

- Film
- Orga, Nr 2.
- Greedy-Algorithmen & Graphen

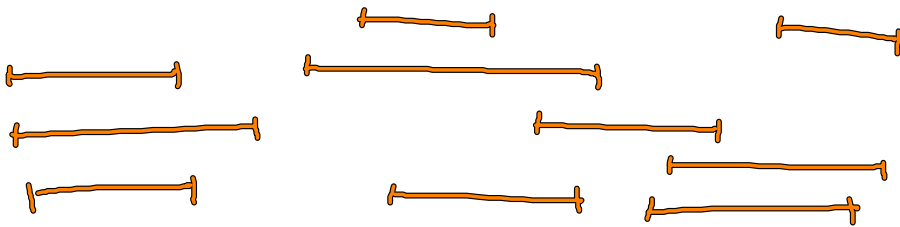
Ein Problem bei der Taktplanoptimierung:

- Finden kurzer integraler Zyklen

• TUT Di, 16-18 Uhr entfällt

• dafür: RB Freitag 8-10
 12-14 } PA Abnahme
 14-16 }

Interval Partitioning Problem



- ALLE Intervalle (= Jobs) bearbeiten
- auf so wenige "Maschinen" wie möglich

Definition: Tiefe $d :=$ größte Anzahl von Intervallen,
 in denen ein einzelner Punkt

liegt.

Lemma: # Maschinen \geq Tiefe d

Frage: Reichen d Maschinen immer aus?

Idee: • Entwickle Algo, der den Intervallen
 d verschiedenen Labels (= Maschinen)
Zuordnet

• Argumentiert, dass

- 1) jedes Intervall ein Label hat
- 2) keine Intervalle mit gleichem Label überlappen

ALGO: INPUT: Intervalle I_1, \dots, I_n ; nach
Startzeiten sortiert

OUTPUT: Label $\in \{1, \dots, d\}$ für
Intervalle

$F := \emptyset$ // "verbotenes Label"

for $j = 1, \dots, n$ {

$F := F \setminus \{l : \max_{i: I_i \text{ hat Label } l} f_i \leq s_j\}$

if $\exists l \in \{1, \dots, d\} : l \notin F$ {
assign l to I_j

$F := F \cup \{l\}$

}

}

Beh. 1: Jedes Intervall bekommt ein Label.

Bew. Sei I_j irgendein Intervall

Sei $\epsilon := |F|$ in Iteration j

$\Rightarrow \exists \epsilon+1$ überlappende Intervalle

$\Rightarrow \epsilon+1 \leq d$

$\Rightarrow \epsilon < d$

$\Rightarrow \exists$ Label $l \in \{1, \dots, d\} : l \notin F$ \square

Beh. 2: Keine zwei Intervalle mit gleichem Label überlappen sich.

Bew. Seien I, I' überlappende Intervalle

Sei I vor I' in geg. Sortierung,
habe I Label l .

\Rightarrow als I' betrachtet wird, gilt $l \in F$

$\Rightarrow I'$ erhält nicht dasselbe Label

wie I \square

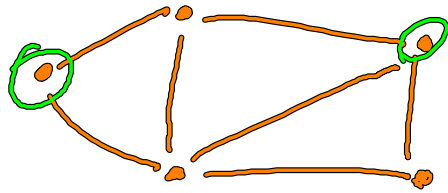
Korollar: Der Greedy Algo liefert eine optimale Zuordnung von Labels zu Intervallen.

Färben von Graphen

Def.: Eine k -Färbung eines unger. Graphen ist eine Unterteilung der Knotenmenge in k independent sets.

Erinnerung: $U \subseteq V(G)$ heißt independent set, falls $|\{(v,w) \in E : v \in U, w \in U\}| = 0$.

Bsp:



Frage: Unterteilung von $V(G)$ in eine minimale
Anzahl von independent sets.
(minimale Anzahl heißt chromatische Zahl
 $\chi(G)$ von G .)

Dieses Problem ist NP-vollständig, d.h.
wahrscheinlich gibt es keinen effizienten
Algorithmus.

Betrachte Graphen, die wie folgt gegeben sind:

- $V := \{I_1, \dots, I_n\}$ eine Menge von Intervallen
- $E := \{(I_i, I_j) : I_i \text{ und } I_j \text{ überlappen}\}$
- "Intervallgraphen"

- Färben von Intervallgraphen korrespondiert exakt
zum Interval Partition Problem (s.o.).
- Färben von Intervallgraphen ist leicht, obwohl
Färben auf allgemeinen Graphen schwer ist.

ACHTUNG: "Färben" ist nicht immer gleich "Färben"

