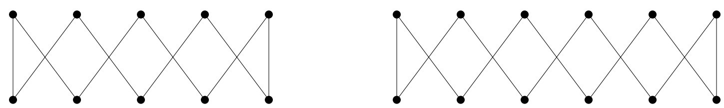
6. **Übungszettel für die Vorlesung:** **Felsner, Heldt**
Konstruktive Kombinatorik **20. November 2012**
Tutoriendatum: 27.11.2012
`http://page.math.tu-berlin.de/~felsner/Lehre/dsI+III12.html`

---

(1) Beweise, dass es im boolschen Verband B_n genau $\frac{1}{2}4^n - 3^n + \frac{1}{2}2^n$ viele unvergleichbare Paare gibt.

(2) Das folgende Bild zeigt das Poset C_5 und das Poset C_6.



Analog ist das Poset C_k definiert, das aus $2k$ Elementen und $2k$ Relationen besteht, und sich auf dieselbe Art und Weise zeichnen lässt.
Zeige, das C_k keine bessere als die angegebene Zeichnung besitzt, also dass jede Zeichnung, die durch zwei lineare Erweiterungen induziert wird, mindestens $k-2$ Fehlerpaare aufweist (in der Skizze oben sind dies genau die Elemente, die untereinander gezeichnet sind aber keine Relation aufweisen).

(3) Sei P ein Poset mit n Elementen und $G(P)$ der Graph der linearen Erweiterungen von P. Ziel ist es, zu zeigen, dass $G(P)$ ein konvexer, induzierter Teilgraph des Skelett des Permutaeders $G(P_n)$ ist. Dazu ist zu beweisen, dass jedes Element $\rho \in G(P_n)$ das auf einem kürzesten Pfad von $\pi \in G(P)$ zu $\sigma \in G(P)$ liegt, auch $\rho \in G(P)$ gilt.

(a) Zeige, dass ObdA $\pi = id$ angenommen werden kann, also das die Anwendung von π^{-1} auf die Knoten von $G(P)$ einen Automorphismus von $G(P)$ darstellt.

(b) Zeige, dass alle $\rho \in S_n$, die auf kürzesten Pfaden zwischen id und σ im Skelett des Permutaeders liegen, auch lineare Erweiterungen von P sind (Hinweis: Betrachte die Inversionen der beteiligten Permutationen).

(4)

(a) Untersuche, wann in Kleitmans Lemma Gleichheit auftritt.

(b) Sei A ein Downset und U ein Upset im boolschen Verband B_n. Zeige:

$$|A| \cdot |U| \geq 2^n \cdot |A \cap U|$$