8. Übung "Kombinatorische Algorithmen" SoSe 2006

Stefan Felsner — Aufgaben für Di. 20. Juni

(1) (*von Neumann Filter*) Beschreibe eine Methode, mit der man aus der Kopf/Zahl Folge von Experimenten mit einer Münze mit Pr(Kopf) $= p$ eine (kürzere) Folge von fairen Zufallsbits erhält.

Hinweis: Betrachte Paare von aufeinanderfolgenden Würfen.

(2) Beweise eine k-te Moment Abschätzung für Abweichungen:

$$\Pr\left(|X - \mathsf{E}(X)| \geq t\sqrt[k]{\mu_X^{(k)}}\right) \leq \frac{1}{t^k}$$

hierbei ist k gerade und $\mu_X^{(k)} = \mathsf{E}((X - \mathsf{E}(X))^k)$.

(3) Sei $\mathbf{Z}_p$ der Restklassenring modulo p und p prim. Für unabhängig gleichverteilt aus $\mathbf{Z}_p$ gezogene a und b betrachten wir die Zufallsvariablen $Y_i = ai+b \mod p$. Zeige: Y_i ist gleichverteilt und für $i \neq j$ sind Y_i und Y_j unabhängig.

(4) Für zwei unabhängige diskrete Zufallsvariable $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ gilt

- $\mathsf{Var}(X + Y) = \mathsf{Var}(X) + \mathsf{Var}(Y)$.

(5) (*Gesetz der großen Zahlen*) Seien X_i unabhängige Zufallsvariablen mit derselben Verteilung wie X. Für $\varepsilon, \delta > 0$ gibt es ein $N(\varepsilon, \delta)$, so dass für alle $n \geq N(\varepsilon, \delta)$ und $Z_n = \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n)$ gilt

$$\Pr(|Z_n - \mathsf{E}(X)| \geq \delta) \leq \varepsilon.$$

(6) (*Jensens Ungleichung*) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex. Zeige, dass für jede Zufallsvariable X die nur endlich viele Werte annimmt gilt: $\mathsf{E}(f(X)) \leq f(\mathsf{E}(X))$.

(7) (*Cupon Collector*) Sei S eine Menge von n Coupons, eine *Ziehung* liefert ein gleichverteiltes Zufallselement aus S, die Ziehungen sind unabhängig. Sei T die Anzahl der Ziehungen die nötig sind bis jedes der n Elemente einmal gesehen wurde. Bestimme den Erwartungswert von T. (Hinweis, zerlege T in einfachere Zufallsvariable ($T = \sum_{k=1}^{n} Z_k$).

(8) Im Cupon Collector Experiment mit $n = 1000$ haben wir $\mathsf{E}(T) \approx 7485,5$ Ziehungen. Verwende die Markov- und k-te Moment Abschätzungen um gute Schranken für $\Pr(T \geq 15000)$ zu erhalten ($15000 \approx 2\,\mathsf{E}(T)$).