1. Übung zur Vorlesung: **Ordnungstheorie**
Felsner/Wiechert **Sommersemester 2016**
Abgabe/Besprechung: 27. April 2016

---

(1) **a.** Wie viele Kanten hat der Cover-Graph des Booleschen Verbandes $\mathcal{B}_n$?

b. Wie viele Kanten hat der Vergleichbarkeitsgraph von $\mathcal{B}_n$?

c. Wie viele 3-Ketten gibt es im Booleschen Verband $\mathcal{B}_n$?

d. Wie viele 2-Antiketten gibt es im Booleschen Verband $\mathcal{B}_n$?

(2) Gegeben eine Menge von Ordnungen $(X, \leq_i)$ auf derselben Grundmenge X. Zeige, dass $(X, \bigcap_i \leq_i)$ eine Ordnung ist.

(3) Sei G der Vergleichbarkeitsgraph einer Ordnung P. Zeige, dass G keinen ungeraden Kreis C_{2k+1} mit $k > 1$ als induzierten Subgraphen besitzt.

(4) Sei G der Unvergleichbarkeitsgraph einer Ordnung P. Zeige, dass G keinen ungeraden Kreis C_{2k+1} mit $k > 1$ als induzierten Subgraphen besitzt.

(5) Sind $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ Graphen mit $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, dann sind $G_1 \oplus G_2$ und $G_1 \otimes G_2$ auf $V = V_1 \cup V_2$ definierte Graphen mit $E(G_1 \oplus G_2) = E_1 \cup E_2$ und $E(G_1 \otimes G_2) = E_1 \cup E_2 \cup \big\{\{v_1, v_2\} : v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\big\}$.

Co-Graphen sind rekursiv definiert:

- Der Graph mit einem Knoten ist ein Co-Graph (wir notieren ihn als $\circ$).
- Sind G_1 und G_2 Co-Graphen, dann sind auch $G_1 \oplus G_2$ und $G_1 \otimes G_2$ Co-Graphen.

Zeige: Co-Graphen sind Vergleichbarkeitsgraphen und Unvergleichbarkeitsgraphen.

(6) Wie viele transitive Orientierungen hat der Co-Graph

$$(\circ_0 \otimes ((\circ_1 \oplus \circ_2) \otimes \circ_3)) \otimes ((\circ_4 \otimes (\circ_5 \oplus \circ_6)) \oplus (\circ_7 \otimes (\circ_8 \oplus \circ_9)))?$$

(7) Wie viele transitive Orientierungen hat ein bipartiter Graph?

(8) Zeige, dass Intervallordnungen kein **2+2** enthalten. Dabei steht **k+l** für eine disjunkte Vereinigung (also ein $\oplus$) aus einer k-Kette und einer ℓ-Kette.

(9) Sei $P = (X, \leq)$ eine Ordnung. Zeige, dass es eine Abbildung $\phi : X \to \mathbb{Z}$ gibt, so dass $x \leq y$ gilt, genau dann wenn $\phi(x)$ eine Teiler von $\phi(y)$ ist.

(10) Eine T_0-Topologie auf einer Menge S ist ein Mengensystem $\Sigma \subseteq \mathrm{Pot}(S)$ mit den Eigenschaften

- $\emptyset, S \in \Sigma$.
- Mit $A, B \in \Sigma$ gilt auch $A \cup B \in \Sigma$.
- Mit $A, B \in \Sigma$ gilt auch $A \cap B \in \Sigma$.
- Für $a, b \in S$ gibt es ein $A \in \Sigma$ mit $a \in A$ und $b \notin A$ und/oder es gibt ein $B \in \Sigma$ mit $b \in B$ und $a \notin B$. (schwaches Trennungsaxiom).

Zeige: Es gibt eine Bijektion zwischen T_0-Topologien und Ordnungen auf S.