5. Übungszettel für die Vorlesung: **Felsner, Heldt**

Konstruktive Kombinatorik **15. November 2012**

Tutoriendatum: 20.11.2012

`http://page.math.tu-berlin.de/~felsner/Lehre/dsI+III12.html`

Definition:

$$\left\{ {n \atop k} \right\} := \text{Partitionen von } [n] \text{ in } k \text{ nichtleere Blöcke}$$

sind die *Stirling Zahlen zweiter Art*. Zum Beispiel sind die Partitionen von [4] in 2 nichtleere Blöcke $\{\{1,2,3\},\{4\}\}$, $\{\{1,2,4\},\{3\}\}$, $\{\{1,3,4\},\{2\}\}$, $\{\{2,3,4\},\{1\}\}$, $\{\{1,2\},\{3,4\}\}$, $\{\{1,3\},\{2,4\}\}$, und $\{\{1,4\},\{2,3\}\}$. Also ist $\left\{ {4 \atop 2} \right\} = 7$.

(1)

(a) Zeige $\left\{ {n \atop 2} \right\} = 2^{n-1} - 1$.

(b) Zeige $\left\{ {n \atop k} \right\} = k \cdot \left\{ {n-1 \atop k} \right\} + \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}$.

(c) Zeige $\left[{n \atop k} \right] \geq \left\{ {n \atop k} \right\}$.

(2)

(a) Zeige $x^n = \sum \left\{ {n \atop k} \right\} x^{\underline{k}}$. mit $x^{\underline{k}} = x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot \ldots \cdot (x-k+1)$.

(b) Zeige $x^{\underline{n}} = \sum \left[{n \atop k} \right] (-1)^{n-k} x^k$

(*Hinweis:* Zeige und verwende $(-x)^{\overline{n}} = (-1)^n \cdot x^{\underline{n}}$).

(c) Zeige $\sum\limits_k \left\{ {n \atop k} \right\} \left[{k \atop m} \right] (-1)^{k-m} = \delta_{n=m}$.

(3) *Die Lösung ist schriftlich auszuarbeiten und abzugeben:* Betrachte folgenden Pseudo-Code:

```
GenLinExt(P)
  L := [ ]
  while P != [ ]
    M := Min(P)
    x := choose(M)
    L := L + x
    P := P - x
  return L
```

Beweise, dass die Ergebnisliste L eine Lineare Erweiterung des Posets P ist. Zeige weiterhin, dass jede lineare Erweiterung auf diese Art und Weise gewonnen werden kann und gib einen Algorithmus an, der eine Liste aller linearen Erweiterungen von P generiert.