4. Übungszettel für die Vorlesung: **Felsner, Heldt**
Konstruktive Kombinatorik **06. November 2012**
Tutoriendatum: 13.11.2012
`http://page.math.tu-berlin.de/~felsner/Lehre/dsI+III12.html`

---

(1) Zeige, dass jede Ecke eines n-dimensionalen H-Polytops mindestens n Ungleichungen mit Gleichheit erfüllt.

(2) Gib einen formalen Beweis für das Lemma aus dem Beweis von $U_n \subseteq P_n$. Zeige also, dass für eine Ecke x von U_n und $S, S' \subseteq [n]$ Indexmengen so, dass x Gleichheit in den entsprechenden Ungleichungen liefert, gilt $S \subseteq S'$ oder $S' \subseteq S$.

(3) Seien, P_n, Q_n und U_n die Polytope aus der Vorlesung. Beweise $P_n \subseteq Q_n \subseteq U_n$ und damit $Q_n = P_n$.

(4) Seien $n, k \in \mathbb{N}$ mit $n < k$ und $a \in \binom{[n]}{k}$. Sei $v = (v_1, \dots, v_n) \in \{0,1\}^n$ der charakteristische Vektor von a. Die *Inversionen* von a sind Paare $1 \leq i < j \leq n$ mit $v_i = 1$ und $v_j = 0$. Sei nun $B(n, k, s)$ die Anzahl von k-Teilmengen von $[n]$ mit genau s Inversionen. Weiterhin sei

$$H(n,k) := \sum_{s \geq 0} B(n,k,s) \cdot x^s.$$

Beweise (kombinatorisch) folgende Gleichungen für $H(n,k)$:

(a) $H(n,k) = H(n, n-k)$

(b)
$$\begin{aligned} H(n,k) &= x^k \cdot H(n-1,k) + H(n-1,k-1) \\ &= H(n-1,k) + x^{n-k} \cdot H(n-1,k-1) \end{aligned}$$

(c) $H(n+m,k) = \sum_{s=0}^{k} x^{s(m-k+s)} \cdot H(n,s) \cdot H(m,k-s)$

(d) $H(n+1,2) = \sum_{s=0}^{n} x^s [s]_x = \sum_{s=0}^{n-1} x^s \cdot \frac{1-x^{s+1}}{1-x}$

(5)

(a) Seien A Erzeugende und R Relationen wie in der Vorlesung. Zeige, das die Äquivalenzklassen von Produkten der Erzeugenden modulo R tatsächlich eine Gruppe bilden.

(b) Zeige, dass sich jede endliche Gruppe auf diese Art darstellen lässt.

(c) Finde eine derartige Darstellung für die Kleinsche Vierergruppe und $\mathbb{Z}_{/(7)}$.

(d) Beschreibe die Gruppe, die durch $A = \{a, b, c\}$ und

$$R = \{a^3 = e, b^2 = e, c^2 = e, ab = ba, ac = ca, cbc = bcb\}$$

definiert ist.