12. Übungszettel für die Vorlesung: **Felsner, Heldt**
Konstruktive Kombinatorik **16. Januar 2013**
Tutoriendatum: 22.01.2013
`http://page.math.tu-berlin.de/~felsner/Lehre/dsI+III12.html`

---

(1) In der Vorlesung wurde eine Bijektion zwischen den reduzierten Pflasterungen von $A(n)$ und den reduzierten Pflasterungen von $A(n-1)$ gezeigt. Gilt also

$$\#\text{red. Pfl.} A(n) = \#\text{red. Pfl. } A(n-1) = \cdots = \#\text{red. Pfl.} A(1)?$$

Warum nicht?

(2) Beweise das Hauptlemma aus der Vorlesung. Zu der vierten Aussage, schreiben die Autoren in Ihrer Arbeit:

We must also show that $S(\tilde{T})$ is odd-deficient. $S(\tilde{T})$ cannot contain any odd blocks, because the inverse shuffle (which is the same as the shuffle) of an odd block is an odd block. It remains to show that the boundary of $U_{S(\tilde{T})}$ has corners only at odd vertices. Let v be an even vertex. It is easily checked that v is a corner of $U_{\tilde{T}}$ if and only if $U_{\tilde{T}}$ contains unequal numbers of black squares and white squares adjacent to v (and similarly for $U_{S(\tilde{T})}$). A domino $d \in \tilde{T}$ may cover, of the four squares adjacent to v, one black square, one white square, or one square of each color. In these three cases, $S(d)$ covers one white square, one black square, or no squares at all, respectively. Thus the even vertex v could be a corner of $U_{S(\tilde{T})}$ only if it was already a corner of $U_{\tilde{T}}$. But we assumed $\tilde{T}$ was odd-deficient, so that its only corners were at odd vertices.

(Seite 14 und 15 von *Alternating sign matrices and domino tilings*, von Elkies, Kuperberg, Larsen & Propp. siehe: `http://de.arxiv.org/PS_cache/math/pdf/9201/9201305v1.pdf`) Dabei sind *even vertices* die blauen Knoten und *odd vertices* die Gelben. *odd-deficient* hieß bei uns ein reduziertes Tiling und mit $U_{\tilde{T}}$ bzw. $U_{S(\tilde{T})}$ sind die entsprechenden freien Felder gemeint, die nicht von Dominos überdeckt sind.

(3) Sei Ω die Menge aller Domino Tilings von $A(n)$. Ein Flip ist das ersetzen von zwei parallelen horizontalen Dominos durch zwei parallele vertikale (oder vice versa). Zeige, dass jedes Domino Tiling durch eine Folge von Flips in jedes andere überführt werden kann.