7. Übung "Konstuktive Kombinatorik" WiSe 2012/13

Felsner/Heldt — Aufgaben für Di. 4. Dez.

(1) Sei $\mathcal{A}$ eine Mengenfamilie, $\mathcal{A} \subset \mathrm{Pot}([n])$ die *intersecting* ist. Zeige: es gibt ein $\mathcal{A}' \supseteq \mathcal{A}$ mit $|\mathcal{A}'| = 2^{n-1}$, das auch intersecting ist.

(2) Zeige: Binomialkoeffizienten sind log-konkav, d.h.

$$\binom{n}{k}^2 \geq \binom{n}{k-1}\binom{n}{k+1}$$

und benutze dies um zu zeigen, dass für $A, B \subseteq [n]$ gilt:

$$\binom{n}{|A|}\binom{n}{|B|} \geq \binom{n}{|A \cup B|}\binom{n}{|A \cap B|}.$$

(3) Sei $P = (A \cup B, <)$ eine Ordnung der Weite zwei mit den beiden Ketten $a_1 < a_2 < \ldots < a_m$ und $b_1 < b_2 < \ldots < b_n$. Zeige, dass die Ereignisse $S = \{L : a_i \text{ ist eines der letzten } k \text{ Elemente in } L\}$ und $T = \{L : b_j \text{ ist eines der ersten } \ell \text{ Elemente in } L\}$ positiv korreliert sind. Der W-Raum besteht dabei aus den linearen Erweiterungen von P mit der Gleichverteilung, d.h. $\Pr(L) = \frac{1}{\mathcal{L}(P)}$.