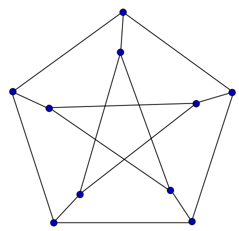
2. Übung "Graphen in und aus der Ebene" SoSe 2014

Stefan Felsner Aufgaben für Di. 28. April

(1) Zeige 1) K_5 hat keine 2-Basis. 2) G hat 2-Basis $\Longrightarrow$ $G - e$ hat 2-Basis. (Das sind die beiden fehlenden Versatzstücke zum Beweis des Satzes von MacLane.)

(2) Der Petersen-Graph ist aus der Graphentheorie bekannt.



- Der Petersen-Graph G_P enthält eine $K_{3,3}$ Unterteilung.
- Enthält G_P eine K_5 Unterteilung? einen K_5 Minor?
- Zeige ohne Verwendung von verbotenen Untergraphen und Minoren, dass G_P nicht planar ist.
- Bestimme die Kreuzungszahl von G_P.

(3) Es gibt für $n \geq 5$ keine Punktmenge P mit $|P| = n$ so dass alle planaren Graphen auf n Knoten gradlinig kreuzungsfrei mit Knoten in P gezeichnet werden können. Man sagt *es gibt keine n-elementige universelle Punktmenge für planare Graphen mit n Knoten.*

(4) Zu einem Graphen $G = (V, E)$ sei $G^\star$ der Graph der aus G entsteht indem ein neuer universeller Knoten $v^\star$ hinzugefügt wird, d.h. für alle $w \in V$ ist $(v^\star, w)$ eine Kante von $G^\star$.

Definition. G ist *outerplanar* $\iff$ $G^\star$ ist planar.

- Wie sehen maximal outerplanare Graphen aus?
- finde eine Bijektion zwischen Bäumen mit n Knoten und maximal outerplanare Graphen mit $n + 2$ Knoten.

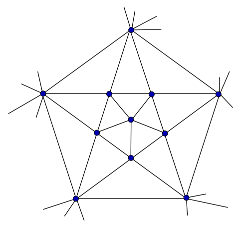
(5) Wir wollen zeigen, dass jede n-elementige Punktmenge P in allgemeiner Lage eine universelle Punktmenge für outerplanare Graphen mit n Knoten ist.

a) Sind p, p' aufeinanderfolgende Punkte der konvexen Hülle von P mit $|P| = n$, dann gibt es für jedes $0 < i \leq n - 2$ ein $q \in P \setminus \{p, p'\}$ so dass das Dreieck $p, p'q$ keine weiteren Punkte von P enthält und eine Greade ℓ durch q mit Halbebenen H_ℓ^- und H_ℓ^+ existiert so dass $p \in H_\ell^-$, $p' \in H_\ell^+$ und $|H_\ell^- \cap P| = i$.

b) Verwende Induktion um die Universalität von P zu beweisen. Eine starke Induktionsannahme hilft.

(6) Sei G eine planare Triangulierung, zeige:

$$G \text{ ist eulersch} \iff \chi(G) = 3.$$



(7) Zeige, dass der in der Abbildung gezeigte Graph reduzierbar ist, d.h. in keinem minimalen Gegenbeispiel zum 4 Farbensatz vorkommen kann.