10. Übungszettel für die Vorlesung: **Felsner, Heldt**

Konstruktive Kombinatorik **19. Dezember 2012**

Tutoriendatum: 8.01.2013

`http://page.math.tu-berlin.de/~felsner/Lehre/dsI+III12.html`

Definition: Für ein Turnier T ist $C_3(T)$ die Anzahl von gerichteten Dreiecken in T.

(1)

(a) Sei T ein Turnier und K ein gerichteter Kreis ein T. Das Turnier T' entsteht aus T durch umorientieren der Kanten von K. Beweise das $C_3(T) = C_3(T')$ gilt, ohne Aufgabenteil (b) zu verwenden.

(b) Sei T ein Turnier mit Score-Folge $s = (s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_n)$. Zeige:

$$C_3(T) = \binom{n}{3} - \sum_{i=1}^{n} \binom{s_i}{2}$$

(2) Sei Ω die Menge aller Turniere auf n Knoten mit der Gleichverteilung. Zeige:

$$E(C_3(T)) = \frac{1}{4}\binom{n}{3}$$

Dabei ist $E(C_3(T))$ die erwartete Anzahl von gerichteten Dreiecken in einem zufälligen Turnier.

(3) Finde eine Möglichkeit, alle Score-Folgen für ein $n \in \mathbb{N}$ zu erzeugen. Analysiere den Aufwand pro Score-Folge deines Verfahrens.

(4) Zeige, dass es höchstens $\binom{2n-2}{n-1}$ verschiedene Score-Folgen von Turnieren mit n Knoten gibt.

(5) Sei A eine $n \times n$ Matrix mit Einträgen $\in \{0, 1\}$ und alle Zeilen- und Spaltensummen $= 2$. Zeige, dass

$$2 \leq per(A) \leq (2)^{\frac{n}{2}} \quad (\approx 1.41^n)$$

gilt. *Bemerkung:* Die van der Waerden Vermutung kann hier angewendet werden, da $\frac{1}{2}A$ doppelt stochastisch ist. Sie liefert hier aber lediglich die untere Schranke: $per(A) = 2^n \cdot per(\frac{1}{2}A) \geq 2^n \cdot \frac{n!}{n^n} \approx (\frac{2}{e})^n \approx 0.735^n < 1$.