6. Übung "Graphen und Geometrie" SoSe 2018

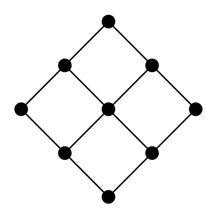
Stefan Felsner Aufgaben für Do. 7. Juni

(1) Betrachte die 'lattice walk' Markov Kette auf dem Boolschen Verband $\mathcal{B}_n$. Starte mit $X_0 = \mathbf{0}$ und $Y_0 = \mathbf{1}$ und wende jeweils die gleiche Operation auf X_i und Y_i an. Zeige:

- Wenn $X_t = Y_t$, dann ist $\mathsf{Prob}(X_t = a) = 1/2^n$ unabhängig von der Wahl von $a \in \mathcal{B}_n$.
- Sei $T = \min(t : X_t = Y_t)$, die Zufallsvariable T ist die Couplingzeit. Stelle eine Relation zwischen dem *coupon collector's problem* und dem Erwartungswert $\mathsf{E}(T)$ her.

(2) Betrachte die 'lattice walk' Markov Kette auf dem abgebildeten Verband $\mathcal{L}_{\mathbf{2+2}}$. Starte mit $X_0 = \mathbf{0}$ und $Y_0 = \mathbf{1}$ und wende jeweils die gleiche Operation auf X_i und Y_i an.

- Sei $T = \min(t : X_t = Y_t)$, bestimme $\mathsf{E}(T)$.
- Zeige dass $\mathsf{Prob}(X_T = a)$ nicht unabhängig von der Wahl von $a \in \mathcal{L}_{\mathbf{2+2}}$ ist.



(3) Zeige, dass 2-Orientierungen von Quadrangulierungen und *separating decompositions* in Bijektion sind. Zeige insbesondere, dass links-rechts Pfade einfach sind und dass sich die beiden in einem Knoten startenden links-rechts Pfade nich erneut treffen.

(4) Gegeben eine innere Triangulierung eines 4-gons mit einer *transversalen Struktur* T. Zeige, dass es eine zu T passende Rechteckszerlegung gibt.

(5) Sei H der bipartite Graphe, dessen bipartite Adjazenzmatrix die Matrix A_S ist, deren Lösung ein Squaring beschreibt. Die eine Farbklasse von H besteht aus den beschränkten Flächen der *separating decomposition*, die andere Farbklasse sind die inneren Knoten und einer der äußeren, die Kanten entsprechen der Inzidenzrelation.

Zeige, dass H ein perfektes Matching besitzt.
(Hinweis: man kann das mit Hall und Euler machen.)