10. Übung zur Vorlesung: **Ordnungstheorie**
Felsner/Wiechert **Sommersemester 2016**
Abgabe/Besprechung: 29. Juni 2016

---

(1) Wenn P keine Kette ist, dann gilt $\mathrm{fdim}(P) \geq 2$.

(2) Wenn P 3-irreduzibel auf k Elementen, dann gilt $\mathrm{fdim}(P) \leq \frac{2k}{k-2}$.

(3) Wenn P eine Ordnung der Höhe 2 (bipartit) ist, die einen planaren Covergraphen besitzt, dann gilt $\dim(P) \leq 4$.

Hinweis: Zeige dass P eine Subordnung eines $P_{V,F}$ ist.

Die folgenden Aufgaben zielen auf eine alternative Konstruktion von Segment-Kontakt-Darstellungen planarer bipartiter Graphen.

(4) Zeige, dass es genügt planare Quadrangulierungen zu betrachten.

Seien W und S die beiden Farbklassen einer planaren Quadrangulierung Q mit der Aussenfläche w_s, s_s, w_t, s_t. Der weisse Graph G_W ist der Graph mit Knotenmenge W und einer Kante $\{w, w'\}$ für die beiden weissen Knoten jeder beschränkten Fläche von Q.

(5) G_W besitzt eine bipolare Orientierung mit Polen w_s, w_t. Das ist eine azyklische Orientierung mit w_s als einziger Quelle und w_t als einziger Senke.

Sei $\overrightarrow{G_W}$ bipolar. Wir definieren eine Orientierung $\overrightarrow{G_S}$ des schwarzen Graphen G_S durch die folgende Regel: die schwarze Kante kreuzt die weisse Kante in jeder Fläche von Q von links nach rechts. ($\overrightarrow{G_W}$ und $\overrightarrow{G_S}$ sind duale bipolare Orientierungen).

(6) Die Orientierung $\overrightarrow{G_S}$ ist bipolar mit Polen s_s, s_t.

(7) Sei $\overrightarrow{G}$ eine bipolare Orientierung eines planaren Graphen G deren Pole an der Aussenfläche liegen.

a) Für jede Fläche F ist die Einschränkung der Orientierung auf den Randkreis von F bipolar.

b) Für jeden Knoten v der kein Pol ist gibt es genau zwei inzidente Flächen, so dass v kein Pol der auf den Randkreis eingeschränkten Orientierung ist. (In der dualen Orientierung ist der Randkreis von v bipolar.)

Für $x \in S$ seien $x_s^*, x_t^* \in W$ die Quelle und Senke der bipolaren Orientierung des Randkreises von x in $\overrightarrow{G_W}$. Ausserdem sei $\ell(x)$ die Länge des längsten gerichteten $s_s \to x$ Pfades in $\overrightarrow{G_S}$. Analoge Definitionen gelten für $x \in W$. Wir definieren Segmente:

- Für $x \in S$ ist $A_x = [(\ell(x), \ell(x_s^*)) | (\ell(x), \ell(x_t^*))]$
- Für $x \in W$ ist $B_x = [(\ell(x_s^*), \ell(x)) | (\ell(x_t^*), \ell(x))]$

(8) Zeige: $\{A_x : x \in S\} \cup \{B_y : y \in W\}$ ist eine Segment-Kontakt-Darstellung von Q.