2. Übung “Kombinatorische Algorithmen” SoSe 2006

Stefan Felsner Aufgaben für Di. 2. Mai

(1) Finde einen reflektierten Gray-Code für die Tupel einer festen Länge mit Einträgen $0 \leq a_i < r$ für $r > 2$. Sei $g_r(k)$ das k-te Tupel des Codes, wie kann man $g_r(k)$ aus k direkt bestimmen?

(2) Sei D_P das Diagramm einer Ordnung $P = (X, <)$. Zeige $\chi(D_P) \leq \mathsf{höhe}(P)$.

(3) Sei D_P das Diagramm einer Ordnung P. Zeige $\chi(D_P) \leq \mathsf{weite}(P) + 1$.

(4) Sei $I^\star_{2^n}$ die Intervall-Ordnung die aus allen offenen Intervallen gerader Länge mit Endpunkten in $\{1, \ldots, 2^n\}$ besteht und $D^\star_{2^n}$ ihr Diagramm. Beweise: $\chi(D^\star_{2^n}) = n = \mathsf{höhe}(I^\star_{2^n}) + 1$.

Hinweis: Aus der Vorlesung wissen wir, dass $\chi(D_{2^{n-1}}) = n-1$, wobei D_{2^n} das Diagramm der Intervall-Ordnung I_{2^n} ist, die die aus allen offenen Intervallen mit Endpunkten in $\{1, \ldots, 2^n\}$ besteht.

(5) Beschreibe einen komplementären Gray-Zykel im Boolschen-Verband $\mathcal{B}_{2n}$, d.h. komplementäre Vektoren sollen sich im Zykel gegenüberliegen.

Anwendungen von Gray-Codes

(6) Die *Permanente* einer $n \times n$ Matrix A ist definiert als

$$\operatorname{per}(A) = \sum_{\pi \in S_n} a_{1\pi_1} a_{2\pi_2} \cdots a_{n\pi_n}$$

Beweise die Ryser-Formel für die Permanente

$$\begin{aligned} \operatorname{per}(A) &= \sum_{T \subseteq [n]} (-1)^{n-|T|} \sum_{s:[n]\to T} \prod_{1\leq i\leq n} a_{is(i)} = \sum_{T \subseteq [n]} (-1)^{n-|T|} \prod_{1\leq i\leq n} \sum_{j\in T} a_{ij} \\ &= \sum_{x \in \mathbf{2}^{[n]}} (-1)^{n-x_1-x_2-\ldots-x_n} \prod_{1\leq i\leq n} \sum_{1\leq j\leq n} x_j a_{ij} \end{aligned}$$

Hinweis: Inklusion-Exklusion.

(7) Wie viele Multiplikationen und Additionen erfordert die Evaluation von $\operatorname{per}(A)$ wenn man die Formel aus der vorigen Übung verwendet und die Summenden in einer Gray-Ordnung von $\mathbf{2}^{[n]}$ abarbeitet. Vergleiche dies mit der Anzahl von Operationen die die Evaluation von $\operatorname{per}(A)$ mit der definierenden Formel erfordert.

(8) Finde einen Zusammenhang zwischen Lösungen für die Türme von Hanoi (siehe z.B. `http://www.gamecraft.de/hanoi/index.htm`) und Gray-Codes. Beschreibe diesen Zusammenhang möglichst genau.