13. Übungszettel für die Vorlesung: **Felsner, Heldt**

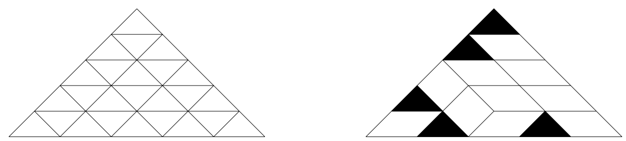
Konstruktive Kombinatorik **23. Januar 2013**

Tutoriendatum: 29.01.2013

`http://page.math.tu-berlin.de/~felsner/Lehre/dsI+III12.html`

---

(1) Wir untersuchen Tilings des Dreiecksgitters mit Romben, also zwei Dreiecken, die eine Gemeinsame Kante besitzen.



Das Dreieck mit $n = 5$ ein ein Beispiel-Tiling des Dreiecks mit 5 schwarzen Löchern

Das Gebiet ist dabei ein Dreieck mit n Flächen / Dreiecken auf der Grundseite (aus kleineren Dreiecken zusammengesetzt), das n Löcher aufweist. *Die Löcher sind dabei stets Dreiecke, deren Grundseite mit der Grundseite des grossen Dreiecks übereinstimmt!*

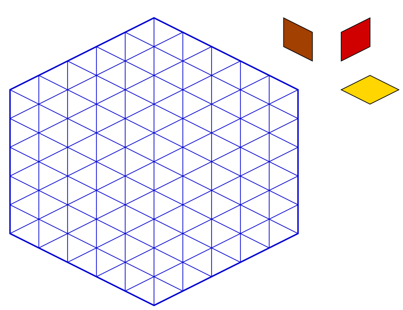
(a) Zeige, dass ein solches Tiling nur existieren kann, wenn in jedem Teildreieck der Seitenlänge k höchstens k Löcher vorhanden sind.

(b) Zeige, dass die in (a) genannte Notwendige Bedingung für die Existenz eines Tilings auch hinreichend ist.

(2) Die *MacMahon Formel*

$$M(r,s,t) = \prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{s}\prod_{k=1}^{t} \frac{i+j+k-1}{i+j+k-2}$$

zählt die Tilings eines Sechsecks mit Seitenlänge r, s, und t mit Romben.



Die drei Arten von Romben und das zu kachelnde Sechseck; für dieses Sechseck gibt es 267227532 Pflasterungen

(a) Sei $\Omega_{r,s,t}$ die Menge aller Tilings des Sechsecks mit Seitenlängen r, s, und t. Seien $T, T' \in \Omega_{r,s,t}$ Tilings. Zeige, dass in T und T' gleichviele rote Romben (siehe Skizze) vorkommen. Zeige, dass auch die Anzahl gelber und brauner Romben gleich ist.

(b) Die gewichtete MacMahon Formel ist $\prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{s}\frac{1-q^{i+j+t-1}}{1-q^{i+j-1}}$. Zeige, dass diese für $q \to 1$ der MacMahon Formel entspricht.

(3) Lies das Paper *Dodgson's Determinant-Evaluation Rule Proved by TWO-TIMING MEN and WOMEN* von *Doron Zeilberger* und fülle alle Beweislücken.