4. Übung "Kombinatorische Algorithmen" SoSe 2006

Stefan Felsner Aufgaben für Di. 16. Mai

(1) Zeige, dass es für alle $n \geq 1$ einen *universellen de Bruijn Pfad* gibt, das ist eine Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ deren erste m^n Symbole einen de Bruijn Kreis für Wörter der Länge n über dem Alphabet $\{1, .., m\}$ bilden.

Hinweis: Finde eine Erweiterung von den ersten m^n auf die ersten $(m+1)^n$ Symbole der Folge durch Modellierung als Euler-Kreis Problem auf einem geeigneten Graphen.

(2) Sei $x_1 x_2 \ldots x_{2^n}$ ein Euler Kreis im de Bruijn Graphen B_{n-1}. Zeige, dass die Folge $x_1 x_2 \ldots x_{2^n}$ gleich viele 0 und 1 enthält.

(3) Beweise die klassische Möbiusinversion für Funktionen $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und $\mu(d) = (-1)^t$ wenn d das Produkt von t verschiedene Primfaktoren ist, ansonsten ist $\mu(d) = 0$.

$$g(r) = \sum_{s|r} f(s) \quad \Longleftrightarrow \quad f(r) = \sum_{s|r} \mu(\frac{r}{s}) g(s)$$

(4) Eine *Halskette* der Länge n in m Farben ist eine zyklische Anordnung von n Perlen die je eine von m verfügbaren Farben haben. Halsketten sind gleich wenn sie durch eine Rotation zur Deckung gebracht werden können. Sei $H(n, m)$ die Anzahl der Halsketten der Länge n in m Farben. Es gilt $H(n, 1) = 1$, $H(3, 2) = 4$, $H(3, 3) = 8$ und $H(4, 2) = 6$. Finde eine geschlossene Formel für $H(n, m)$.

(5) Für die lexikographische Ordnung auf Strings ist zu zeigen:

- $\beta\alpha \leq \lambda \leq \beta\gamma \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \beta\delta$.
- $\alpha < \beta$ und $|\alpha| \geq |\beta| \quad \Longrightarrow \quad$ für beliebige γ und δ gilt $\alpha\gamma < \beta\delta$.
- $\alpha < \beta$ und $|\alpha| < |\beta|$ und $\beta \neq \alpha\rho$
  $\Longrightarrow \quad$ für beliebige γ und δ gilt $\alpha\gamma < \beta\delta$.

(6) Sei $\gamma = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_t$ die eindeutige Primfaktorzerlegung von γ, das heißt die λ_i sind alle prim und $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_y$. Zeige, dass λ_1 der längste prime Prefix von γ ist.