3. Übung zur Vorlesung: Ordnungstheorie
Felsner 4. Mai 2010
Abgabe/Besprechung: 11. Mai 2010

Gegeben eine Ordnung $P = (X \leq)$. Für $A \subseteq X$ definieren wir die Menge $A^{\downarrow} = \{x : x \leq a$ für alle $a \in A\}$ und dual $A^{\uparrow} = \{x : x \geq a$ für alle $a \in A\}$.

Die Dedekind-MacNeille Vervollständigung $DM(P)$ von P ist die Inklusionsordnung auf der Menge $\{A \subseteq X : A = (A^{\uparrow})^{\downarrow}\}$.

Sind $P = (X, \leq_P)$ und $Q = (Y, \leq_Q)$ Ordnungen, dann is die Produktordnung $P \times Q$ die Ordnung $\leq_\times$ auf $X \times Y$ mit

$$(x_1, y_1) \leq_\times (x_2, y_2) \iff x_1 \leq_P x_2 \text{ und } y_1 \leq_Q y_2.$$

(1) Für jedes $P = (X, <)$ und $A \subseteq X$ gilt:

(a) $A \subseteq (A^{\uparrow})^{\downarrow}$.

Wenn P ein Verband ist gilt ausserdem:

(b) $\bigvee A = \bigwedge A^{\uparrow}$.

(c) $A^{\downarrow} = (\bigwedge A)^{\downarrow}$.

(d) $(A^{\uparrow})^{\downarrow} = (\bigvee A)^{\downarrow}$.

(e) $\bigcap\limits_{a \in A} a^{\downarrow} = (\bigwedge A)^{\downarrow}$.

(2) Für jedes P ist $DM(P)$ ist ein Verband und $\phi : x \to x^{\downarrow}$ ist eine Einbettung (injektiver Ordnungshomomorphismus) von P nach $DM(P)$.

(3) Wenn Q ein Verband ist, dann ist $DM(Q) \cong Q$.

(4) Ist Q ein Verband und $\psi : P \to Q$ eine Einbettung, dann gibt es eine Einbettung $\psi^* : DM(P) \to Q$ so dass $\psi = \psi^* \circ \phi$.

(5) Für jede Ordnung P gilt: $\dim(P) = \dim(DM(P))$.

(6) Zeige $\dim(P \times Q) \leq \dim(P) + \dim(Q)$.

(7) Finde eine Ordnung P so dass $\dim(P \times P) < 2\dim(P)$.

(8) Wenn P und Q Ordnungen mit $\mathbf{0}$ und $\mathbf{1}$ ($\mathbf{0} \neq \mathbf{1}$) sind, dann gilt:

$$\dim(P \times Q) = \dim(P) + \dim(Q)$$

(Dieses Resultat ist als Satz von Baker bekannt).