9. Übung "Kombinatorische Algorithmen" SoSe 2006

Stefan Felsner Aufgaben für Di. 4. Juli

(1) Gegeben $n \geq 5$ Punkte in der Ebene. Zeige, dass die Wahrscheinlichkeit, dass von vier nacheinander ausgewählten Punkten (gv. und unabh.) der letzte in der konvexen Hülle der anderen liegt *echt* kleiner als 1/4 ist.

(2) Sei K eine konvexe Menge in der Ebene mit Fläche 1 und A die Fläche des von drei zufälligen Punkten aus K aufgespannten Dreiecks. Zeige, dass für $\alpha \in [0,1]$ gilt:

$$\Pr(A \leq \alpha) \geq \alpha.$$

(3) Sei $(n)_k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$ und $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$. Zeige $\Delta \frac{(n)_{k+1}}{k+1} = (n)_k$ und folgere $\sum_{m \leq n} (n)_k = \frac{(n+1)_{k+1}}{k+1}$.

(4) Sei X eine Menge von n reellen Zahlen und $R \subset X$ ein *random sample* mit $|R| = r$, d.h. jede r-elementige Teilmenge von X kommt mit gleicher Wahrscheinlichkeit vor.

Berechne die erwartete Anzahl von Elementen aus X die nicht in dem Intervall $[\min R, \max R]$ liegen.

(5) Analysiere die Laufzeit des folgenden randomisierten Verfahrens zur Berechnung des Minimums aus einer Menge A. Insbesondere ist der Parameter r geeignet festzulegen.

Die Notation $A \uplus B$ ist als Multimengenvereinigung zu verstehen. Wenn also q 3-fach in A und 5-fach in B vorkommt, dann ist q 8-fach in $A \uplus B$. Von der Unterroutine Minimum darf angenommen werden, dass sie in linearer Zeit läuft.

```
CloneMin(A)
    R ← Choose((A r))
    x ← Minimum(R)
    V ← ∅
    for all a ∈ A do
        if a < x then V ← V ⊎ {a}
    if V ≠ ∅ then
        A ← A ⊎ V
        x ← CloneMin(A)
    return (x)
```