9. Übung "Graphen in und aus der Ebene" SoSe 2014

Stefan Felsner Aufgaben für Di. 17. Juni

(1) Beweise oder wiederlege:

- Jeder planare Graph ist induzierter Subgraph einer planaren Triangulierung.
- Jeder planare Graph ist aufspannender Subgraph einer planaren Triangulierung. (Aufspannend bedeutet, dass der Subgraph dieselbe Knotenmenge besitzt.)
- Jeder outerplanare Graph ist induzierter Subgraph eines maximal outerplanaren Graphen.
- Jeder outerplanare Graph ist aufspannender Subgraph eines maximal outerplanaren Graphen.
- Jeder Graph ist induzierter Subgraph eines chordalen Graphen.
- Jeder Graph ist aufspannender Subgraph eines chordalen Graphen.

(2) Entwickle einen Approximationsalgorithmus für maximale gewichtete Clique in Durchschnittsgraphen von achsenparallelen Rechtecken.

(3) Entwickle einen Approximationsalgorithmus für maximale Clique in Durchschnittsgraphen von Segmenten. (Das ist ein offenes Forschungsthema).

(4) Let $\mathcal{F} = \{S_1, \ldots, S_n\}$ be a family of convex objects of $\mathbb{R}^2$. A set of points $T \subset \mathbb{R}^2$ is said to be a *hitting set* of $\mathcal{F}$ if $T \cap S_i \neq \emptyset$ for any $S_i \in \mathcal{F}$. The *transversal number* $\tau(\mathcal{F})$ is the minimum size of a hitting set of $\mathcal{F}$. The *packing number* $\nu(\mathcal{F})$ is the maximum number of pairwise disjoint objects of $\mathcal{F}$.

Suppose that a family of sets $\mathcal{F}$ is partitioned into m subfamilies $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_m$ and that for each $\mathcal{F}_i$ there exists a polynomial algorithm that computes a hitting set T_i and a packing P_i of $\mathcal{F}_i$ such that $|T_i| \leq k_i|P_i|$. Show the following:

a. $\bigcup_{i=1}^{m} T_i$ is a hitting set for $\mathcal{F}$ of size at most $(k_1 + \ldots + k_m)\tau(\mathcal{F})$.

b. The largest of the sets P_i is a packing for $\mathcal{F}$ of size at least $\nu(\mathcal{F})/(k_1 + \ldots + k_m)$.

c. $\tau(\mathcal{F}) \leq (k_1 + \ldots + k_m)\nu(\mathcal{F})$.

(5) Sei $\mathcal{F}$ eine Familie von achsenparallelen Einheitsquadraten. Was lässt sich über $\tau(\mathcal{F})$ und $\nu(\mathcal{F})$ sagen?

(6) Finde einen Kontaktgraphen von Einheitskreisen der nicht mit 3 Farben gefärbt werden kann.

Zeige (ohne Verwendung des 4-Farben-Satzes), dass Kontaktgraphen von Einheitskreisen 4 färbbar sind.