Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Stefan Felsner
Felix König

ADM I – Graphen und Netzwerkalgorithmen
Sommersemester 2007

Elisabeth Günther
Torsten Ueckerdt

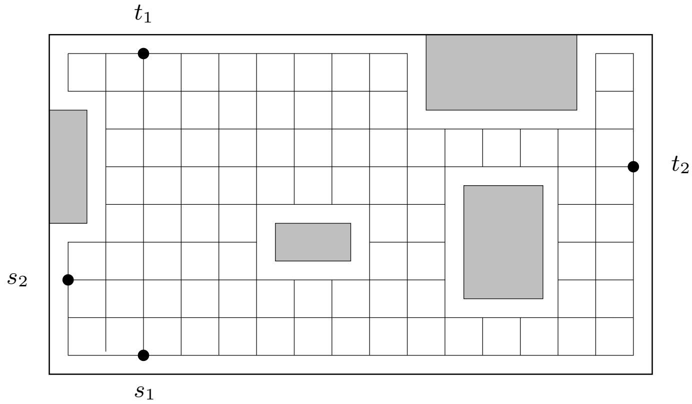
4. Übungsblatt

Abgabe: Freitag, 18.05.2007, *vor* der Übung

Aufgabe 13 **5 Punkte**

Zwei selbstfahrende Roboter sollen in einer Lagerhalle Transportaufträge ausführen. Die Roboter werden per Funk gesteuert, wodurch sich folgendes Problem ergibt: Kommen sie sich zu nahe, so entsteht Funkinterferenz und die Roboter können keine Signale mehr empfangen.

Wir diskretisieren die befahrbare Fläche der Lagerhalle, indem wir sie als Graphen mit n Knoten modellieren: Jeder Knoten korrespondiert mit einem Teilstück der Fläche, benachbarte Stücke sind durch eine Kante verbunden. Die Fahrzeiten der Roboter auf allen Kanten sei uniform. Interferenz entsteht, wenn sich die beiden Roboter auf benachbarten Teilstücken befinden.



Transportaufträge werden immer für beide Roboter gleichzeitig generiert und haben die folgende Form: Roboter i, momentan auf Teilstück s_i, fahre zu Teilstück t_i, $i = 1, 2$. Entwickelt einen polynomiellen Algorithmus, welcher interferenzfreie Fahrwege für beide Roboter zur schnellstmöglichen Ausführung eines solchen Paares von Fahraufträgen generiert oder feststellt, dass es keine solchen gibt. Gebt die Laufzeit Eures Algorithmus an und argumentiert warum er funktioniert und die behauptete Laufzeit hat.

(Tipp: Die Fahrwege können durch Durchmusterung eines geeigneten Graphen bestimmt werden.)

Aufgabe 14 **5 Punkte**

Sei G ein gerichteter Graph und sei $\Pi = \{\pi_1, ..., \pi_k\}$ die Partition von G in seine starken Zusammenhangskomponenten.

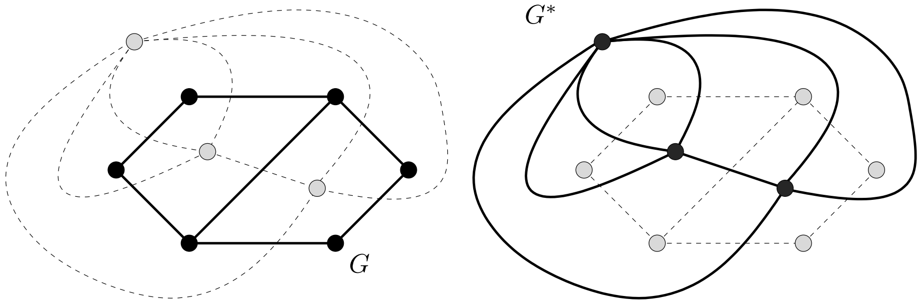
Definiere den *Quotientengraph* $G|_\Pi$ von G bezüglich Π durch

$$V(G|_\Pi) := \Pi$$
$$E(G|_\Pi) := \{(\pi_i, \pi_j) |\ \exists (v_i, v_j) \in E(G) :\ v_i \in \pi_i, v_j \in \pi_j, i \neq j\}$$

Welche spezielle Eigenschaft hat $G|_\Pi$ (mit Beweis)?

Aufgabe 15 **5 Punkte**

Sei G ein planarer zusammenhängender Graph. Ein *Dualgraph* G^* von G ist ein Graph, dessen Knotenmenge zu jeder der Regionen (inklusive der externen Region) von G einen Knoten, und dessen Kantenmenge zu jeder Kante e von G eine Kante enthält, welche zwischen den Knoten verläuft, die mit den Regionen korrespondieren, welche e berühren. Ein Dualgraph kann also durchaus parallele Kanten und auch Schlaufen haben.



Zeigt: G bipartit $\Leftrightarrow$ G^* eulersch.

Aufgabe 16 **5 Punkte**

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph, $c : E \to \mathbb{R}^+$ eine Bewertung seiner Kanten und T ein MST bezüglich c. Sei ferner $X \subset V$.

a) Ist T im allgemeinen auch ein MST bezüglich $c' : E \to \mathbb{R}^+$ mit

$$c'(e) = c^2(e) \quad ?$$

b) Ist T im allgemeinen auch ein MST bezüglich $c'' : E \to \mathbb{R}^+$ mit

$$c''(e) = \begin{cases} 2c(e) \text{ falls } e = (v, w) \text{ mit } v \in X, w \in V \setminus X \\ c(e) \text{ sonst ?} \end{cases}$$

c) Ist T im allgemeinen auch ein MST bezüglich $c''' : E \to \mathbb{R}^+$ mit

$$c'''(e) = \begin{cases} c(e) + 2 \text{ falls } e = (v, w) \text{ mit } v, w \in X \\ c(e) \text{ sonst ?} \end{cases}$$

Beweist eure Antworten.

Programmieraufgabe 2 (Abnahme während einer der RBs am 18.5.2007):
Programmiert den Algorithmus zum Finden eines Euler-Kreises. Euer Programm soll hierzu wie gewohnt einen Graphen aus einer Datei einlesen und genau eine der folgenden Ausgaben generieren:

- einen Knoten mit ungeradem Grad
- einen Eulerkreis

Denkt daran, dass für diese Aufgabe der eingelesene Graph als ungerichteter Graph zu verstehen ist. (Leitet also am besten eine Klasse für ungerichtete Graphen von eurer Graphenklasse ab.)