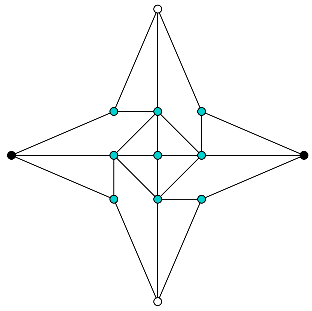
4. Übung "Graphen in und aus der Ebene" **SoSe 2014**

Stefan Felsner Aufgaben für Di. 13. Mai

(1) Zeige, dass für bipartite Graphen gilt: Hall-Kriterium und Tutte-Berge-Kriterium, für die Existenz eines perfekten Matchings, sind äquivalent.



(2) a) Zeige: Jede 3-Färbung des abgebildeten Graphen weist den beiden weissen Knoten die gleiche Farbe zu und ebenso den beiden schwarzen.

b) Verwende das *crossover gadget* aus Teil a) der Aufgabe um zu zeigen, dass 3-Färbbarkeit für planare Graphen und für allgemeine Graphen gleich schwierig ist (technisch gesprochen: es gibt polynomielle Reduktionen zwischen den Problemen.)

(3) Sei G Zusammenhängend und $|E_G|$ gerade. Die Kantenmenge von G kann in Teile der Kardinalität 2 zerlegt werden, die je einen P_3 enthalten. In anderen Worten: $\mathcal{L}(G)$ besitzt ein perfektes Matching.

(4) Beweise die Eulerformel für projektive Geradenarrangements ($f_0 - f_1 + f_2 = 1$).

(5) Sei $\mathcal{P}$ die Parabel $y = x^2/2$ und q ein Punkt unter der Parabel. Zeige, dass die Gerade q^* bezüglich der parabolischen Dualität aus der Vorlesung so berechnet werden kann: Berechne die Tangenten ℓ_1, ℓ_2 an $\mathcal{P}$ die q enthalten. Bestimme die Berührpunkte p_1, p_2 der Tangenten an $\mathcal{P}$. Bestimme die Gerade ℓ durch p_1 und p_2. Nun gilt $q^* = \ell$.

(6) Sei A und B die Ebene $z = 1$ und $z = -1$ in $\mathbb{R}^3$. Interpretiere A als primale und B als duale Ebene. Die Dualität wird durch die kanonische Dualität zwischen Ursprungsgeraden und Ursprungsebenen im $\mathbb{R}^3$ vermittelt.

a) Berechne die Abbildungen $p \to p^*$ und $\ell \to \ell^*$ von A nach B explizit.

b) Identifiziere A und B auf natürliche Weise, d.h $(p_x, p_y, 1) \leftrightarrow (p_x, p_y, -1)$ und bestimme so die Menge $\mathcal{C} = \{p : p \in p^*\}$.

c) Interpretiere die Dualität aus diesem Beispiel geometrisch.

(7) Sei P eine Punktmenge in konvexer Lage. Wie sieht P^* aus?

(8) Sei $\mathcal{A}$ ein Geradenarrangement. Sei T ein von drei Geraden L_1, L_2, L_3 gebildetes Dreieck das keine Fläche der Arrangements ist. Wenn auf L_1 kein gewöhnlicher Punkt liegt und jede Gerade die T schneidet einen Punkt auf $T \cap L_1$ besitzt, dann gibt es einen gewöhnlichen Punkt in T.

(9) Wie viele Kanten kann ein geometrischer Graph haben wenn jede Kante an höchstens einer Kreuzung beteiligt ist?

(10) Sei P eine Punktmenge in konvexer Lage. Wir betrachten P als Knotenmenge eines geometrischen Graphen G mit der Eigenschaft, dass sich keine 3 Kanten paarweise schneiden. Wie viele Kanten kann G haben?