12. Übung zur Vorlesung: **Ordnungstheorie**
Felsner/Wiechert **Sommersemester 2016**
Abgabe/Besprechung: 13. Juli 2016

---

(1) Sei P eine Ordnung mit n Elementen und Weite w. Zeige: $e(P) \leq w^n$.

(2) Identifiziere die Ordnungen mit n Elementen und Weite w, die $e(P)$ maximieren bzw. $e(P)$ minimieren.

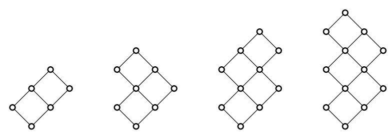
(3) Sei P eine Ordnung mit n Elementen und Höhe h. Finde eine scharfe untere Schranke für $e(P)$.

(4) Für jede serien-parallele Ordnung P mit n Elementen und einer konjugierten Ordnung $\overline{P}$ zu P gilt $e(P)e(\overline{P}) = n!$.

(5) Wie viele lineare Erweiterungen hat der Boolesche Verband B_n? (Obere und untere Schranken)

(6) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine Ordnung P_n mit $e(P_n) = n$.

(7) Die Abbildung zeigt die Ordnungen Q_2 bis Q_5. Sei Q_n die Ordnung mit $2n + 2$ Elementen in dieser Folge. Bestimme $e(Q_n)$.



(8) Die Ordnung Z_n bestehe aus den Elementen $x_1, \ldots, x_n$ und den Relationen $x_{2i-1} < x_{2i}$ und $x_{2i} > x_{2i+1}$ für alle passenden i. Dies ist die "zig-zag"-Ordnung, englisch *Fence*. Sei $E(n)$ die Anzahl der linearen Erweiterungen von Z_n.

(a) Zeige, dass $E(n)$ der Rekursionsgleichung

$$2\, E(n+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\, E(k)\, E(n-k)$$

genügt. Folgere auch $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k}\, E(k)\, E(n-k) = 0$.

(b) Ein vollständig wachsender binärer Baum ist ein Baum, bei dem jeder Knoten v entweder 0 oder 2 Kinder, sowie einen eindeutigen Namen $\mu(v) \in [n]$ hat, so dass die Namen der Kinder von v größer sind als $\mu(v)$. Sei $E'(2n + 1)$die Anzahl solcher Bäume mit $2n + 1$ Knoten. Zeige:

$$E'(2(n+1)+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+2}{2k+1}\, E'(2k+1)\, E'(2(n-k+1)-1).$$

Finde eine Bijektion zwischen der Menge dieser Bäume und der Menge der linearen Erweiterungen von Z_{2n+1} und folgere $E'(2n + 1) = E(2n + 1)$.

(c) Eine Permutation $\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n) \in S_n$ heißt alternierend, wenn $\pi_1 > \pi_2 < \pi_3 > \pi_4 < \ldots\pi_n$ gilt. Sei $M_n \subset S_n$ die Menge der alternierenden Permutationen. Finde eine Bijektion zwischen M_n und den linearen Erweiterungen von Z_n.

Die Zahlen $E(n)$ heißen Euler-Zahlen. Die ersten Euler-Zahlen sind

$$1, 1, 1, 2, 5, 16, 61, 272, 1385, 7936, 50521, 353792, \ldots$$

Die Euler-Zahlen haben die schöne exponentielle Erzeugende-Funktion

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{E(n)}{n!} = \sec(x) + \tan(x).$$

Mehr lesenswertes zu den Euler-Zahlen ist unter `http://oeis.org/A000111` zu finden.