3. Übung zur Vorlesung: **Ordnungstheorie**
Felsner/Wiechert **Sommersemester 2016**
Abgabe/Besprechung: 11. Mai 2016

---

(1) Sei $P = (X, \leq)$ eine Ordnung und $w : X \to \mathbb{R}_+$ eine Gewichtsfunktion. Zeige, dass es eine Gewichtung $g : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+$ auf den Antiketten gibt, so dass $\max(w(C) : C$ Kette $) = \sum_A g(A)$ und für alle $x \in X$ gilt $w(x) = \sum_{A: x\in A} g(A)$.
(Gewichteter Antidilworth)

In der Vorlesung wurden die ordnungstheoretische und die algebraische Definitionen von Verbänden nebeneinandergestellt. Die beiden sind verbunden durch $x \leq y :\iff x \wedge y = x$ und $x \vee y := \min\{z : x \leq z \text{ und } y \leq z\}$ sowie $x \wedge y := \max\{z : z \leq x \text{ und } z \leq y\}$.

(2) Zeige, dass die aus der Ordnung abgeleitete Opration $\wedge$ assoziativ ist.

(3) Zeige, dass die aus der Algebra abgeleitete Relation $\leq$ transitiv ist.

Gegeben eine Ordnung $P = (X \leq)$. Für $A \subseteq X$ definieren wir die Menge $A^{\downarrow} = \{x : x \leq a$ für alle $a \in A\}$ und dual $A^{\uparrow} = \{x : x \geq a$ für alle $a \in A\}$.

Die Dedekind-MacNeille Vervollständigung $DM(P)$ von P ist die Inklusionsordnung auf der Menge $\{A \subseteq X : A = A^{\downarrow\uparrow}\}$.

(4) Für jedes $P = (X, <)$ und $A, B \subseteq X$ gilt:

- (a) $A \subseteq A^{\downarrow\uparrow}$.
- (b) $(A \cap B)^{\uparrow} \supseteq (A \cup B)^{\uparrow} = A^{\uparrow} \cap B^{\uparrow}$.

(5) Zeige, dass im allgemeinen $A^{\downarrow\uparrow} \cup B^{\downarrow\uparrow} \neq (A \cup B)^{\downarrow\uparrow}$.

(6) Wenn P ein Verband ist gilt ausserdem:

- (a) $\bigvee A = \bigwedge A^{\uparrow}$.
- (b) $A^{\downarrow} = (\bigwedge A)^{\downarrow}$.
- (c) $A^{\uparrow\downarrow} = (\bigvee A)^{\downarrow}$.
- (d) $\bigcap_{a\in A} a^{\downarrow} = (\bigwedge A)^{\downarrow}$.

(7) Wenn Q ein Verband ist, dann ist $DM(Q) \cong Q$.

(8) Für jede Ordnung P gilt: $\dim(P) = \dim(DM(P))$.