7. Übung zur Vorlesung: **Ordnungstheorie**
Felsner/Wiechert **Sommersemester 2016**
Abgabe/Besprechung: 08. Juni 2016

---

(1) Aufgabe zum Beweis eines Satzes aus der VL.
Zeige: $(x, y) \in Q \setminus P_i$ kann so gewählt werden kann, dass folgendes gilt. Ist C die Zusammenhangskomponente von $VT(G)$, die (x, y) enthält, dann ist die Menge der involvierten Knoten $S(C)$ autonom in P_i.

(2) Zeige: Unvergleichbarkeitsgraphen sind genau die Durchschnittsgraphen von x-monotonen Kurven über dem Intervall $[0, 1]$.

(3) Haben die Ordnungen P und Q den gleichen Vergleichbarkeitsgraphen, so haben sie auch gleich viele lineare Erweiterungen. Anders gesagt: Die Anzahl linearer Erweiterungen ist eine Vergleichbarkeitsinvariante.

(4) Eine Ordnung $P = (X, <)$ ist N-frei wenn es kein N im Diagramm von P gibt. D.h. keine 4 Elemente a, b, c, d mit Coverrelationen $a \prec c$, $b \prec c$, $b \prec d$ und Unvergleichbarkeiten $a||b$, $a||d$ und $c||d$.
Zeige: Die Eigenschaft N-frei ist eine Vergleichbarkeitsinvariante.

(5) Die Transitivität eines gerichteten Graphen auf n Knoten kann in $O(\mathrm{MM}(n))$ getestet werden. Hier ist $\mathrm{MM}(n)$ die Komplexität der Multiplikation von zwei $n \times n$ Matrizen.

(6) Sei $P = (X, <)$ eine Ordnung so dass $P - x$ eine Intervallordnung ist. Gibt es eine Erweiterung P^+ von P, so dass P^+ eine Intervallordnung auf X ist und auf der Menge $X - x$ mit P übereinstimmt?

(7) Um zu zeigen, dass die Dimension von Intervallordnungen unbeschränkt ist, kann man den Satz von Ramsey verwenden. Dazu betrachten wir die Ordnung I_n die aus allen abgeschlossenen Intervallen $[i, j]$ mit ganzzahligen Endpunkten $0 \leq i < j \leq n$ besteht. Für $n > R_3(k, 4)$ gilt dann $\dim I_n > k$. Hier ist $R_3(k, 4)$ die Ramseyzahl, die eine monochromatische 4-Menge gewährleistet, wenn die 3-Mengen mit k Farben gefärbt werden. Hinweis: Betrachte kritische Paare vom Typ $([i, j], [j, k])$.

(8) Wie viele Intervallordnungen auf $n = s + k - 1$ Elementen haben genau k maximale Antiketten die alle s-elementig sind?