5. Übung "Graphen in und aus der Ebene" — SoSe 2014

Stefan Felsner — Aufgaben für Di. 20. Mai

(1) Wie viele Kanten kann ein geometrischer Graph haben wenn jede Kante an höchstens einer Kreuzung beteiligt ist?

(2) Sei P eine Punktmenge in konvexer Lage. Wir betrachten P als Knotenmenge eines geometrischen Graphen G mit der Eigenschaft, dass sich keine 3 Kanten paarweise schneiden. Wie viele Kanten kann G haben?

(3) Eine *projektive Ebene der Ordnung* n ist ein Paar (P, G) von Mengen mit $G \subset 2^P$. Die Elemente von P heissen Punkte die von G Gerade und es gilt: Zu je zwei verschiedenen Punkten gibt es genau eine Gerade, die mit beiden inzidiert. Zu je zwei verschiedenen Geraden gibt es genau einen Punkt, der mit beiden inzidiert. Jede Gerade inzidiert mit $n + 1$ Punkten.

a) Zeige: es gibt $n^2 + n + 1$ Punkte und ebensoviele Gerade.

b) Endliche projektive Ebenen können nicht als Mengen von Punkten und Geraden in der reellen projektiven Ebene realisiert werden. (Hinweis: Das Material aus der Vorlesung kann hilfreich sein.)

(4) Beweise die Eulerformel für Graphen in der projektiven Ebene: $|V| - E| + |F| \geq 1$.

(5) a) Finde eine Einbettung (kreuzungsfreie Zeichnung) des K_6 in der projektiven Ebene und bestimme den Dualgraphen.

b) Zeige, dass der K_7 keine Einbettung in die projektive Ebene besitzt.

(6) Ein Zeichnung von G in der Ebene heißt *k-beschränkt*, wenn jede Kante von höchstens k anderen Kanten gekreuzt wird. Die obere Schranke an die Anzahl der Kanten eines Graphen der eine k-beschränkten Zeichnung besitzt ist $(k + 3)(n - 2)$ für $k = 0, 1, 2$ und $\frac{11}{2}(n - 2)$ für $k = 3$.

Konstruiere für $k \leq 3$ Graphen mit k-beschränkten Zeichnungen und möglichst vielen Kanten.

($*$) Ideen für $k \geq 4$ sind willkommen!

(7) Wir wollen die Knoten kreuzungsfreier Zeichnungen planarer Graphen auf ganzzahligen Punkten plazieren. Wie gross müssen die Koordinaten sein? Finde eine Konstruktion die eine lineare Koordinatengrösse erzwingt (Hinweis: Eine solche Konstruktion ist als *nested triangles* bekannt.)