11. Übung "Graphen und Geometrie" SoSe 2018

Stefan Felsner Aufgaben für Do. 12. Juli

(1) Sei p ein Punkt aus P wie groß kann $\deg_k(p)$ werden?

(2) Sei P eine Menge von n Punkten in allgemeiner Lage in der Ebene. Sei $K \subset \{1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$, sowie $E(K) = \sum_{k \in K} e_k(P)$ die Anzahl der k-Kanten mit $k \in K$ und $S_K = \sum_{k \in K} k$. Zeige: es gibt eine Konstante c, so dass

$$E(K) \leq cn\sqrt{S_k}.$$

(3) Sei P eine Menge von $2n$ Punkten in allgemeiner Lage in der Ebene. Zeige:

a) Es gibt ein kreuzungsfreies perfektes Matching auf P.

b) Es gibt höchstens ein perfektes Matching das aus sich paarweise kreuzenden Kanten besteht.

(4) Sei P eine Menge von $2n+2$ Punkten in allgemeiner Lage in der Ebene. Zeige: Wenn es zwei n-Kanten gibt, deren Schnitt leer ist, dann existieren mehr als $2n + 2$ gerichtete n-Kanten.

(5) Sei P eine Menge von Punkten in allgemeiner Lage im Raum. Beschreibe den Effekt einer Mutation (coplanarität von 4 Punkten während einer Verschiebung) auf die k-Facetten.

(6) Sei P eine Menge von Punkten in allgemeiner Lage im $\mathbb{R}^4$ Beschreibe den Effekt einer Mutation (degenerierte Lage von 5 Punkten während einer Verschiebung) auf die k-Facetten.

(7) Diese Aufgabe ist auf der Rückseite.

Let P be a set of $2n$ points in general position. Let $p_1, \ldots, p_{2n}$ be the left-to-right order of the points, i.e., the order by x-coordinate.

Let H be the set of line segments with endpoints $p_ip_j \in P$, such that the line through p_ip_j is a halving line, i.e., p_ip_j and p_jp_i are $(n-1)$-edges.

Start with a vertical line ℓ through p_i with $1 \leq i \leq n$, and rotate this line clockwise around p_i until it contains a segment p_ip_j in H. Initially, there are less than n points above the line; this number goes down whenever the line hits a point to the left of p_i, and goes up whenever it hits a point to the right of p_i. It follows that p_j must lie to the right of p_i. Continue rotating the line clockwise around p_j until it hits another segment in H (which will again lie to the right of p_j), and so on, until the line is vertical again. The sequence of segments hit by the rotating line forms a convex chain C_i.

Show the following statements:

- Every segment in H is in exactly one of these convex chains.
- The number of intersections between two convex chains C, C' is no more than the number of upper common tangents of C and C'.
- Any line between two points in P is an upper common tangent of at most one pair of chains C_i, C_j.
- P has at most $O(n^{4/3})$ halving lines. (Hint: crossing lemma).