) Wenn $s + t \leq n$ und $\lfloor t/s \rfloor + s - 1 \leq k$ dann gilt $\dim(1, k\,; n) > t$.

Hinweis: [Indirekt] Mit einen t-Realizer betrachte eine Menge S von Elementen die in keinem L_i maximal sind. Davon ausgehend konstruiere ein Paar (x, W) mit $|W| \leq \lfloor t/s \rfloor + s - 1$, so dass W in keinem L_i vor x kommt.

- Die *fraktionale Dimension* von P ist der kleinste Wert $t \in \mathbb{R}$ zu dem es einen Multi-Realizer $\mathcal{R}$ von P gibt mit $t = \max\left(\frac{|\mathcal{R}|}{|\mathcal{R}(a<b)|} : (a, b) \text{ unvergleichbar in } P\right)$, dabei ist $\mathcal{R}(a < b) = \{L \in \mathcal{R} : a <_L b\}$.

(7) Zeige, dass $\dim(P)$ eine obere Schranke an die fraktionale Dimension von P ist.

(8) Bestimme die fraktionale Dimension von $\mathcal{B}_n(1, t)$.