11. Übung "Graphen in und aus der Ebene" SoSe 2014

Stefan Felsner Aufgaben für Di. 8. Juli

Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph, eine Funktion $g : V \to \mathbb{R}$ ist *harmonisch im Knoten* $v \in V$ wenn $g(v) = \frac{1}{\mathsf{deg}(v)} \sum_{w \in N(v)} g(w)$.

In der Literatur zu diskreten harmonischen Funktionen spielen das *Maximum-Prinzip* und das *Eindeutigkeits-Prinzip* wichtige Rollen.

(1) Wenn g harmonisch in allen Knoten ist, dann ist g konstant.

Sei $S \subset V$ und sei $g(s)$ für alle $s \in S$ festgelegt. Zeige: Die Fortsetzung von g zu einer auf $V \setminus S$ harmonischen Funktion ist (so sie existiert) eindeutig.

(2) Sei $S \subset V$ und sei $g(s)$ für alle $s \in S$ festgelegt. Zeige: Eine Fortsetzung von g zu einer auf $V \setminus S$ harmonischen Funktion existiert. [Hinweis: Lineares Gleichungssystem und Aufgabe 1]

Folgere daraus die Existenz und Eindeutigkeit von Federeinbettungen.

(3) Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph, $S \subset V$ und sei $f_0 : S \to \mathbb{R}$ gegeben. Für $v \in V$ definiern wir $F(v)$ als Erwartungswert von $f_0(s)$, wobei s der (Zufalls)-Knoten ist, in dem ein Zufallsspaziergang der in v startet zuerst auf S trifft. Zeige, dass F die harmonische Fortsetzung von f_0 auf V ist.

(4) Zeige, dass für die Energiefunktion **En** aus der Vorlesung gilt:

$$\mathbf{En}\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\Big(\mathbf{En}(x) + \mathbf{En}(y)\Big).$$

Folgere daraus, dass **En** streng konvex ist.

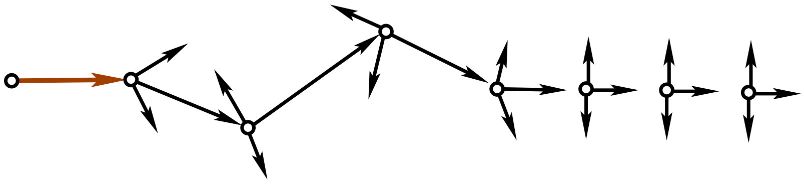
(5) Kläre die Begriffe *baryzentrische Koordinaten* und *affine Koordinaten* und ihr Verhältnis.

(6) Verwende die Kantendreiecke ∇_e und $\nabla_{e'}$ um zu zeigen, dass e und e' sich in einer Schnyder-Zeichnung nicht schneiden.

Auf der nächsten Seite geht es weiter.

In den folgenden beiden Aufgaben geht es darum zu zeigen, dass jede Triangulierung T mit Aufhängungen einen Schnyder Wood besitzt. Die letzten beiden Aufgaben sind grundlegend für den Beweis des Satzes: Auf der Menge der Schnyder Woods einer planaren Triangulierung kann mit Kreisflips ein distributiver Verband definiert werden.

(7) Eine 3-Orientierung von T ist eine Orientierung der inneren Kanten von T, sodass jeder innere Knoten 3 ausgehende Kanten hat während die Aufhängungsknoten nur eingehende Kanten haben. Zeige: Schnyder Woods und 3-Orientierungen von T stehen in Bijektion. [Hinweis: Zeige, dass der "Mittelpfad" (Abb.) jeder Kante in einem Aufhängungsknoten endet.]



(8) Sei D eine beliebige Orientierung der inneren Knoten von T. Wir klassifizieren die Knoten abhängig vom Vorzeichen von $\mathsf{outdeg}_D(v) - \mathsf{outdeg}_3(v)$ als positiv, neutral oder negativ. Zeige: Wenn nicht alle Knoten neutral sind, dann gibt es in D einen gerichteten Pfad von einem positiven zu einem negativen Knoten. Folgere daraus die Existenz einer 3-Orientierung.

(9) Wir sagen: eine Orientierung D' entsteht aus einer Orientierung D durch einen *Kreisflip*, wenn die Orientierung eines gerichteten Kreis in D umgedreht wurde um D' zu erzeugen. Zeige: Sind S und S' 3-Orientierungen einer Triangulierung, mit Aufhängung, dann gibt es eine Folge von Kreisflips die S in S' überführt.

(10) In Orientierungen planarer Graphen kann man gerichtete Kreise nach der Drehrichtung (Uhrzeigersinn cw oder Gegenuhrzeigersinn ccw) unterscheiden. Zeige: Eine Triangulierung mit Aufhängung besitzt eine eindeutige 3-Orientierung die keine cw Kreise enthält.