7. Übung zur Vorlesung: Ordnungstheorie
Felsner **24. Juni 2010**
Abgabe/Besprechung: 19. Juni 2010

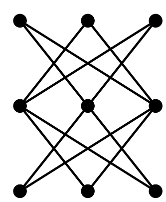
---

(1) Sei d_k die maximale Größe eine k-Antikette. Aus dem Satz von Green-Kleitman wissen wir $d_k = \min_{\mathcal{C}} \sum \min(|C|, k)$. Sei $\lambda_k = d_k - d_{k-1}$. Zeige $\lambda_k \geq \lambda_{k+1}$.

(2) Zeige, dass es im Boolschen Verband $\mathcal{B}_n$ eine Kettenzerlegung $\mathcal{C}^*$ gibt, so dass $d_k(\mathcal{B}_n) = \sum_{C \in \mathcal{C}^*} \min(|C|, k)$ für alle k gilt.

(3) Sei P_π die zur Permutation π gehörende 2-dimensionale Ordnung und k so dass das k-fach iterierte Skelett $S^k(P_\pi)$ von P_π nicht leer ist. Zeige $\mathsf{width}(P_\pi) \geq k$.

(4) Wie viele lineare Erweiterungen besitzt die abgebildete Ordnung?



(5) Die Catalan-Zahlen erfüllen die Rekursion $C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$ mit der Anfangsbedingung $C_0 = 1$. Beweise diese Rekursion für $e(P_n)$, wobei P_n das 'Leiter-Poset' aus der Vorlesung ist für das wir $e(P_n) = C_n$ gezeigt haben.

(6) Wie viele lineare Erweiterungen hat der Boolsche Verband $\mathcal{B}_n$? (Dies ist eine schwierige Frage. Die Aufgabe ist es nicht-ganz-triviale Schranken anzugeben.)

(7) Zeige, dass es zu jeder Ordnung P eine n gibt, so dass P ordnungserhaltend in den Boolschen Verband $\mathcal{B}_n$ eingebettet werden kann. Das minimale n für das dies möglich ist nennen wir $\mathsf{bdim}(P)$. Finde einige Schranken für $\mathsf{bdim}(P)$.

(8) Zeige dass $e(P)$ eine Vergleichbarkeitsinvariante ist.