8. Übung zur Vorlesung: **Ordnungstheorie**
Felsner/Wiechert **Sommersemester 2016**
Abgabe/Besprechung: 15. Juni 2016

In der VL haben wir Stufen in Intervallordnungen und den Stufengraphen definiert.
Die Kantenfärbungszahl $A(D)$ eines gerichteten Graphen D ist die kleinste Anzahl von Farben die eine Kantenfbung ermöglicht in der es keinen monchromatischen gerichteten Pfad der Länge zumindest 2 gibt.

(1) Sei $A(S(I))$ die Kantenfärbungszahl des Stufengraphen. Zeige: $\dim(I) \leq A(S(I))+2$.

(2) Sei $\mathsf{is}(I)$ der maximale in-degree einer Knotens im Stufengraphen.
Zeige: $\dim(I) \leq \mathsf{is}(I) + 3$.

(3) Sei $\mathsf{hs}(I)$ die maximale Länge eines gerichteten Pfades im Stufengraphen.
Zeige: $\dim(I) \leq \log(\mathsf{hs}(I)) + 3$.

(4) Sei I eine Intervallordnung der Höhe h und I_n die kanonische Intervallordnung.
Zeige: $\dim(I) \leq \dim(I_{f(h)})$, wobei $f(h) \in O(h)$. Natürlich sind kleine Funktionen f zu bevorzugen.

(5) Für jeden gerichteten Graphen D gilt: $A(D) \geq \log(\chi(D))$.

(6) Mit $N(k)$ bezeichnen wir die kleinste Zahl s für die $k \leq \binom{s}{\lceil s/2 \rceil}$ gilt. Für jeden gerichteten Graphen D gilt: $A(D) \leq N(\chi(D))$.

(7) Sei $\mathcal{L}(D)$ der gerichtete Line-Graph von D, d.h. die Kanten von D sind die Knoten von $\mathcal{L}(D)$ und in $\mathcal{L}(D)$ gibt es eine Kante $a \to b$ wenn (a, b) in D ein gerichteter 2-Pfad ist.
Zeige: $\chi(\mathcal{L}(D)) = A(D)$.

(8) Sei $G(n, k)$ der $k$te Shift-Graph auf $[n]$.
Zeige: $\log^{k-1}(n) \leq \chi(G(n, k)) \leq N^{k-1}(n)$.