4. Übung zur Vorlesung: **Ordnungstheorie**
Felsner **12. Mai 2010**
Abgabe/Besprechung: 18. Mai 2010

Gegeben eine Ordnung $P = (X \leq)$. Für $A \subseteq X$ definieren wir die Menge $A^{\downarrow} = \{x : x \leq a \text{ für alle } a \in A\}$ und dual $A^{\uparrow} = \{x : x \geq a \text{ für alle } a \in A\}$.

Die Dedekind-MacNeille Vervollständigung $DM(P)$ von P ist die Inklusionsordnung auf der Menge $\{A \subseteq X : A = (A^{\uparrow})^{\downarrow}\}$.

Sind $P = (X, \leq_P)$ und $Q = (Y, \leq_Q)$ Ordnungen, dann is die Produktordnung $P \times Q$ die Ordnung $\leq_\times$ auf $X \times Y$ mit

$$(x_1, y_1) \leq_\times (x_2, y_2) \iff x_1 \leq_P x_2 \text{ und } y_1 \leq_Q y_2.$$

(1) Seien A und B aus $DM(P)$, sind dann auch $A \cup B$ und $A \cap B$ aus $DM(P)$?

(2) Für jede Ordnung P gilt: $\dim(P) = \dim(DM(P))$.

(3) Zeige $\dim(P \times Q) \leq \dim(P) + \dim(Q)$.

(4) Finde eine Ordnung P so dass $\dim(P \times P) < 2\dim(P)$.

(5) Wenn P und Q Ordnungen mit $\mathbf{0}$ und $\mathbf{1}$ ($\mathbf{0} \neq \mathbf{1}$) sind, dann gilt:

$$\dim(P \times Q) = \dim(P) + \dim(Q)$$

(Dieses Resultat ist als Satz von Baker bekannt).

Die Ordnung S_n^k hat $n+k$ Minima $\{a_1, a_2, \ldots a_{n+k}\}$ und $n+k$ Maxima $\{b_1, b_2, \ldots b_{n+k}\}$. Element a_i ist unter allen b_j außer $b_i, b_{i+1}, \ldots, b_{i+k}$, wobei die Indizes zyklisch interpretiert werden. Insbesondere ist S_n^0 das Standardbeispiel S_n und S_2^k ist die Krone (crown) A_{k+2}. Die Ordnungen S_n^k werden *generalized crowns* genannt.

(6) Eine lineare Erweiterung von S_n^k kann höchstens $\binom{k+2}{2}$ kritische Paare umdrehen. Die Dimension von S_n^k ist mindestens $\lceil \frac{2(n+k)}{k+2} \rceil$.

(7) Die maximalen Antiketten einer Ordnung bilden einen Verband mit der Ordnungsrelation $A < B \iff \mathsf{downset}(A) \subset \mathsf{downset}(B)$. Beschreibe die Verbandsoperationen $\sqcup$ und $\sqcap$.