11. Übung zur Vorlesung: **Ordnungstheorie**
Felsner/Wiechert **Sommersemester 2016**
Abgabe/Besprechung: 06. Juli 2016

---

(1) Finde eine Beschreibung der Facetten des Ordnungspolytops $\mathcal{O}(P)$. Das heißt, finde eine minimales System von Ungleichungen, das $\mathcal{O}(P)$ erzeugt.

(2) Beschreibe die Facetten des Kettenpolytops $\mathcal{C}(P)$.

(3) Seien P_1 und P_2 Ordnungen auf drei Elementen $\{x_1, x_2, x_3\}$, wobei P_1 nur die Coverrelation $x_1 < x_2$ besitzt, und P_2 nur die Coverrelationen $x_1 < x_2$ und $x_1 < x_3$. Beschreibe das Ordnungs- und das Kettenpolytop von P_1 und P_2.

(4) Sei $P = (X, \leq)$ eine Ordnung und $w : X \to \mathbb{N}$ eine Gewichtsfunktion. Zeige:

$$\max_{C \text{ Kette}} w(C) = \min |\mathcal{A}_w|,$$

wobei das Minimum über alle Familien von Antiketten geht, die jedes Element $x \in X$ mindestens $w(x)$-fach überdecken. Überlege auch wie man dieses Ergebnis auf allgemeinere Gewichtsfunktionen erweitern kann.

(5) Zeige, dass der Antiblocker des Antikettenpolytops das Kettenpolytop ist. Verwende dazu LP-Dualität (siehe unten), sowie vorherige Aufgabe. Die Matrix M_A beschreibt hier das Antikettenpolytop.

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \max & w^t x \\ \text{s.t.} & M_A x \leq \mathbf{1} \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad\qquad (D) \quad \begin{array}{ll} \min & \mathbf{1}^t y \\ \text{s.t.} & {M_A}^t y \geq w \\ & y \geq 0 \end{array}$$

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Dann definieren wir

$$\mathcal{C}(G) = \{a \in [0,1]^V \mid \sum_{v \in C} a_v \leq 1 \quad \text{für jede Clique } C \text{ von } G\}.$$

Hat eine Ordnung P den Vergleichbarkeitsgraphen G, dann stimmen das Kettenpolytop $\mathcal{C}(P)$ und $\mathcal{C}(G)$ überein.

(6) Allgemein gilt, dass die Ecken von $\mathcal{C}(G)$ nicht der Menge der charakteristischen Vektoren von unabhängigen Mengen entsprechen. Zeige dies am Beispiel des C_5.