Färbungslemma von Mity

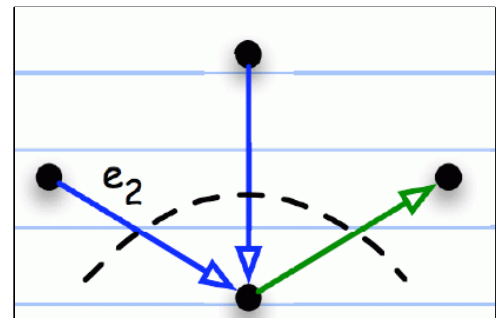
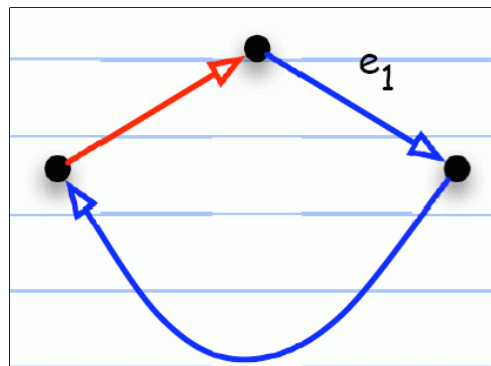
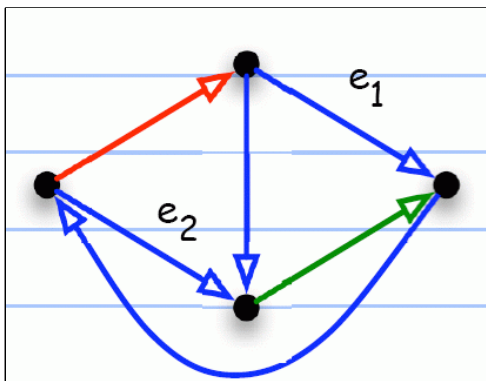
(Hat nichts mit independent sets zu tun!)

Sei G ein ger. Graph, dessen Kanten rot, grün und blau gefärbt sind. Sei $e \in E(G)$ eine blaue Kante.

Es gilt genau eine der folgenden Aussagen

a) e liegt auf einem unger. Kreis, der nur aus roten und gleichgerichteten blauen Kanten besteht.

b) e liegt auf einem unger. Schnitt, der nur aus grünen und gleichgerichteten blauen Kanten besteht.



Beweis: 1. a) oder b) gilt immer.
2. a) und b) schließen sich aus.

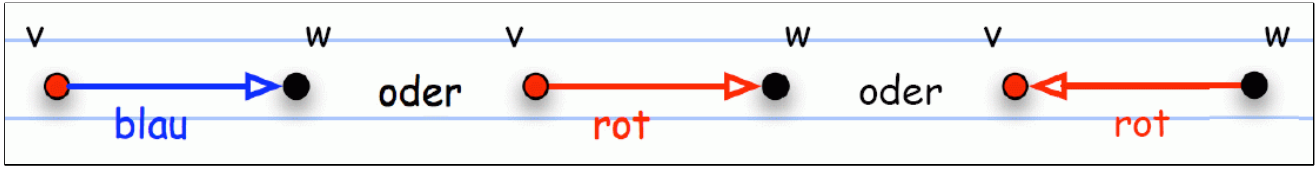
1)



Markiere Knoten des Graphen wie folgt:

- Markiere y
- Sei v markiert, w unmarkiert

Falls



markiere w , setze $\text{pred}(w) = v$.

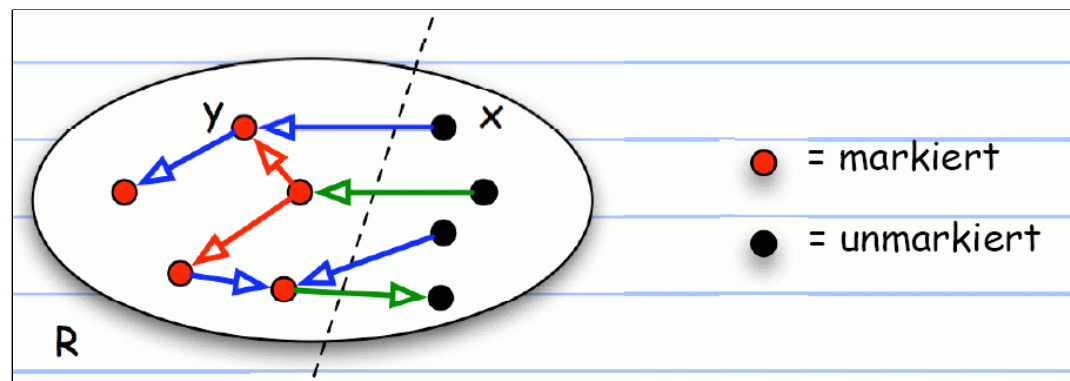
Fall 1: Am Ende ist x markiert.

\Rightarrow a)

Fall 2: x wird nicht markiert.

Definiere $R := \{v \in V : v \text{ markiert}\}$

\Rightarrow keine roten oder gerichtete blaue Kanten verlassen R .



\Rightarrow R definiert Schnitt gemäß b).

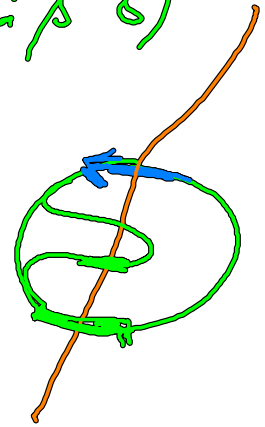
2) a) und b) schließen sich an

Annahme: e liegt auf Kreis gemäß a)
UND
 e liegt auf Schritt gemäß b)

$\Rightarrow \exists$ Kante F , die auch auf
Kreis & Schritt liegt.

• F ist rot oder blau und zeigt
nach "rechts", da F auf Kreis

• F ist grün oder blau und zeigt
nach "links", da F in Schritt.



("rechts" $\hat{=}$ gleiche Richtung auf Kreis wie e
"links" $\hat{=}$ gleiche Richtung im Schritt wie e)

□

Korollar: In einem gerichteten Graphen liegt
jede Kante entweder auf einem
gerichteten Kreis oder auf einem
gerichteten Schritt.

Bew.: Färbe alle Kante blau + Mintz.
