7. Übung "Kombinatorische Algorithmen" SoSe 2006

Stefan Felsner Aufgaben für Di. 13. Juni

(1) Gegeben sechs faire Würfel. Sei E_i das Ereignis, dass in einem Wurf mit diesen Würfeln genau i Augenzahlen erscheinen. Zeige $\Pr(E_4) > 1/2$.

(2) Für zwei Zufallsvariable $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$ gilt

- $\mathsf{E}(c \cdot X + Y) = c \cdot \mathsf{E}(X) + \mathsf{E}(Y)$

(3) Für zwei unabhängige Zufallsvariable $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ gilt

- $\mathsf{E}(X \cdot Y) = \mathsf{E}(X) \cdot \mathsf{E}(Y)$

(4) Seien π und σ Permutationen die unabhängig aus der Gleichverteilung auf S_n gezogen wurden. Bestimme die erwartete Anzahl von Indizes i die in beiden Permutationen gleichzeitig ein links-rechts Maximum sind.

(5) Für Permutationen $\pi = (a_1, \dots, a_n)$ betrachten wir die Zufallsvariable $Y = \min(i \ : \ a_i < a_1)$ mit der Konvention $Y(\emptyset) = 0$. Bestimme den Erwartungswert von Y für Permutationen mit der Gleichverteilung.

(6) Sei $\pi \in S_n$ eine Permutation. Ein Zykel von π ist ein geordnetes Tupel $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ mit $\pi(i_1) = i_2$, $\pi(i_2) = i_3$, $\dots$ $\pi(i_{k-1}) = i_k$ und $\pi(i_k) = i_1$. Für Permutationen mit der Gleichverteilung gilt:

$$\Pr(\text{ 1 liegt in einem Zykel der Länge } k \text{ }) = \frac{1}{n}.$$

(7) Sei $Z(\pi)$ die Anzahl der Zykel einer Permutation π. Bestimme $\mathsf{E}(Z)$ für Permutationen mit der Gleichverteilung. Hinweis: Betrachte die Zufallsvariablen

$$Y_i(\pi) = \frac{1}{\text{Länge des Zykels von } \pi \text{ in dem } i \text{ liegt}}.$$

(8) Sei $F(\pi)$ die Anzahl der Fixpunkte einer Permutation π. Bestimme $\mathsf{E}(F)$ für Permutationen mit der Gleichverteilung.

(9) Sei $\left[{n \atop k}\right]$ die Anzahl der Permutationen von $[n]$ mit genau k Zyklen. Es gilt:

$$(a) \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} = n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}, \quad (b) \begin{bmatrix} n+1 \\ 1 \end{bmatrix} = n!, \quad (c) \begin{bmatrix} n+1 \\ 2 \end{bmatrix} = n!\ \mathsf{H}_n.$$