3. Übung "Kombinatorische Algorithmen" SoSe 2006

Stefan Felsner — Aufgaben für Di. 9. Mai

(1) Sei $I^\star_{2^n}$ die Intervall-Ordnung die aus allen offenen Intervallen gerader Länge mit Endpunkten in $\{1, \dots, 2^n\}$ besteht und $D^\star_{2^n}$ ihr Diagramm. Beweise: $\chi(D^\star_{2^n}) = n = \mathsf{h\ddot{o}he}(I^\star_{2^n}) + 1$.

Hinweis: Aus der Vorlesung wissen wir, dass $\chi(D_{2^{n-1}}) = n-1$, wobei D_{2^n} das Diagramm der Intervall-Ordnung I_{2^n} ist, die die aus allen offenen Intervallen mit Endpunkten in $\{1, \dots, 2^n\}$ besteht.

(2) Beschreibe einen komplementären Gray-Zykel im Boolschen-Verband $\mathcal{B}_{2n}$, d.h. komplementäre Vektoren sollen sich im Zykel gegenüberliegen.

Anwendungen von Gray-Codes

(3) Die *Permanente* einer $n \times n$ Matrix A ist definiert als

$$\mathrm{per}(A) = \sum_{\pi \in S_n} a_{1\pi_1} a_{2\pi_2} \cdots a_{n\pi_n}$$

Beweise die Ryser-Formel für die Permanente

$$\begin{aligned} \mathrm{per}(A) &= \sum_{T \subseteq [n]} (-1)^{n+|T|} \sum_{s:[n]\to T} \prod_{1\le i\le n} a_{is(i)} = \sum_{T\subseteq[n]} (-1)^{n-|T|} \prod_{1\le i\le n} \sum_{j\in T} a_{ij} \\ &= \sum_{x \in \mathbf{2}^{[n]}} (-1)^{n-x_1-x_2-\ldots-x_n} \prod_{1\le i\le n} \sum_{1\le j\le n} x_j a_{ij} \end{aligned}$$

Hinweis: Inklusion-Exklusion.

(4) Wie viele Multiplikationen und Additionen erfordert die Evaluation von $\mathrm{per}(A)$ wenn man die Formel aus der vorigen Übung verwendet und die Summenden in einer Gray-Ordnung von $\mathbf{2}^{[n]}$ abarbeitet. Vergleiche dies mit der Anzahl von Operationen die die Evaluation von $\mathrm{per}(A)$ mit der definierenden Formel erfordert.

(5) Zeige, dass es für alle $n \ge 1$ einen *universellen de Bruijn Pfad* gibt, das ist eine Folge $a_1, a_2, a_3, \dots$ deren erste m^n Symbole einen de Bruijn Kreis für Wörter der Länge n über dem Alphabet $\{1, .., m\}$ bilden.

Hinweis: Finde eine Erweiterung von den ersten m^n auf die ersten $(m+1)^n$ Symbole der Folge durch Modellierung als Euler-Kreis Problem auf einem geeigneten Graphen.

(6) Zeige, dass $(0, \dots, 0, n)$ die Folge der Eigenwerte der $n \times n$ Matrix J ist, hier ist J die Matrix deren Einträge alle 1 sind.