10. Übung "Graphen und Geometrie" SoSe 2012

Stefan Felsner / Kolja Knauer — Aufgaben für Di. 3. Juli

(1) In einem Lattice L gilt für alle x, dass $x = \bigvee\{j \in \mathcal{J}(L) \mid j \leq x\}$.

(2) Ein endliches Poset P is ein Lattice genau dann wenn es ein globales Minimum gibt und für je zwei Elemente ein eindeutiger Join existiert.

(3) Zeige, dass die Teiler n von geordnet nach $k \leq \ell :\Leftrightarrow k \mid \ell$ einen distributive Verband bilden. Charakterisiere die Join-Irreduziblen-Posets solcher Verbände.

(4) Zeige, dass die Ideale eines Posets per Inklusion geordnet einen distributiven Verband bilden und dass eine Menge $M \subset \mathbb{Z}^d$ komponentenweise geordnet einen distributiven Verband bildet, wenn für $x, y \in M$ auch das komponentenweise Maximimum und Minimum von x und y in M sind.

(5) Finde eine Bijektion zwischen der Klasse der endlichen, voll-dimensionalen Cover-Sublattices von $\mathbb{Z}^d$ mit Minimum $\mathbf{0} \in \mathbb{N}^d$ und der Klasse der Posets, die in d Ketten partitioniert sind.

(6) Gegeben sei ein gerichteter Graph $D = (V, A)$ mit Senke s, sodass es von jedem Knoten einen gerichteten Pfad zu s gibt. Ausserdem sei $\sigma \in \mathbb{N}^V$ ein Vektor, der jedem Knoten eine Zahl von Chips zuweist. Es ist erlaubt einen Knoten v zu *feuern*, genau dann wenn er mindestens soviele Chips wie Ausgrad hat, d.h., $\sigma(v) \geq \mathsf{outdeg}(v)$. Feuern heisst, über jede ausgehende Kante von v einen Chip zum Nachbarn zu senden. Daraus resultiert einen neue Chip-Verteilung σ'. Zeige, dass die Chip-Verteilungen, die durch (mehrfaches) Feuern der Knoten von fester Start-Verteilung σ aus erreichbar sind einen Join-Subattice des $\mathbb{N}^V$ bilden.