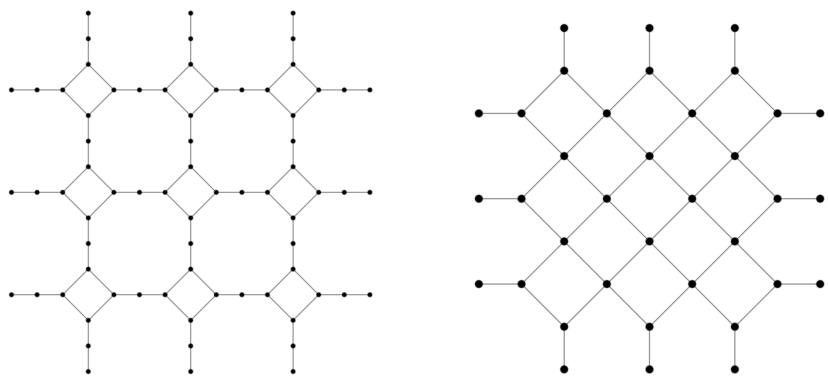
14. Übungszettel für die Vorlesung: **Felsner, Heldt**
Konstruktive Kombinatorik **29. Januar 2013**
Tutoriendatum: 05.02.2013
`http://page.math.tu-berlin.de/~felsner/Lehre/dsI+III12.html`

---

(1) Vervollständige den Beweis für $A(n) = 2^n \cdot A(n-1)$ aus der Übung, bei dem $A(n)$ die Anzahl von Domino-Tilings des Aztekischen Diamanten der Größe n ist. Zeige dazu, dass der Graph $G(n)$ genau 2^n mal so viele Tilings wie der Graph $H(n)$ besitzt.



Die Graphen $G(3)$ und $H(3)$.

(2) Ein Ferrer-Diagramm besitzt ein natürliches Konjugiertes. Dieses erhält man, indem man dass Diagramm an der Achse $x = y$ spiegelt. Analog bilden die Ebenen-Partitionen Tripel von zueinander Konjugierten Partitionen. Beschreibe die die zwei Partitionen, die zu einer Ebenen-Partition $E \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ gehören und gibt ein paar Beispiele an, die diese Operationen verdeutlichen.

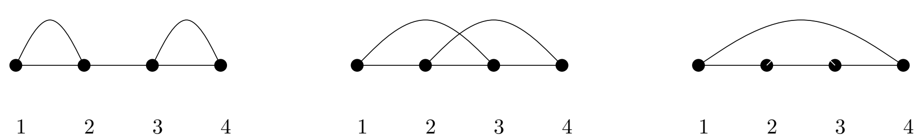
(3) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine schiefsymmetrische Matrix. Es gilt also $A^T = -A$.

(a) Zeige für ungerades n: $\det(A) = 0$.

Sei nun $n = 2k$. Das Signum $\mathrm{sign}(m)$ eines Matching m der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$ ist definiert, als die Anzahl von Kreuzungen der Kanten, wenn man das Matching wie in der Skizze zeichnet. Sei M die Menge aller dieser Matchings und

$$\mathrm{Pf}(A) := \sum_{m\in M} \mathrm{sign}(m) a_{m_{1,1},m_{1,2}} \cdot a_{m_{2,1},m_{2,2}} \cdot \ldots \cdot a_{m_{k,1},m_{k,2}}$$

die *Pfaffsche Determinante* von A (dabei ist $m_{i,1}m_{i,2}$ die i-te Matching-Kante von m) .



Die drei möglichen Matchings für $n = 4$. $\mathrm{sign}(12, 34) = 1$, $\mathrm{sign}(13, 24) = -1$ und $\mathrm{sign}(14, 23) = 1$.

Für $k = 2$ und eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ mit Einträgen b_{ij} gilt also

$$\mathrm{Pf}(B) = 1 \cdot b_{1,2} \cdot b_{3,4} + (-1) \cdot b_{1,3} \cdot b_{2,4} + 1 \cdot b_{1,4} \cdot b_{2,3}.$$

(b) Zeige $(\mathrm{Pf}(A))^2 = \det(A)$. *Hinweis:* Nutze eine Überlagerung zweier Matchings und zeige, dass die Summer aller Permutationen die einen ungeraden Kreis enthalten, nichts zur Determinante beiträgt.

(4) Sei G ein planarer Graph mit $n = 2k$ Knoten. Zeige, dass es eine Orientierung G' von G gibt, so dass die orientierte Adjazenzmatrix $A(G')$ mit Einträgen a_{ij},

$$a_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{falls } (i,j) \in E(G') \\ -1 & \text{falls } (j,i) \in E(G') \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

existiert, die

$$|\mathrm{Pf}(A(G'))| = \#\text{Matchings von } G$$

erfüllt (dabei ist $E(G')$ die Kantenmenge von G'). Zeige dazu –analog zu dem Beweis der Kasteleyn-Signatur– dass das Vorzeichen des Beitrages von zwei beliebigen Matchings gleich sein muss und überlege dir, was dies für einen einzelnen Kreis bedeutet.